Zeitschrift: Archives des sciences [1948-1980]
Herausgeber: Société de Physique et d'Histoire Naturelle de Genève
Band: 28 (1975)
Heft: 2

Artikel: Géométries pseudo-euclidiennes
Autor: Rossier, Paul
DOI: https://doi.org/10.5169/seals-739793

Nutzungsbedingungen
Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Mehr erfahren

Conditions d'utilisation
L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. En savoir plus

Terms of use
The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. Find out more

Download PDF: 15.07.2025

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, https://www.e-periodica.ch

GÉOMÉTRIES PSEUDO-EUCLIDIENNES

PAR

Paul ROSSIER

I. INTRODUCTION

1. — En géométrie euclidienne plane, depuis Poncelet et Laguerre, on attribue un rôle privilégié à une paire de points imaginaires de la droite impropre, les points cycliques. Ils sont communs à tous les cercles du plan et ils interviennent dans la mesure des angles. On qualifie de *pseudo-euclidiennes* les géométries dans lesquelles on donne un rôle analogue au précédent à deux points réels de la droite impropre. Nous qualifierons d'*absolus* ces deux points.

Un premier type de géométrie pseudo-euclidienne est obtenu en s'inspirant des méthodes de la géométrie cayleyenne; une figure quadratique joue alors un rôle fondamental; ici, elle est une paire de faisceaux réels de droites. Nous qualifierons de *synthétique* la géométrie pseudo-euclidienne ainsi construite. D'autre part, la représentation géométrique des phénomènes de la cinématique relativiste conduit à une science où une certaine pseudo-longueur a une fonction essentielle. Dans cette géométrie, deux points impropres fixes appartiennent à tous les lieux de points à pseudo-distance constante d'un point fixe quelconque. La géométrie ainsi élaborée est donc pseudo-euclidienne. Cependant, le choix fait initialement de la pseudo-distance est tel que, contrairement à ce qui se passe dans le cas précédent, le report d'un segment de droite n'est pas toujours possible. Nous qualifierons d'*abstraite* cette deuxième géométrie pseudo-euclidienne.

Une autre disparité apparait encore. L'étude de la géométrie pseudo-euclidienne synthétique plane ne présente aucune difficulté de principe. Par contre l'extension à l'espace impose à celui-ci une sorte d'anisotropie; tous les plans ne jouissent pas des mêmes propriétés métriques. En géométrie pseudo-euclidienne abstraite, l'impossibilité de certains reports élimine cette difficulté.

A notre connaissance, aucun exposé d'ensemble n'a été fait des géométries précédentes. Pour combler cette lacune, nous traiterons tout d'abord, pour chacune d'elles, le cas du plan pour examiner ensuite les questions relatives à l'espace et même à l'hyperespace quadridimensionnel pour la seconde.

2. — Une géométrie dans laquelle on admet les notions d'incidence, d'ordre, de parallélisme et de continuité est dite *affine*. Rappelons-en les principales propriétés.

Deux points d'une droite, pris dans un certain ordre, déterminent un ordre sur cette droite. Les notions de segment de droite et de demi-droite sont de nature affine. Le report d'un segment sur son support ou sur une droite parallèle à ce support a une signification. Il en est de même des notions de milieu et de partie aliquote d'un segment. Le théorème, dit parfois de Thalès, sur la proportionnalité des segments homologues dans la figure formée de deux parallèles coupées par deux droites concourantes est valable. Les affinités, collinéations qui conservent, globalement ou point par point, la droite impropre du plan sont d'un emploi fréquent, notamment les cas particuliers que sont l'homothétie et les symétries.

En géométrie affine, la congruence des angles est limitée au cas des angles de côtés respectivement parallèles. Il n'existe pas de mesure des angles. La somme de deux angles ab et cd a un sens, à condition que les deux côtés médians b et c soient parallèles. Cela conduit au théorème de la somme des angles d'un triangle, mis sous la forme non métrique suivante: cette somme est un angle plat.

La distinction des trois espèces de coniques non dégénérées est de nature affine. Un parallélogramme étant tracé, la règle permet la construction de la parallèle à une droite quelconque, issue d'un point arbitraire.

II. GÉOMÉTRIE PSEUDO-EUCLIDIENNE SYNTHÉTIQUE PLANE

Définitions

3. — Dans le plan, donnons-nous deux faisceaux distincts de droites parallèles. Par un point quelconque, il passe une droite de chacun de ces faisceaux, les *droites absolues* issues de ce point. Les deux sommets de ces faisceaux sont les *points absolus* du plan.

Une conique ayant deux droites absolues comme asymptotes est un *pseudo-cercle*. Une telle courbe passe par les deux points absolus. L'intersection des asymptotes d'un pseudo-cercle est le *centre* de cette courbe. Un *rayon* d'un pseudo-cercle est le segment limité par le centre et un point quelconque de la courbe. Par convention, les rayons d'un pseudo-cercle sont *pseudo-congruents*.

4. — Soient deux angles ab et $a'b'$. Par leurs sommets, menons les droites absolues j et k pour le premier j', k' pour le second, j et j' étant parallèles. Trois de ces droites homologues a, j et k d'une part, a', j' et k' d'autre part déterminent une projectivité entre les faisceaux précédents. Si b et b' se correspondent dans cette transformation, les angles ab et $a'b'$ sont pseudo-congruents.

Il est souvent commode d'exprimer la relation précédente par l'égalité des birapports des deux côtés et des droites absolues ou de ceux des points absolus et des points impropres des côtés des angles. La congruence affine des angles de côtés parallèles est un cas particulier de pseudo-congruence. Les pseudo-congruences des segments et des angles sont des relations d'équivalence.

Deux droites conjuguées par rapport aux droites absolues issues de leur intersection sont *pseudo-perpendiculaires.*

Symétrie absolue

5. — La réalité des points et droites absolus a pour conséquence l'existence d'une correspondance qui n'a pas son équivalent en géométrie habituelle, la *symétrie absolue.* L'axe de celle-ci est une droite absolue et la direction de symétrie est parallèle aux droites absolues non parallèles à l'axe.

Deux droites liées par une symétrie absolue sont conjuguées par rapport aux droites absolues issues de leur intersection; elles sont pseudo-perpendiculaires.

Soient deux droites a et b se coupant sur l'axe d'une symétrie absolue. Elles sont liées par une involution dont les droites absolues précédentes sont les éléments unis. Les birapports de a et b avec ces droites et de leurs correspondantes sont égaux. Autrement dit, deux angles liés par une symétrie absolue sont pseudo-congruents.

Propriétés des droites pseudo-perpendiculaires

6. — La symétrie absolue donne un premier tracé de la pseudo-perpendiculaire à une droite d, élevée au point A. La droite donnée d et la désirée sont liées par une telle symétrie dont l'axe passe par A. Voici une deuxième construction.

Par A, menons les deux droites absolues, j et k. Traçons deux transversales p et q issues d'un point M de d, distinct de A. Elles coupent j et k en P et P' d'une part, Q et Q' d'autre part. Menons les côtés PQ' et $P'Q$ du quadrangle $PQP'Q'$. Ils se coupent au troisième point diagonal N du quadrangle précédent. Les deux côtés AM et AN du triangle diagonal sont conjugués par rapport à j et k. La droite AN est pseudo-perpendiculaire à d.

L'abaissement de la perpendiculaire d'un point B sur la droite d peut être obtenu en menant par B les deux droites absolues, puis les parallèles à ces droites issues des intersections avec d. Dans le parallélogramme obtenu, les diagonales sont conjuguées par rapport aux deux points absolus, donc pseudo-perpendiculaires.

7. — Les pseudo-perpendiculaires à une droite d ont un point impropre commun, le conjugué du point impropre de d par rapport aux points absolus. Elles sont donc parallèles entre elles.

Deux droites pseudo-perpendiculaires sont séparées par les droites absolues issues de leur intersection.

Les droites absolues d'un faisceau sont les éléments unis de l'involution liant les droites pseudo-orthogonales de ce faisceau. Chacune de ces deux droites possède une unique pseudo-perpendiculaire issue d'un de ses points; c'est cette droite elle-même. Les droites parallèles à une droite absolue sont pseudo-perpendiculaire à cette dernière car le point impropre de l'une d'elles est son propre conjugué par rapport aux points absolus.

Symétrie pseudo-orthogonale

8. — Une symétrie axiale dans laquelle la droite déterminée par deux points correspondants est pseudo-perpendiculaire à l'axe est dite *pseudo-orthogonale*. Un faisceau de droites dont le sommet est un point de l'axe est soumis à une involution dont les éléments unis sont l'axe et le rayon du faisceau pseudo-perpendiculaire à l'axe. Les droites absolues du faisceau sont conjuguées par rapport à ces droites unies; elles se correspondent dans la symétrie. De ce fait, deux angles liés par une symétrie pseudo-orthogonale sont pseudo-congruents.

Pseudo-cercles

9. — Rapportons un pseudo-cercle à un système de coordonnées affines porté par deux diamètres conjugués. Les points impropres des axes sont conjugués par rapport à ceux de la conique; ces axes sont pseudo-perpendiculaires.

