

**Zeitschrift:** Archives des sciences [1948-1980]  
**Herausgeber:** Société de Physique et d'Histoire Naturelle de Genève  
**Band:** 18 (1965)  
**Heft:** 1

**Artikel:** Tableau triangulaire de coefficients intervenant dans divers problèmes de physique mathématique  
**Autor:** Ravatin, Jacques / Mesnard, Guy  
**DOI:** <https://doi.org/10.5169/seals-739166>

### **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. [Mehr erfahren](#)

### **Conditions d'utilisation**

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. [En savoir plus](#)

### **Terms of use**

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. [Find out more](#)

**Download PDF:** 02.07.2025

**ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>**

# TABLEAU TRIANGULAIRE DE COEFFICIENTS INTERVENANT DANS DIVERS PROBLÈMES DE PHYSIQUE MATHÉMATIQUE

PAR

**Jacques RAVATIN et Guy MESNARD**

## RÉSUMÉ

Le tableau est obtenu en développant le produit  $(ab)^{\alpha-1} a^p$ ,  $\alpha$  et  $p$  étant des entiers positifs et  $a$  et  $b$  deux opérateurs tels que  $ab - ba = x$ . On indique un mode de formation de ce tableau à partir de tableaux plus simples.

Dans une précédente publication (1), nous avons étudié la série  $\sum_{n=1}^{\infty} n^{\alpha} p^{n-1}$  ( $\alpha$ , entier positif), qui intervient dans la théorie de la croissance des polymères. Nous avons introduit à cette occasion des coefficients  $V_{\alpha}^i$ , qui avaient été considérés aussi par Truesdell (2), ainsi que des coefficients  $L_{\alpha}^i$ . Nous nous proposons de généraliser les  $L_{\alpha}^i$  en envisageant un autre problème et d'étudier le tableau des coefficients obtenus.

Pour cela nous considérons deux opérateurs  $a$  et  $b$  dont le commutateur  $ab - ba$  est égal à  $x$ ,  $x$  appartenant au corps des réels, des complexes ou des quaternions. Nous développons le produit  $(ab)^{\alpha-1} a^p$  ( $\alpha$  et  $p$ , entiers  $> 0$ ) suivant les puissances  $a^s b^s$  ( $s$ , entier positif). On admet la loi d'associativité

$$a^s (a^t b^q) = (a^s a^t) b^q = a^{s+t} b^q.$$

On trouve qu'il est possible d'écrire

$$(ab)^{\alpha-1} a^p = a^p [T_{\alpha}^1 a^{\alpha-1} b^{\alpha-1} + \dots + (-1)^{t-1} T_{\alpha}^t a^{\alpha-t} b^{\alpha-t} + \dots + (-1)^{\alpha-1} T_{\alpha}^{\alpha}],$$

les  $T_{\alpha}^i$  étant positifs ( $i \leq \alpha$ ), et l'on établit par récurrence la relation :

$$T_{\alpha}^t = T_{\alpha-1}^{t-1} (\alpha - t + p) x + T_{\alpha-1}^t. \quad (1)$$

A partir de cette relation et en remarquant que

$$T_1^1 = T_2^1 = \dots = T_a^1 = \dots = 1, \quad (2)$$

on construit le tableau triangulaire suivant, noté  ${}^p T_x$ :

$\alpha = 1$	1			
$\alpha = 2$	1	$px$		
$\alpha = 3$	1	$(2p+1)x$	$p^2 x^2$	
$\alpha = 4$	1	$3(p+1)x$	$(3p^2+3p+1)x^2$	$p^3 x^3$
$\vdots$	$\vdots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$

Pour  $p = 1$  et  $x = 1$  les  $T_\alpha^t$  sont les coefficients  $L_\alpha^t$  déjà cités. On a aussi:  $T_{\alpha+1}^t$  (pour  $p = 0$  et  $x = 1$ ) =  $L_\alpha^t$  ( $t \leq \alpha$ ).