Toute conique est symétrique par rapport à ses diamètres; la direction de symétrie est conjuguée à l'axe. Ainsi, le pseudo-cercle précédent satisfait à une symétrie pseudo-orthogonale relativement à chacun des axes. Si x et y sont les coordonnées d'un point de la courbe, les points de coordonnées x et $-y$, $-x$ et $-y$, $-x$ et y appartiennent au pseudo-cercle. De ce fait, l'équation de celui-ci est de la forme $ax^2 - by^2 + c = 0$. Comme axe des x, choisissons celui qui coupe la courbe et appelons r l'abscisse de l'intersection. Nous avons $ar^2 + c = 0$ et

$$x^2 - \frac{by^2}{a^2} = r^2 .$$

Un choix approprié du segment unité de l'axe des y permet d'égaler à l'unité la valeur absolue du coefficient de y^2. L'équation du pseudo-cercle devient ainsi

$$x^2 - y^2 = r^2 .$$

Si un pseudo-cercle coupe l'axe des y, les signes des deux termes variables sont permutés.

10. — Les équations des asymptotes des pseudo-cercles centrés sur l'origine sont $y = \pm x$. Par l'intersection du premier des pseudo-cercles précédents avec l'axe des x, menons la parallèle à la droite absolue de coefficient angulaire -1. Son équation

est $y = -(x\text{-}r)$. Cette droite coupe l'axe des y au point d'ordonnée r. Le choix fait de l'unité de l'axe des ordonnées revient à poser que la symétrie absolue conserve les pseudo-longueurs des segments. Elle donne donc le report d'un segment sur une droite pseudo-perpendiculaire au support de ce segment.

11. — Dans la figure précédente, les deux points de coordonnées $x = r, y = 0$ et $x = 0, y = r$ appartiennent au lieu des points pseudo-équidistants de l'origine. Ce lieu est composé de deux pseudo-cercles constituant une paire d'hyperboles conjuguées; ils sont liés par une symétrie absolue. Chacun des pseudo-cercles précédents est l'*associé* de l'autre. En géométrie euclidienne, l'associé d'un cercle réel est imaginaire.

Ce qui précède montre que les points absolus appartiennent à tous les lieux de points équidistants d'un point. La pseudo-distance d'un point quelconque du plan à l'un deux est donc indéterminée.

Pseudo-longueur d'un segment

12. — Les considérations précédentes permettent de définir la pseudo-longueur d'un segment. Choisissons un segment unité porté par une droite non absolue. Traçons le pseudo-cercle centré sur une de ses extrémités et passant par l'autre, puis l'associé de ce pseudo-cercle. Pour déterminer la mesure d'un segment AB, menons un segment équipollent à AB et ayant une de ses extrémités au centre du pseudo-cercle précédent. Le rapport du segment obtenu au rayon du pseudo-cercle porté par le dernier segment est la pseudo-longueur du segment AB, relative à l'unité choisie.

Pseudo-cercle de rayon nul

13. — L'équation $x^2 - y^2 = 0$ représente un pseudo-cercle de rayon nul. Cette figure est formée des deux droites absolues issues du centre. Autrement dit, la pseudo-longueur de tout segment porté par une droite absolue est nulle. Hors des droites absolues, les seuls segments de pseudo-longueur nulle sont ceux d'extrémités confondues.

Paire de pseudo-cercles

14. — Soient deux pseudo-cercles. Menons un diamètre transverse de l'un d'eux et le diamètre du second, parallèle au précédent. Si cette dernière droite porte un diamètre transverse du second pseudo-cercle, les deux courbes sont homothétiques. Dans le cas contraire, chacun des pseudo-cercles est homothétique à l'associé de l'autre.

Report d'un segment

15. — Supposons tracé un pseudo-cercle de centre O. Proposons-nous de reporter un segment AB sur une droite d, à partir du point A'. Par O, menons les parallèles à AB et à d; sur la première, construisons le segment OB'' équipollent à AB. Les droites précédentes coupent le pseudo-cercle en C et C'. La parallèle à CC', issue de B'' coupe la parallèle à d en B''', Le segment désiré $A'B'$ et OB''' sont équipollents.

Ce qui précède suppose que les deux parallèles tracées initialement coupent le pseudo-cercle donné. Si cela n'est pas le cas, on remplace la droite considérée par celle obtenue au moyen d'une symétrie absolue et on opère comme ci-dessus. Nous avons vu plus haut (al. 10) que cette symétrie conserve les pseudo-longueurs des segments. Si deux pseudo-cercles associés sont tracés, la construction par homothétie suffit toujours.

Equation paramétrique d'un pseudo-cercle

16. — Soit a le coefficient angulaire d'un rayon d'un pseudo-cercle. Formons le birapport b de ce rayon, de l'axe des abscisses et des asymptotes. Nous avons d'où

$$b = (a0+1-1) = \frac{1-a}{1+a} \qquad a = \frac{1-b}{1+b}.$$

Posons $b = e^{-2\varphi}$. Il vient

$$a = \frac{e^{\varphi} - e^{-\varphi}}{e^{\varphi} + e^{-\varphi}}.$$

Le coefficient angulaire a est égal à y/x. Nous pouvons donc poser $y = k\,(e^{\varphi} - e^{-\varphi})$ et $x = k\,(e^{\varphi} + e^{-\varphi})$. Introduisons ces expressions dans l'équation du pseudo-cercle. Après réduction, il vient $4k^2 = 1$. Aux deux valeurs $k = \frac{1}{2}$ et $k = -\frac{1}{2}$ correspondent les deux branches du pseudo-cercle. Nous obtenons ainsi les équations paramétriques d'une branche de la courbe $x = r \operatorname{ch} \varphi$ et $y = r \operatorname{sh} \varphi$.

17. — Dans l'équation $x^2 - y^2 = r^2$, l'ordonnée y est la moitié de la corde limitée par les points d'abscisse x, donc d'ordonnées y et $-y$. La pseudo-longueur de cette corde est $2r\, sh\, \varphi$. Ainsi, la pseudo-longueur de la corde d'angle au centre est $2r\, sh\, d\alpha\, . = r\, d\alpha + (3)$, où la parenthèse représente un infiniment petit d'ordre trois. La pseudo-longueur de l'arc de pseudo-cercle compris entre l'axe des x et le point d'ordonnée y est $\int_0^{\alpha} r\, d\alpha = r\alpha$. Le paramètre α est le rapport de la pseudo-longueur de l'arc correspondant à celle du rayon du pseudo-cercle.

Pseudo-carré

18. — En les extrémités d'un segment AB porté par une droite non absolue, élevons les pseudo-perpendiculaires et, sur elles, reportons le segment donné en

AA' et BB'. Le quadrilatère $ABB'A'$ est un *pseudo-carré*. Choisissons deux côtés adjacents comme supports d'un système d'axes de coordonnées. L'équation de la diagonale issue de l'origine est $y = x$. Cette droite est absolue. Les diagonales d'un pseudo-carré sont donc portées par des droites absolues. La pseudo-longueur de ces diagonales est nulle.

Sur deux droites pseudo-orthogonales, reportons un segment à partir de leur intersection et dans les deux sens. Les quatre points obtenus ne sont pas les sommets d'un pseudo-carré. Les côtés du parallélogramme obtenu sont portés par des droites absolues; ils sont de pseudo-longueur nulle.

Généralités sur les angles

19. — En géométrie projective, la figure formée par deux droites est un angle. La notion d'angles supplémentaires est de nature affine. Les méthodes de la géométrie affine permettent d'introduire la notion habituelle d'angle, formé de deux demi-droites de même origine. Cela conduit à l'angle plat, formé de deux demi-droites opposées.

La convention de pseudo-congruence des angles donnée dans les définitions initiales s'applique à l'angle projectif. Son extension aux angles de la géométrie affine complique souvent les choses et est peu féconde. Dans la suite, sauf indication contraire, nous examinons les angles projectifs. Nous qualifierons de *singulier* tout angle dont un côté au moins est porté par une droite absolue. Un angle non singulier est *ordinaire*.

20. — Par le sommet d'un angle ordinaire, menons les deux droites absolues. L'angle est du *premier* ou du *second type* selon que ces droites absolues ne séparent pas ou séparent les côtés.

Soit un angle du premier type. Un point du plan séparé des droites absolues issues du sommet par les côtés de l'angle appartient à l'*intérieur* de ce dernier. Nous dirons que la figure constituée par cet intérieur constitue un *angle mesurable* (cet adjectif sera justifié par la suite, al. 23). Le supplément de la figure précédente (l'*extérieur* de l'angle considéré) est un angle *débordant*.

Les distinctions précédentes ne s'appliquent pas aux angles du second type. L'angle de deux droites pseudo-orthogonales est dit *pseudo-droit*; il est du second type.

21. — Soient un angle ab, les droites absolues j et k issues de son sommet, un second angle $a'b'$ et les droites absolues analogues j' et k', j' étant parallèle à j. L'égalité des birapports $(abjk)$ et $(a'b'j'k')$ exprime la *congruence directe* de ces angles. Si l'égalité porte sur les birapports $(abjk)$ et $(a'b'k'j')$, il y a *congruence inverse* entre les deux angles. La congruence inverse de ab et $a'b'$ implique la congruence directe de ab et $b'a'$.

22. — En son sommet, élevons les pseudo-perpendiculaires a' et b' aux côtés d'un angle ab. Nous substituons à a et b leurs correspondants dans une involution dont les droites absolues sont les éléments unis. Les birapports avec ces droites sont conservés. Ainsi, les angles de côtés pseudo-perpendiculaires sont pseudo-congruents.

Les angles pseudo-droits sont pseudo-congruents entre eux. Chacun des angles ab' et $a'b$ de la figure précédente sont les différences d'un angle pseudo-droit avec ab. Autrement dit, ces deux compléments de ab sont pseudo-congruents.

Un angle et ses compléments sont de types différents. Si a et b sont séparés par les droites absolues j et k, a' et b d'une part, a et b' d'autre part ne le sont pas. Ils le sont si l'angle ab est mesurable.

Report des angles

23. — Soient un angle ab, une droite a' et un point S de cette dernière. La construction de la droite b', issue de S et second côté de l'angle $a'b'$ pseudo-congruent à ab est celle de la correspondante de b dans une projectivité. Dans celle-ci, les droites absolues j et j' d'une part, k et k' d'autre part sont correspondantes. La construction suivante est applicable à tous les cas de figure. Traçons deux droites quelconques m et m'; appelons A,B,J,K les intersections de m avec a,b,j,k et A',J' et K' celles de m' avec a',j' et k'. Les intersections de AJ' et $A'J$ d'une part, de AK' et $A'K$ d'autre part déterminent l'axe perspectif p de la projectivité entre m et m'. La droite $A'B$ coupe p en Q. L'intersection de AQ avec m' appartient au rayon cherché b'.

24. — Soit un angle du premier type ab. En en conservant le sommet, reportons le en bc, puis en cd et ainsi de suite un nombre arbitraire de fois. La conservation de l'ordre dans une projectivité montre que les angles bc, cd,... ainsi que ac, ad,... sont du premier type. Le report répété d'un angle du premier type ne conduit pas le côté mobile à franchir une droite absolue issue du sommet.

Dans la figure précédente, examinons les angles mesurables ac, ad,...; ils sont le double, le triple,... de l'angle ab. L'extension à un multiple entier est immédiate.

Choisissons un angle mesurable comme angle unité. Nous pouvons le reporter dans tout angle mesurable de façon à obtenir un entier n tel qu'un angle donné soit congruent au n-uple de l'angle unité ou soit compris entre n et $n+1$ fois cet angle unité. La qualification d'un angle mesurable est ainsi justifiée.

Un angle débordant est le supplément d'un angle mesurable. Les opérations précédentes pourraient être considérées comme donnant aussi des multiples de l'angle débordant. Cette conception ne répondrait pas à l'idée habituelle d'angle. Aucun angle du second type n'est un multiple d'un angle mesurable.

25. — Examinons le report répété d'un angle du second type. Appelons j et k les droites absolues issues de son sommet. On peut choisir les notations de telle sorte que la suite $jakb$ soit ordonnée. Reportons ab en bc; la suite $jbkc$ est ordonnée. Les

droites b et c sont séparées par j et k; donc a et c ne le sont pas. Le doublement de l'angle de second type ab conduit à un angle ac du premier type. Reportons ab en cd à partir de c. La suite $jckd$ est ordonnée. Les angles cd et ad sont du second type. Ainsi, le report d'un angle du second type répété un nombre pair de fois conserve son type alors que le résultat est du premier type si le report est fait un nombre impair de fois.

Pseudo-bissection d'un angle

26. — La propriété précédente montre que le double d'un angle est un angle du premier type. Aucun angle du second type n'est le double d'un angle.

On appelle pseudo-bissectrice d'un angle (nécessairement du premier type) toute droite issue du sommet et qui fait des angles pseudo-congruents avec les deux côtés de l'angle donné. Relativement à une bissectrice, les côtés de l'angle sont liés par une symétrie pseudo-orthogonale. Traçons un pseudo-cercle centré sur le sommet de l'angle ab. Il en coupe les côtés en A et A', B et B'. Les parallèles à AB et à $A'B$ issues du centre du cercle sont les axes de deux symétries pseudo-orthogonales liant les côtés. Ces droites sont les deux bissectrices de l'angle ab. Elles sont pseudo-perpendiculaires. L'une d'elles appartient à l'intérieur de l'angle donné, l'autre à son supplément.

Angles inscrits

27. — Joignons un point variable M d'un pseudo-cercle à deux points fixes de cette courbe, A et B. Le birapport des deux droites absolues issues de M et des droites MA et MB est constant. Autrement dit, les angles inscrits AMB sont pseudo-congruents entre eux.

Supposons mesurable l'angle au centre correspondant ACB. Les deux points A et B appartiennent à la même branche du pseudo-cercle. Appelons A' et B' les opposés de A et B. Les droites AB' et $A'B$ sont parallèles. Menons leur parallèle CD issue du centre et choisie de telle sorte que ACD soit un angle mesurable. Les angles $AA'B$ et ACD sont affinement congruents, donc pseudo-congruents, ainsi que $BB'A$ et BCD. Les angles inscrits $AA'B$ et $AB'B$ sont pseudo-congruents. Ainsi, l'angle au centre ACB est le double des angles inscrits correspondants.

Ligne brisée pseudo-régulière

28. — Soient un pseudo-cercle de centre C, de rayon r et une corde AB. Dans les deux sens, reportons l'angle ACB à partir de CA et de CB. Les points obtenus sur la courbe sont les sommets d'une ligne brisée pseudo-régulière. Les cordes obtenues sont pseudo-congruentes puisque leurs pseudo-longueurs sont $2r.\ sh\,\dfrac{ACB}{2}$.

La ligne polygonale précédente ne se ferme jamais. Il n'existe donc pas de polygones pseudo-réguliers.

Complément sur la mesure des angles

29. — Soient deux angles mesurables de même sommet ab et ac, ainsi que les droites absolues j et k issues du sommet. Choisissons les notations de telle sorte que la suite $jabck$ soit ordonnée. L'angle ac est supérieur à ab; il est la somme de ab et bc.

Soient deux angles mesurables α et β. Bissectons le premier un nombre arbitraire de fois. Par reports successifs de α et des angles $\frac{\alpha}{2^m}$, il est possible de déterminer un nombre dyadique donnant le rapport de β à α avec une précision arbitraire. Ce nombre est la mesure de β au moyen de l'unité α,

Ce rapport est celui des pseudo-longueurs des arcs interceptés par les deux angles sur deux pseudo-cercles de même rayon centrés sur les sommets de ces angles. Si l'angle unité α correspond à un arc de pseudo-cercle de même pseudo-longueur que le rayon, la mesure précédente est égale au paramètre φ introduit à propos du pseudo-cercle.

Mesure laguerrienne des angles

30. — En géométrie habituelle, la mesure d'un angle ab est donné par la formule de Laguerre $ln \frac{1}{2i} (abjk)$ où ln signifie logarithme naturel et j,k sont les droites isotropes issues du sommet. La présence de l'unité imaginaire au dénominateur provient du fait que les droites isotropes sont imaginaires. Opérons de même en géométrie pseudo-euclidienne en nous limitant tout d'abord aux angles mesurables. Dans ce cas, le birapport des deux côtés et des droites absolues est positif. Le logarithme possède une détermination réelle et celle-ci s'annule si les côtés sont superposés. L'expression obtenue est précisément celle introduite plus haut au moyen du pseudo-cercle soit avec un choix convenable du coefficient, $\frac{1}{2}\, ln\, (abjk)$. Ce résultat concerne l'angle projectif, donc aussi bien l'angle mesurable considéré que l'angle débordant qu'est son supplément.

31. — Passons au cas des angles du second type. La séparation des côtés a et b par les deux droites absolues implique que le birapport est négatif. Le logarithme est complexe et le coefficient $\frac{1}{2}$ lui impose la forme $\beta + i\frac{\pi}{2}$. Si l'angle est pseudo-droit, le terme β est nul; la mesure laguerrienne de cet angle est $\frac{i\pi}{2}$ et celle d'un angle plat, $i\pi$. Ce fait laisse entendre que, du point de vue métrique, le théorème de la somme des angles du triangle présente une certaine complication en géométrie pseudo-euclidienne.

32. — Le théorème de l'angle inscrit peut être démontré au moyen de la mesure laguerrienne des angles. Soient J et K deux points d'une conique, C le pôle de JK, A

et A', B et B' deux paires de points alignés sur C, A_1 et B_1 les intersections de JK avec AC et BC. Puisque C est le pôle de JK, les droites AB' et $A'B$ se coupent en un point Q de JK. Les birapports égaux $A(A'B'JK)$ et $B(A'B'JK)$ sont respectivement égaux à (A_1QJK) et (QB_1JK). En vertu de la propriété associative du birapport, leur produit est égal à (A_1B_1JK). Ce dernier birapport est donc le carré de (A_1QJK).

Supposons que la conique est un pseudo-cercle de centre C. La mesure laguerrienne de l'angle au centre $A_1\ CB_1$ est le double de celle des angles inscrits $A'AB'$ ou $A'BB'$.