On a donc généralisé les coefficients  $L_\alpha^t$  que l'on écrira  ${}_1 L_\alpha^t$ , les  $T_\alpha^t$  étant notés  ${}^p L_\alpha^t$ .

On a d'ailleurs

$${}^p L_\alpha^t = x^{t-1} {}_1^p L_\alpha^t \quad (3)$$

*Quelques propriétés tirées de la formule (1):*

a)  ${}^p L_\alpha^\alpha = p^{\alpha-1} x^{\alpha-1}$

b)  ${}^p L_\alpha^{\alpha-1} = [(p+1)^{\alpha-1} - p^{\alpha-1}] x^{\alpha-2}$

c) On montre que

$$\frac{d}{dp} ({}^p L_{\alpha+1}^{t+1}) = \alpha x ({}^p L_\alpha^t) \quad (4)$$

et l'on en déduit

$${}^p L_{\alpha+1}^{t+1} = \alpha x \int_0^p {}^p L_\alpha^t dp + {}_1^p L_\alpha^{t+1} \quad (5)$$

Cette relation donne un nouveau mode de construction du tableau des  ${}^p L_\alpha^t$ .

d) On a aussi la formule

$${}_1^p L_\alpha^{\alpha-1} = \sum_{i=1}^{\alpha-1} C_{\alpha-1}^i p^{\alpha-i-1}$$

avec

$$C_{\alpha-1}^i = \frac{(\alpha-1)!}{i!(\alpha-i-1)!}$$

*Relations avec d'autres tableaux*

Dans le cadre d'un formalisme portant sur les tableaux, développé par ailleurs (3), on dira que le tableau  ${}^p_x T$  est défini par les relations (1) et (2), la relation (2) donnant la « base » du tableau et la relation (1) le « générateur », ce qui permet de déterminer de proche en proche tous les coefficients. La formule (5) correspond à un autre « générateur ».

On peut en outre présenter le tableau comme résultant d'opérations faites à partir de tableaux triangulaires plus simples.

Partons du tableau

$$Q = \begin{array}{cccc} & & & \\ & & & \\ & & 0 & \\ & & 1 & 0 \\ & & 2 & 1 & 0 \\ & & 3 & 2 & 1 & 0 \\ & & \dots & \dots & \dots & \dots \end{array}$$

dont l'élément de la  $\alpha^e$  ligne et de la  $t^{ème}$  colonne est

$$Q'_\alpha = \alpha - t \ (\alpha \geq t).$$

En ajoutant  $p$  à chaque élément on obtient le tableau

d'élément général  $P'_\alpha = p + \alpha - t$ .

$$P = \begin{array}{cccc} & & & \\ & & & \\ & & p & \\ & & p + 1 & p \\ & & p + 2 & p + 1 & p \\ & & \dots & \dots & \dots \end{array}$$

On passe facilement du tableau  $P$  au tableau  ${}^p_1 T$ . On a en effet

$${}^p_1 L'_\alpha = {}^p_1 L_{\alpha-1}^{t-1} P'_\alpha + {}^p_1 L_{\alpha-1}^t.$$

Enfin on passe au tableau  ${}^p_x T$  en utilisant la formule (3).

Les éléments du tableau peuvent être considérés comme fonctions de  $p$ . Il est intéressant de faire intervenir un tableau dit dérivé dont chaque élément est la dérivée de l'élément homologue du tableau initial. Ce nouveau tableau est formé aisément grâce à la formule (4).

En utilisant le formalisme signalé ci-dessus (3), on peut écrire les relations entre les tableaux sous forme d'opérations simples faites directement sur les tableaux, telles que la multiplication.

*Laboratoire d'Electronique et de Physique du Solide  
de l'Université de Lyon.*

#### BIBLIOGRAPHIE

1. RAVATIN, J. et MESNARD, G. *Comptes Rendus*, t. 255, 1962, p. 2098.
2. TRUESDELL, *Ann. of Math.*, (2), t. 46, 1945, p. 144.
3. RAVATIN, J. et MESNARD, G. *Il Nuovo Cimento*, sous presse.

Manuscrit reçu le 13 mars 1964.

---