Théorème de Pythagore

33. — Un triangle dont deux côtés sont pseudo-perpendiculaires est *pseudo-rectangle*. De tels triangles apparaissent dans la figure constituée par un pseudo-cercle rapporté à un système d'axes pseudo-orthogonaux. Les supports de l'abscisse et de l'ordonnée sont les cathètes du triangle alors que le rayon de la courbe est l'hypoténuse. L'équation du pseudo-cercle montre que le carré de la pseudo-longueur de l'hypoténuse est égal à la différence des carrés de celles des deux cathètes.

Dans un triangle pseudo-rectangle, des deux côtés de l'angle pseudo-droit, un appartient à l'intérieur de l'angle opposé; l'autre côté est coupé par une des droites absolues issues du sommet du troisième angle. Appelons ces côtés la petite et la grande cathète. L'énoncé du théorème devient le suivant: le carré de la pseudo-longueur de la grande cathète est égal à la somme des carrés de celles de l'hypoténuse et de la petite cathète.

34. — Le théorème de Pythagore a de nombreuses applications. Soient un pseudo-cercle de centre C, un rayon CT et la tangente en T. Celle-ci coupe un rayon quelconque en B. Le triangle BTC est pseudo-rectangle en T. Son hypoténuse est BC. La parallèle à une asymptote issue de B coupe le rayon CT. Celui-ci est donc la grande cathète. Le théorème donne $BC^2 + BT^2 = CT^2$.

35. — Soient une droite d, un point A, les droites absolues j et k issues de A, leurs intersections J et K avec d et un point variable M de d. Abaissons la pseudo-perpendiculaire AD à d. Si M appartient au segment JK, AD est la grande cathète du triangle pseudo-rectangle ADM. Nous avons donc $AM^2 = AD^2 - DM^2$. La pseudo-distance de A à d présente un maximum sur la pseudo-perpendiculaire AD.

Si M est confondu avec J ou K, la pseudo-distance AM est nulle. Enfin si M est extérieur du segment JK, DM est la grande cathète du triangle. Il vient $AM^2 = DM^2 - AD^2$. La pseudo-distance AM croît indéfiniment avec DM.

36. — Soit à construire la racine carrée de la différence des carrés de deux segments a et b. Reportons ces segments sur deux droites pseudo-orthogonales, à partir de leur intersection. L'hypoténuse donne la racine de la différence des carrés. La

construction précédente n'exige pas le tracé préalable d'un cercle. Au contraire, pour obtenir la racine de la somme de deux carrés, supposons tracé un pseudo-cercle de rayon r et soient a et b les deux segments donnés. Soit $x^2 = r^2 + y^2$ l'équation du cercle. Faisons $y = \frac{r\,b}{a}$. L'abscisse d'un point de la courbe d'ordonnée y est donnée par $x^2 = r^2\left(1 + \frac{b^2}{a^2}\right) = \frac{a^2 + b^2}{a^2} \cdot r^2$.

Finalement, il vient $\sqrt{a^2 + b^2} = \frac{ax}{r}$.

Projection pseudo-orthogonale d'un segment

37. — Soient un segment AB, la pseudo-perpendiculaire BC élevée en B à la droite AB et un point M, variable sur BC. Le segment AB est la projection pseudo-orthogonale de AM sur la droite AB. Supposons que l'angle MAB est mesurable. Nous avons $AB = AM.\ ch\ MAB$. La pseudo-longueur du segment projeté est moindre que celle de la projection. Si AM est une droite absolue, la pseudo-longueur du segment projeté est nulle. L'angle MAB et son cosinus hyperbolique sont infinis. Supposons enfin que l'angle MAB est débordant. L'angle MAB est du second type. Son complément AMB est mesurable et nous avons $AB = AM\ sh\ AMB$.

Sur la même figure examinons encore la pseudo-longueur de la projetante MB. Dans le cas de MAB mesurable, nous avons $BM = AM\ sh\ MAB = AB\ th\ MAB$. Si MAB est du second type, il vient $BM = AM\ ch\ AMB = \frac{AB}{th\ AMB}$.

Généralités sur les triangles

38. — Un triangle dont aucun côté n'est porté par une droite absolue est *ordinaire*; sinon, il est *singulier*. Un côté au moins, deux au plus, d'un triangle singulier est de pseudo-longueur nulle. Cela n'est pas le cas pour le troisième côté. Dans un triangle singulier à un côté de pseudo-longueur nulle, l'inégalité du triangle est en défaut: le côté le plus long est plus long que la somme des deux autres.

La propriété précédente subsiste dans un triangle qui s'écarte suffisamment peu d'un triangle singulier. Ainsi, l'inégalité du triangle n'est pas toujours satisfaite.

Dans la suite, sauf indication contraire, nous excluons les triangles singuliers.

39. — Soit un triangle ordinaire ABC. Par chacun des sommets, menons la parallèle à une droite absolue. De ces trois droites, une est entre les deux autres. Faisons la même construction avec les secondes droites absolues. Deux cas se présentent. Le sommet situé entre deux droites absolues n'est pas le même dans les deux figures ou

il est le même. Si les deux droites absolues intérieures passent par deux sommets différents, nous dirons que le triangle est de première espèce. Il est de seconde espèce si les deux droites absolues internes passent par le même sommet.

Dans un triangle de première espèce ABC, il existe un sommet A tel que les deux droites absolues issues de lui ne coupent pas le côté opposé BC. L'angle BAC est mesurable. En B et en C, il passe une droite absolue qui coupe le côté opposé, AC pour B et AB pour C. Les angles ABC et ACB sont du deuxième type. Les triangles rectangles sont de première espèce.

Supposons maintenant que le triangle DEF est de deuxième espèce. Les deux droites absolues issues du sommet D coupent le côté EF. L'angle EDF est débordant alors que les deux angles DEF et DFE sont mesurables.

De ce qui précède, il résulte l'inexistence de triangles aux trois angles mesurables.

Somme des angles d'un triangle

40. — Le théorème de la somme des angles d'un triangle, rappelé à propos de la géométrie affine exprime le résultat d'une certaine construction. Il ne porte pas sur les mesures des angles considérés. Il est cependant possible de lui donner une forme qui fait appel à des mesures, celles des angles du triangle qui sont mesurables, ou à d'autres angles mesurables, liés à ceux du triangle considéré.

Soit un triangle de première espèce ABC, d'angle mesurable A. Traçon la hauteur issue de A. Si le pied de cette droite appartient au côté BC, la hauteur divise l'angle A en deux angles respectivement congruents, du point de vue affin aux compléments des angles B et C. Ainsi, dans un triangle de première espèce, la mesure de l'angle mesurable est égale à la somme de celles des compléments des deux autres angles. Le théorème s'étend au cas où le pied de la hauteur est extérieur au côté BC car alors, un des compléments est négatif.

Supposons le triangle de seconde espèce et soit A son angle débordant. Prolongeons le côté BA du côté de A et, par A, menons la parallèle à BC. Le supplément de l'angle A est mesurable. La parallèle précédente le divise en deux angles, respectivement congruents à B et C. Ainsi, dans un triangle de seconde espèce, la mesure du supplément de l'angle débordant est égale à la somme des mesures des deux angles mesurables.

Triangles pseudo-isocèles

41. — Un triangle transformé en lui-même par une symétrie pseudo-orthogonale est *pseudo-isocèle*. Un côté d'un tel triangle, la *base* est pseudo-orthogonal à l'axe de symétrie. Cette transformation conserve les angles et les pseudo-longueurs. Ainsi, les côtés distincts de la base, les *jambes* du triangle sont pseudo-congruents. Il en est de même des angles adjacents à la base. Les deux angles à la base sont de même nature. S'ils sont du second type, le troisième angle est du premier; les deux extrémités

de la base appartiennent à la même branche d'un pseudo-cercle centré sur le troisième sommet; le triangle est de première espèce. Si un des angles à la base est mesurable, il en est de même du second et le troisième angle est débordant; le triangle est de seconde espèce et les extrémités de la base appartiennent aux deux branches d'un pseudo-cercle centré sur le dernier sommet.

Remarquons que la condition de pseudo-congruence des deux jambes ne suffit pas pour définir ce type de figures. Un rayon d'un pseudo-cercle et un du conjugué sont équidistants du centre; il n'existe pas de symétrie pseudo-orthogonale permettant de passer de l'un à l'autre.

Triangle pseudo-équilatéral

42. — Soit un pseudo-cercle d'équation $x^2 - y^2 = r^2$. Sur une branche, marquons les points A et B d'ordonnée $\frac{\pm r}{2}$. La corde AB et les deux rayons relatifs à A et à B constituent un triangle pseudo-équilatéral. Il est de première espèce. Ce triangle n'est pas équiangle car il est de première espèce. La pseudo- longueur de la hauteur d'un tel triangle est donnée par le théorème de Pythagore. Elle est supérieure au côté dans le rapport $\frac{\sqrt{5}}{2}$.

Il n'existe pas de triangle pseudo-équilatéral de seconde espèce.

Relations dans les triangles pseudo-rectangles

43. — Soit un triangle rectangle en A, de petite cathète AB et de grande cathète AC. De A, abaissons la pseudo-perpendiculaire sur le support de l'hypoténuse BC. Le pied D de cette hauteur est un point extérieur au segment BC. L'angle C est le seul angle mesurable du triangle. Par pseudo-perpendicularité des côtés, il est pseudo-congruent à BAD. Nous avons donc $CD = AC\ ch\ C, AC = AB\ ch\ C$, d'une part et $BD = AB\ sh\ C$, $AB = BC\ sh\ C$. Cela conduit aux deux proportions

$$\frac{CD}{AC} = \frac{AC}{AB} \qquad \text{et} \qquad \frac{BD}{AB} = \frac{AB}{BC}.$$

Ainsi, la pseudo-longueur de chaque cathète est moyenne géométrique entre celles de l'hypoténuse et de la projection pseudo-orthogonale de cette cathète sur l'hypoténuse. Nous avons encore $BD = AD.\ th\ C$ et $AD = CD.\ th\ C$ ou

$$\frac{BD}{AD} = \frac{AD}{CD}.$$

La pseudo-hauteur d'un triangle pseudo-rectangle est moyenne géométrique des projections pseudo-orthogonales des cathètes sur l'hypoténuse.

Trigonométrie du triangle

44. — Soient un triangle de première espèce ABC, d'angle mesurable A et sa pseudo-hauteur AD. Les compléments des angles du second type B et C sont respectivement pseudo-congruents à BAD et à CAD. Nous avons donc

$$AD = AB.\, ch\, BAD = AC.\, ch\, CAD.$$

La pseudo-hauteur CE conduit de même à

$$CE = AC.\, sh\, A = BC.\, ch\, BCE.$$

Appelons β et γ les compléments des angles non mesurables B et C. Les deux relations précédentes conduisent à l'analogue du théorème du sinus de la géométrie pseudo-euclidienne:

$$\frac{BC}{sh\, A} = \frac{CA}{ch\, \beta} = \frac{AB}{ch\, \gamma}.$$

Au lieu des sinus hyperboliques des angles non mesurables, nombres qui sont complexes, il apparait les cosinus hyperboliques des angles des compléments de ces angles.

45. — Sur la même figure, nous avons

$$AE^2 = AC^2 + CE^2 \quad \text{et} \quad BC^2 = CE^2 - BE^2 = CE^2 - (AB - AE)^2.$$

L'élimination de AE^2 conduit au théorème du cosinus:

$$BC^2 = 2\, AB\, .\, AC\, .\, ch\, A - AB^2 - AC^2.$$

Un calcul analogue donne AC^2.

Calculons le côté opposé à l'angle mesurable A. Il vient

$$AC^2 = AB^2 - 2AB.\, BC.\, sh\, \gamma - BC^2$$

Cette formule exprime le théorème du cosinus relatif à un des côtés de l'angle mesurable. L'angle opposé, non mesurable, y apparaît par l'intermédiaire du sinus hyperbolique de son complément.

Les triangles de première espèce satisfont donc à deux théorèmes analogues à ceux du sinus et du cosinus de la géométrie classique.

46. — Soit un triangle de seconde espèce ABC, d'angle débordant A. Appelons α le supplément de A. Les hauteurs AD et CE conduisent à la relation suivante, comparable à celle des sinus: $\dfrac{AB}{sh\, C} = \dfrac{AC}{sh\, B} = \dfrac{BC}{sh\, \alpha}$.

Par des opérations analogues à celles relatives au cas précédent, on obtient le théorème du cosinus. Il a deux expressions, une relative au côté opposé à l'angle débordant et l'autre pour les côtés de cet angle. Elles sont

$$BC^2 = AB^2 + AC^2 + 2\,AB\,.\,AC\,.\,ch\,\alpha$$

et

$$AB^2 = AC^2 - BC^2 + 2\,BC\,.\,AC\,.\,ch\,C\,.$$

Sous des réserves analogues à celles faites plus haut et en introduisant le supplément de l'angle débordant, les deux théorèmes des sinus et des cosinus s'étendent aux triangles de la géométrie pseudo-euclidienne.

Quelques propriétés des coniques

47. — La notion de centre d'une conique est de caractère affin. Dans le cas des ellipses et des hyperboles, les droites par le centre sont liées par deux involutions, celle des diamètres conjugués et celle des droites pseudo-orthogonales. Ces deux correspondances possèdent une paire d'éléments qui se correspondent dans chacune d'elles. Ainsi, toute conique à centre possède une paire de diamètres conjugués pseudo-orthogonaux, les *pseudo-axes* de la courbe.

48. — Il n'existe qu'un type d'ellipses. Par contre, les hyperboles présentent plus de variété:

a) L'angle des asymptotes est mesurable;

b) Cet angle est débordant;

c) Il est du second type;

d) Une asymptote est absolue;

e) Les deux asymptotes des pseudo-cercles sont absolues.

Les droites absolues issues du centre ne coupent pas les courbes du type *a*; elles coupent celles classées sous *b*; une d'elles coupe celles du type *c*. Le cas *d* présente deux variétés; la seconde des droites précédentes coupe ou ne coupe pas la courbe.

Il existe deux espèces de paraboles selon que leur point impropre est quelconque ou absolu.

49. — Examinons quelques propriétés focales des coniques. Un point tel que les deux droites absolues issues de lui sont tangentes à une courbe est un pseudo-foyer de cette dernière.

Une ellipse possède quatre pseudo-foyers réels, sommets propres du quadrilatère circonscrit à la courbe et dont les points absolus sont deux sommets. Il en est de même pour une hyperbole si les asymptotes forment un angle du premier type dont les côtés

ne coupent pas la courbe. S'il y a intersection, la courbe ne possède aucune tangente absolue réelle; elle n'a aucun pseudo-foyer. Si l'angle des asymptotes est du second type, il existe deux tangentes absolues réelles parallèles aux droites absolues ne coupant pas la courbe; celle-ci n'a aucun pseudo-foyer réel. Si une unique asymptote d'une hyperbole est une droite absolue, la courbe a deux pseudo-foyers portés par cette droite; ils sont réels si la courbe ne coupe pas la seconde droite absolue issue du centre.

Une parabole ne possède que deux tangentes absolues distinctes de la droite impropre, donc un seul pseudo-foyer. Si le point impropre de la courbe est absolu, il n'y a qu'un foyer, le second point absolu.

50. — Cherchons le lieu des points M tels que le rapport des pseudo-distances à un point F et à une droite d soit une constante e. Choisissons F comme origine d'un système de coordonnées pseudo-orthogonales dont l'axe des x est la pseudo-perpendiculaire abaissée de F sur d. Si a est l'abscisse de d, l'équation du lieu est

$$x^2 - y^2 = e^2 (x-a)^2$$

Le lieu est une conique. Une droite absolue issue de F coupe d en un point dont la pseudo-distance à F est nulle; cette intersection appartient à la conique. La droite absolue ne peut couper la courbe ailleurs car ce serait en un point à pseudo-distance nulle à F mais à pseudo-distance non nulle à d. Les tangentes au lieu, issues de F sont donc des droites absolues. Le point F est un pseudo-foyer de la conique et la directrice d est sa polaire.

La propriété précédente ne peut pas être prise comme définition générale des coniques car il existe de ces courbes qui ne possèdent pas de foyer.

Pseudo-similitude

51. — Une affinité plane où la paire de points absolus est conservée est une pseudo-similitude. Si les deux points absolus sont les deux points unis impropres de la transformation, la pseudo-similitude est directe. Si les deux points absolus se correspondent l'un à l'autre, la pseudo-similitude est inverse. La symétrie pseudo-orthogonale est une pseudo-similitude inverse. Toute pseudo-similitude inverse peut être obtenue en composant une pseudo-similitude directe et une des symétries précédentes.

Une affinité plane possède au moins trois points unis. Si tous les points unis sont impropres, la correspondance est une translation. Si le troisième point uni est propre, la transformation peut être une homothétie. La droite impropre est unie point par point. Ces deux cas sont de caractère affin. Excluons-les.

Le point uni propre d'une pseudo-similitude directe est le *centre* de la correspondance. Les droites absolues issues de ce point sont unies. Dans le faisceau de droites

porté par le centre, le birapport de deux droites correspondantes avec les droites unies est constant. Soient deux paires de droites correspondantes de ce faisceau a, a' et b, b'. La transformation conserve les birapports; les angles aa' et bb' sont donc pseudo-congruents. Comme l'affinité conserve la parallélisme des droites, la propriété s'étend à tous les angles. L'affinité conserve le rapport des segments de supports parallèles. La pseudo-congruence des angles correspondants permet d'étendre cette propriété à toute paire de segments correspondants.

Une pseudo-similitude directe est déterminée par la donnée d'un segment et de son correspondant. En effet, une collinéation plane est déterminée par quatre paires de points correspondants; ici ce sont les deux points absolus et les extrémités homologues des segments donnés.

Pseudo-rotation

52. — Une pseudo-similitude dans laquelle un point propre d'un pseudo-cercle centré sur le centre de la transformation a comme correspondant un point de ce pseudo-cercle est une *pseudo-rotation.*

Lors d'une pseudo-rotation, les cercles centrés sur le centre de la correspondance sont globalement conservés et deux segments correspondants sont pseudo-congruents. Il en est de même des angles correspondants. L'angle de deux droites correspondantes est mesurable et indépendant de la droite choisie.

Prenons un système d'axes pseudo-orthogonaux ayant comme origine le centre de la transformation. Les équations de la pseudo-rotation sont linéaires et homogènes. Posons donc

$$x = ax' + by' \quad \text{et} \quad y = cx' + dy' .$$

La conservation des droites absolues, $y = \pm x$ impose

$$cx' + dy' = \pm (ax' + by') .$$

Nous avons donc

$$a = d \text{ et } b = c.$$

La conservation du pseudo-cercle d'équation $x^2 - y^2 = r^2$ donne

$$(a^2 - b^2)\ (x'^2 - y'^2) = r^2 \qquad a^2 - b^2 = 1 .$$

Nous pouvons poser $a = ch\ \varphi$, $b = sh\ \varphi$. L'examen de la transformée de l'axe des x montre que φ est la pseudo-mesure de l'angle de la rotation.

53. — Une paire de symétries pseudo-orthogonales dont les axes forment un angle mesurable constitue une pseudo-rotation, d'angle double de celui des axes. Toute pseudo-rotation peut être considérée comme une telle paire de symétries.

54. — Depuis Helmholtz, on appelle axiome de *monodromie* la proposition suivante: il existe un mouvement des figures, distinct de l'identité, qui ramène une figure dans sa position initiale; lors de ce mouvement, un point quelconque de la figure mobile décrit une courbe fermée. Cette propriété est en défaut en géométrie pseudo-euclidienne.

III. GÉOMÉTRIE BIPARABOLIQUE PLANE

55. — Dans un plan enrichi d'un système pseudo-euclidien, supposons confondus les deux points absolus. La géométrie de ce plan est dite *biparabolique*. Le plan porte un unique faisceau de droites absolues et tout faisceau possède une droite absolue, comme chaque droite porte un point privilégié, son point impropre.

Une construction fondamentale de la géométrie affine est le report d'un segment sur son support. Rappelons-en l'essentiel. Soient AB le segment donné et A' l'extrémité correspondant à A du segment désiré. Traçons une droite c parallèle à AB et, à partir d'un point D, projetons AB sur c en EF. Par D, menons la parallèle g à AB. La droite $A'E$ coupe g en H. La projection de F sur AB, à partir de H est l'extrémité B' du segment demandé. La construction repose sur l'existence du point privilégié de la droite AB qu'est son point impropre.

56. — L'existence du rayon absolu d'un faisceau conduit à la définition d'un *pseudo-report des angles* établi au moyen de la construction corrélative de la précédente. Soient un angle ab, la droite a', concourante avec a et b, côté correspondant à a dans l'angle désiré et la droite absolue issue du sommet. Traçons une sécante d qui coupe a et b hors du sommet. Par les droites e et f, joignons les intersections précédentes à un point arbitraire C de la droite absolue issue du sommet. Tirons encore la droite h unissant l'intersection de d avec la droite absolue à celle de e et a'. Cette droite coupe h en un point du second côté b' de l'angle demandé.

Ce dernier angle est celui obtenu par pseudo-report de ab, relatif à la direction choisie des droites absolues. Par analogie avec ce qui se passe pour les segments, les angles ab et $a'b'$ sont considérés comme *pseudo-congruents*.

57. — Les reports précédents conduisent à la construction d'*échelles uniformes*, rectilignes ou angulaires. Les premières sont obtenues comme suit. Soient a le support de l'échelle, 0 et 1 les extrémités du segment unité, b et c deux parallèles à a. D'un point quelconque D de c, projetons 0 et 1 sur b en $0'$ et $1'$. Menons la droite $01'$; elle coupe c en F. Les points F en $1'$ déterminent la droite g; celle-ci coupe b en $2'$. La projection de $2'$ sur a à partir de D sur a est le point 2 de l'échelle uniforme. La droite $2F$ détermine le point $3'$ sur b et $D3'$ donne 3 et ainsi de suite. La projection de $0'$ à partir de F donne -1. L'itération de ces constructions donne l'échelle uniforme demandée.

Corrélativement, soient trois points A,B,C d'une droite absolue et l'angle unité de côtés 0 et 1, de sommet A. Coupons la figure par une droite d, issue de C. Joignons à B les intersections avec 0 et 1 au moyen des droites $0'$ et $1'$. L'intersection de 0 et $1'$ détermine la droite f issue de C; celle-ci coupe 1 en un point qui appartient au rayon $2'$, issu de B. L'intersection de ce rayon avec f détermine le rayon 2 du faisceau de sommet A. De même, l'intersection de f et 2 appartient au rayon $3'$ issu de B et celui-ci coupe d sur le rayon $3'$ issu de B et ce dernier coupe d sur le rayon 3 du faisceau de sommet A. Nous obtenons ainsi une échelle angulaire pseudo-uniforme, relativement à la droite absolue AB.

La construction précédente est projective; elle conserve l'ordre. Ainsi, aucun rayon de l'échelle, quel que soit son numéro, ne peut atteindre la droite absolue AB. L'angle d'une droite avec une droite absolue est infini.

Dans la dernière figure, supposons C impropre. Les droites AB,d et h sont parallèles, la figure ne diffère de celle relative à la construction d'une échelle uniforme ponctuelle que par les notations. Autrement dit, la projection d'une échelle linéaire uniforme portée par une droite absolue conduit à une échelle angulaire pseudo-uniforme, relativement à la droite absolue issue du sommet du faisceau. Réciproquement et corrélativement, la section d'une échelle angulaire pseudo-uniforme par une droite absolue est une échelle linéaire uniforme.

58. — Les échelles linéaires uniformes sont de nature affine, comme celles de la géométrie euclidienne. Au contraire, aucune échelle angulaire pseudo-uniforme de la géométrie biparabolique n'est uniforme du point de vue euclidien.

Pseudo-perpendicularité

59. — L'extension au cas biparabolique de la pseudo-perpendicularité conduit à la conclusion suivante: la pseudo-perpendiculaire à une droite, issue d'un point A est la droite absolue issue de A. Ainsi, toute droite absolue est pseudo-perpendiculaire à toutes les droites propres du plan. L'angle d'une droite avec une de ses pseudo-perpendiculaires est celui avec une droite absolue; il est infini.

Comme en d'autres domaines, la pseudo-distance d'un point à une droite est celle du segment porté par une pseudo-perpendiculaire abaissée du point sur la droite; cette dernière est une droite absolue, donc de pseudo-longueur nulle. Autrement dit, la pseudo-distance d'un point à une droite est nulle.

Pseudo-cercles

60. — Un pseudo-cercle de la géométrie biparabolique est une conique dont les points impropres sont absolus. Cette condition peut être réalisée de deux façons; la conique est dégénérée en deux droites absolues ou elle est une parabole à point

impropre absolu. Examinons les premières. Soient C le centre du pseudo-cercle et A un de ses points; la courbe passe par A et par son symétrique par rapport au centre. Elle est constituée par les deux droites absolues passant par ces deux points. Ce pseudo-cercle possède une infinité de centres portés par la médiatrice des deux droites précédentes. Cet axe est une droite absolue. La donnée du centre et d'un point d'un pseudo-cercle ou de deux points non alignés sur le point absolu déterminent la courbe. Par convention les rayons d'un pseudo-cercle sont pseudo-congruents.

61. — Le pseudo-cercle précédent donne le report d'un segment avec conservation d'une extrémité; la seconde extrémité du segment à construire appartient à la droite absolue issue de celle du segment donné. Le point absolu appartient au lieu des points satisfaisant à la question. Comme cela est valable pour toutes les pseudo-longueurs, la pseudo-distance d'un point propre au point absolu est indéterminée.

62. — Deux pseudo-cercles ne se coupent généralement pas; s'ils sont distincts et s'ils ont un point commun, une droite absolue appartient aux deux pseudo-cercles considérés. La notion d'angle de deux pseudo-cercles est vide de sens.

63. — Il existe un type de conique non dégénérée de point impropre absolu, les paraboles passant par ce point. Aucune parabole ne possède de centre de symétrie; ces coniques diffèrent trop des cercles pour qu'on puisse leur attribuer un rôle analogue à celui des cercles. Le centre d'une telle courbe est son point impropre, donc le point absolu, point à une pseudo-distance indéterminée de tout point propre.

Ces courbes ont cependant une ressemblance avec les cercles; elles sont déterminées par trois points propres.

Triangles

64. — Dans un triangle ordinaire (dont aucun côté n'est porté par une droite absolue), il existe un côté et un seul qui est coupé par la droite absolue issue du sommet opposé. Les trois sommets déterminent trois droites absolues distinctes. Un triangle ordinaire n'est donc pas inscriptible dans un pseudo-cercle.

Les deux droites absolues issues de deux sommets du triangle ne coupant pas les côtés opposés constituent un pseudo-cercle. Si le troisième sommet appartient à la médiatrice de ces droites, le triangle est pseudo-isocèle. Ses jambes sont deux rayons d'un pseudo-cercle; les angles à la base sont pseudo-congruents.

65. — Une cathète d'un triangle pseudo-rectangle est une droite absolue; le triangle est singulier. La seconde cathète est pseudo-congruente à l'hypoténuse. Celle-ci est pseudo-perpendiculaire à la cathète portée par la droite absolue. Un triangle singulier est pseudo-isocèle et bi-rectangle. Le théorème de Pythagore se réduit à l'affirmation de l'isocélie de ce type de triangles.

Il n'existe pas de triangle pseudo-équilatéral ni de triangle pseudo-isocèle simplement rectangle.

Pseudo-similitude et pseudo-rotation

66. — La pseudo-similitude est une affinité qui conserve leur caractère aux droites absolues et dans laquelle les angles correspondants sont pseudo-congruents. Cette correspondance possède un point propre uni. Prenons-le comme origine d'un système pseudo-orthogonal de coordonnées. Un des axes est quelconque; l'autre est une droite absolue. Appelons x la coordonnée portée par ce dernier axe; elle n'est pas une pseudo-longueur, mais une coordonnée de type affin. Les droites absolues sont parallèles à l'axe des x. Leur équation est de la forme $y =$ constante. La conservation de leur caractère a une conséquence sur les équations de la transformation. Celle relative à y est de la forme $y = a\,y'$, ou a est une constante.

Soit $x = bx' + cy'$ la relation entre les abscisses de deux points correspondants. La pseudo-congruence de deux angles homologues a pour conséquence que les différences des abscisses des intersections de deux droites correspondantes, issues de l'origine avec une droite absolue fixe est constante, proportionnelle à l'ordonnée de cette droite. Soient $y = mx$ et $y' = m'x'$ les équations de ces deux droites et r l'ordonnée de la droite absolue considérée, kr la différence précédente, x_1 et x_2 les abscisses des intersections. Nous avons

$$x_1 = \frac{r}{m}\,;\; x_2 = x_1 + kr = r\left(k + \frac{1}{m}\right) = \frac{r}{m}\,.$$

Donc

$$\frac{1}{m'} = \frac{1}{m} + k\,.$$

L'équation de la transformée est

$$ay' = m\,(bx' + cy') \text{ ou } y'\,(a - mc) = mbx'.$$

L'inverse du coefficient angulaire est

$$\frac{a - mc}{mb} = \frac{1}{m'} = \frac{1}{m} + k\,.$$

La comparaison des coefficients donne

$$\frac{a}{mb} = \frac{1}{m} \qquad \text{et} \qquad -\frac{c}{b} = k\,.$$

Cela impose $a = b$ et $c = -\,ak$. Les équations de la pseudo-similitude sont donc $x = ax' - cy'$ et $y = ay'$. Le coefficient k est donné par $k = -\dfrac{c}{a}$.

67. — Examinons le cas particulier où $a = 1$. Les droites absolues sont toutes conservées; autrement dit les pseudo-cercles centrés sur l'origine le sont. La transformation est une *pseudo-rotation*. Elle est caractérisée par le coefficient k.

La correspondance $a = ay'$, $x = ax'$ est une homothétie. En géométrie biparabolique, la pseudo-similitude résulte de la composition d'une homothétie et d'une rotation.

IV. GÉOMÉTRIE PSEUDO-EUCLIDIENNE SYNTHÉTIQUE DE L'ESPACE

Conventions fondamentales

68. — Soit un cône quadratique. Par un point quelconque, menons les parallèles aux génératrices de ce cône. Nous obtenons un nouveau cône, ayant le point choisi comme sommet. Ces deux cônes ont une directrice commune dans le plan impropre. Faisons jouer à cette courbe un rôle analogue à celui des points absolus du plan pseudo-euclidien. Nous obtenons ainsi une géométrie pseudo-euclidienne de l'espace. Les relations de polarité relatives à cette conique conduisent à des droites ou des plans pseudo-perpendiculaires. Les quadriques qui passent par elle seront qualifiées de *pseudo-sphériques* (et non de pseudo-sphères de façon à éviter toute confusion avec les surfaces à courbure interne constante négative). Les courbes et surfaces contenant cette conique seront considérées comme pseudo-circulaires.

Pour alléger le langage, nous dirons que la conique considérée ci-dessus est *absolue*.

69. — Dans chaque plan, nous établirons une géométrie pseudo-euclidienne basée sur les intersections avec la conique absolue. Un caractère important de la géométrie pseudo-euclidienne de l'espace est le suivant; les propriétés des plans varient avec le caractère de leurs relations avec la conique absolue. Un plan qui la coupe en deux points réels possède une géométrie pseudo-euclidienne; s'il y a tangence, la géométrie est biparabolique. Enfin un plan qui ne coupe pas la conique absolue en des points réels porte une géométrie du type euclidien où le rôle des points cycliques est assuré par les deux intersections imaginaires conjuguées avec la conique absolue. L'étude de la géométrie pseudo-euclidienne de l'espace exige donc l'examen de nombreux cas particuliers.

Digression sur les constructions fondamentales planes en géométrie de structure euclidienne

70. — Dans un plan, admettons que le rôle habituel des points cycliques est rempli par une paire de points imaginaires conjugués distincts des points cycliques.

Les pseudo-cercles sont des ellipses d'asymptotes parallèles entre elles; elles sont donc liées entre elles par des homothéties. Les points d'un pseudo-cercle sont pseudo-équidistants du centre de cette courbe. Deux droites de directions conjuguées par rapport à un pseudo-cercle sont pseudo-orthogonales.

Il y a pseudo-perpendicularité entre les côtés d'un angle inscrit à un pseudo-cercle si les intersections libres avec cette courbe sont les extrémités d'un diamètre. La pseudo-rotation d'un segment autour d'une de ses extrémités est obtenue au moyen d'un pseudo-cercle. Le report des cathètes d'un triangle pseudo-rectangle conduit au report d'un angle quelconque. Tous les angles sont mesurables et le choix de l'angle unité est arbitraire.

Comme axes d'un système de coordonnées, prenons deux diamètres conjugués d'un pseudo-cercle de rayon unité. L'équation d'un pseudo-cercle centré sur le précédent est $x^2 + y^2 = r^2$. Cette relation est aussi l'équation d'un cercle, rapporté à des coordonnées orthogonales et ayant comme diamètre un des diamètres du pseudo-cercle précédent. Ces deux courbes sont liées par une affinité perspective ayant le support du diamètre commun comme axe. Dans cette correspondance, les points absolus deviennent les points cycliques du plan. Toute construction effectuée sur une des figures est liée par l'affinité à l'opération correspondante, effectuée sur l'autre. La géométrie de structure euclidienne n'apporte donc aucune idée essentiellement nouvelle. Convenablement énoncées, les propriétés habituelles lui sont applicables.

Pseudo-perpendicularité

71. — Un plan et une droite, deux droites ou deux plans dont les éléments impropres sont conjugués par rapport à la conique absolue sont *pseudo-perpendiculaires*. En général, un plan et une droite pseudo-perpendiculaires ne sont pas incidents. Les plans tangents à la conique absolue font exception; un d'eux est pseudo-perpendiculaire aux droites de la gerbe de droites ayant le point de contact comme sommet. Dans cette gerbe, le plan considéré coupe un faisceau, celui de ses droites absolues. Cette exception mise à part, les propriétés de la pseudo-perpendicularité sont analogues à celles de l'orthogonalité euclidienne.

Deux droites gauches possèdent une unique transversale pseudo-perpendiculaire à chacune d'elles. En effet, les points impropres des droites données déterminent une droite impropre. Le pôle de cette dernière par rapport à la conique absolue est le sommet d'une gerbe de droites parallèles. Chacune des droites données détermine un faisceau de cette gerbe et l'intersection ce ces derniers est la perpendiculaire commune.

Quadriques pseudo-sphériques

72. — Construisons un système de coordonnées pseudo-orthogonales. Par un choix approprié de l'origine et des segments unités portés par ces axes, nous pouvons

donner à l'équation d'une quadrique pseudo-sphérique centrée sur l'origine une des deux formes

$$x^2 + y^2 - z^2 = r^2 \quad \text{ou} \quad -x^2 - y^2 + z^2 = r^2 .$$

Les premières de ces surfaces sont des hyperboloïdes à une nappe et les secondes des hyperboloïdes à deux nappes. Ces surfaces ont même cône asymptote, celui d'équation $x^2 + y^2 - z^2 = 0$.

Coupons la figure par un plan passant par l'axe des z, celui d'équation $y = 0$ par exemple. Ce plan porte une géométrie pseudo-euclidienne. Le lieu des points pseudo-équidistants de l'origine y est composé de la paire d'hyperboles conjuguées d'équations $x^2 - z^2 = \pm r^2$. L'extension à l'espace des conventions faites dans le plan conduit à admettre que dans l'espace, le lieu des points situés à la pseudo-distance r de l'origine est formé des deux hyperboloïdes conjugués d'équations $x^2 + y^2 - z^2 = \pm r^2$.

Report des angles

74. — Le report d'un angle exige tout d'abord la donnée du plan qui porte l'angle à construire. Nous allons voir que le report exige que ce plan et celui de l'angle donné portent des géométries de même type, pseudo-euclidienne ou de structure euclidienne. Supposons tout d'abord que l'angle donné appartient à un plan de ce dernier type. Ses droites absolues apparaissent par paires imaginaires conjuguées. Le birapport de ces droites avec les deux côtés de l'angle donné est un nombre complexe de module unité. Dans un plan pseudo-euclidien, seules deux droites imaginaires conjuguées possèdent, avec des droites absolues, un birapport égal au précédent. Ainsi, entre ces plans, il n'existe pas de pseudo-congruence des angles réels.

Si un des angles est porté par un plan de géométrie biparabolique, les deux droites absolues sont confondues; le birapport avec elles des côtés de l'angle est égal à l'unité. Au contraire, dans un plan différent, le birapport n'a cette valeur que pour des angles nuls.

Supposons enfin que les deux plans considérés sont biparaboliques. Sur chacun d'eux, il existe une pseudo-congruence interne des angles. Celle-ci s'étend à des plans biparaboliques parallèles. Mais d'un plan biparabolique quelconque sur un autre, le report d'un angle revient à celui d'un segment porté par des droites absolues. Celui-ci n'est possible que dans le cas du parallélisme des droites absolues.

En résumé, le report des angles est possible entre deux plans pseudo-euclidiens, entre deux plans de structure euclidienne ou entre deux plans biparaboliques parallèles. Les premiers n'exigent que des constructions projectives alors que les derniers font appel à des opérations affines.

Dans le cas de structure euclidienne, l'emploi d'un appareil permettant de représenter par des éléments réels une paire de figures imaginaires conjuguées est indispensable. En géométrie élémentaire, on fait appel au compas.

75. — La pseudo-perpendicularité est liée à une relation d'harmonicité, donc au birapport -1. Ce nombre peut être considéré comme étant complexe de module unité et d'argument π. De ce fait, il y a pseudo-congruence des angles pseudo-droits d'un plan pseudo-euclidien avec ceux d'un plan à structure euclidienne.

76. — Un plan tangent à l'absolu peut être considéré comme la position limite d'un plan tournant autour d'une droite quelconque d vers la position de tangence. Une pseudo-perpendiculaire à d est séparée de d par les deux droites absolues. A la limite, celles-ci sont confondues. La pseudo-perpendiculaire est bien une droite absolue. La convention faite plus haut est ainsi raccordée au cas pseudo-euclidien.

Pseudo-cercles

77. — Dans l'espace, toute section plane d'une quadrique pseudo-sphérique est un pseudo-cercle. Le centre de celui-ci est le pied de la pseudo-perpendiculaire abaissée du centre de la quadrique sur le plan de la section, donc l'intersection de ce plan avec le diamètre conjugué à son orientation. Ces sections sont des hyperboles ou des ellipses.

Sections pseudo-circulaires d'une quadrique

78. — Si une section plane d'une quadrique pseudo-sphérique est un pseudo-cercle, ses points impropres appartiennent à la conique absolue; de ce fait, les sections de la surface par des plans parallèles à celui de la première section sont aussi des pseudo-cercles. Le problème de la détermination de ces sections est celui de leur orientation, donc de leur droite impropre. Celle-ci passe par deux intersections de la conique absolue et de celle appartenant à la quadrique considérée. Ces deux courbes ont quatre points communs. En général, il existe donc six orientations de plans de section pseudo-circulaire de la quadrique.

Les six intersections précédentes peuvent être réelles, distinctes ou confondues ou apparaître par paires imaginaires conjuguées. Quatre intersections réelles conduisent à six systèmes de sections pseudo-circulaires réelles. Deux intersections réelles et deux imaginaires conjuguées ou deux paires d'intersections imaginaires engendrent deux systèmes d'intersections pseudo-circulaires réelles, toutes elliptiques dans le dernier cas. La bitangence des deux coniques ne donne qu'un système de sections pseudo-circulaires; celles-ci sont des hyperboles; la figure est analogue à une quadrique de révolution.

Le cas de la tangence simple des deux coniques impropres n'apparaît pas en géométrie euclidienne. Au point de contact, chacune des deux quadriques possède un plan tangent. Par ce point, il passe deux génératrices de chacune des surfaces. Ainsi, la quadrique pseudo-sphérique et celle examinée portent chacune une paire de génératrices parallèles entre elles, réelles si la quadrique est à une nappe. Supposons

réelles les deux autres intersections. La quadrique porte alors trois systèmes de sections pseudo-circulaires et un seul si les intersections simples sont imaginaires.

V. GÉOMÉTRIE PSEUDO-EUCLIDIENNE ABSTRAITE

Introduction

79. — La représentation géométrique de la cinématique relativiste a conduit les physiciens à faire usage d'une géométrie ou la pseudo-distance est donnée par une certaine fonction des coordonnées des extrémités du segment considéré. Cette géométrie présente plusieurs analogies avec celle examinée ci-dessus, mais aussi quelques disparités. Nous allons étudier tout d'abord le cas du plan.

Définitions

80. — Dans le plan, supposons tracé un système de coordonnées orthogonales habituelles, x,t. Soient deux points de coordonnées x_1, t_1 et x_2, t_2. La pseudo-distance de ces points est la racine carrée arithmétique de la différence des carrés des différences de coordonnées x et t:

$$d = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 - (t_1 - t_2)^2}$$

Cette pseudo-distance est réelle si, en valeur absolue, la différence des x surpasse celle des t. Dans le cas contraire, elle est un nombre complexe de composante réelle nulle.

Les droites de pseudo-longueur nulle sont les parallèles aux bissectrices des axes. Leurs deux points impropres sont les points absolus du plan. On leur attribue le même rôle qu'en géométrie pseudo-euclidienne synthétique. De là provient le nom de géométrie pseudo-euclidienne donné par les physiciens à la discipline considérée ici. Nous lui ajoutons la qualification d'abstraite parce qu'elle repose sur une convention fondamentale de caractère analytique.

Par un point A, menons les deux droites absolues. Elles partagent le plan en deux paires d'angles droits opposés par le sommet. Une d'elles est le lieu des points dont les pseudo-distances à A sont réelles, l'autre, celui des points pour lesquels cette grandeur est imaginaire. Pour alléger le langage, nous les appellerons les semi-plans réel et imaginaire, relatifs à A.

Le pseudo-cercle de centre A et passant par B est une hyperbole équilatère ayant les droites absolues issues de A comme asymptotes. Elle ne franchit pas ces droites. Selon que B appartient à l'un ou à l'autre des semi-plans relatifs à A, le rayon du pseudo-cercle considéré est réel ou imaginaire.

Les pseudo-perpendiculaires et les angles jouissent des propriétés examinées en géométrie pseudo-euclidienne synthétique. La pseudo-congruence des angles reste une relation de projectivité où les droites absolues se correspondent. Le caractère réel ou imaginaire des pseudo-longueurs n'a aucun effet sur cette relation.

Théorème de Pythagore

81. — L'équation d'un pseudo-cercle rapportée à son centre et situé dans le semi-plan réel relatif à ce point est $x^2 - t^2 = r^2$.

La coordonnée t est inférieure à x. Cette forme est conservée si on rapporte la courbe à un système d'axes pseudo-orthogonaux. La réalité du rayon implique celle de l'abscisse x. L'axe des t est porté par un axe appartenant au semi-plan imaginaire relatif au centre. La pseudo-longueur de l'ordonnée t est imaginaire. Appelons-la (t). Nous avons $(t) = it$ et l'équation du pseudo-cercle peut être écrite $x^2 + (t)^2 = r^2$. On peut donc énoncer le théorème de Pythagore comme suit: Le carré de la pseudo-longueur de l'hypothénuse d'un triangle pseudo-rectangle est égal à la somme des carrés des pseudo-longueurs des cathètes. L'analogie de cette forme avec celle de la géométrie habituelle est séduisante. Il n'en faut pas moins rappeler que des deux cathètes, une a une pseudo-longueur imaginaire et que le terme correspondant de la somme est négatif.

Le théorème de Pythagore est un lemme fondamental de la trigonométrie. Les considérations précédentes s'étendent donc à la trigonomégrie pseudo-euclidienne abstraite. Pratiquement, il est plus simple d'avoir recours à la trigonométrie exposée en géométrie pseudo-euclidienne synthétique et de lui ajouter un examen des figures permettant d'affecter du coefficient i celles des pseudo-longueurs qui sont imaginaires. Cette complication rend la géométrie pseudo-euclidienne abstraite peu commode pour l'étude générale des propriétés des figures. Cela est notamment le cas pour certaines pseudo-similitudes.

Changements d'axes et transformation de Lorentz

82. — En considérant les coordonnées des points comme étant de caractère affin et non comme des pseudo-longueurs, les équations représentant une pseudo-rotation d'un système d'axes pseudo-orthogonaux sont celles trouvées plus haut.

$$x = x' \,.\, ch\,\gamma + t' \,.\, sh\,\gamma, \quad t = x' \,.\, sh\,\gamma + t' \,.\, ch\,\gamma \,.$$

Le cosinus hyperbolique est supérieur à 1. Posons

$$ch\,\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - u^2}} \,.$$

Il vient

$$sh\,\gamma = \frac{u}{\sqrt{1-u^2}}.$$

Les équations ci-dessus deviennent

$$x = \frac{x'}{\sqrt{1-u^2}} + \frac{t'u}{\sqrt{1-u^2}} \qquad t = \frac{x'u}{\sqrt{1-u^2}} + \frac{t'}{\sqrt{1-u^2}}.$$

Ces équations sont apparues, à la fin du siècle dernier dans les travaux de Lorentz à propos de ses recherches sur l'électromagnétisme. Elles ont été retrouvées par Einstein lors de l'élaboration de la théorie de la relativité restreinte. Les coordonnées x et x' d'une part, t et t' d'autre part représentent l'abscisse et l'heure d'un phénomène se passant sur l'axe des x, observées par deux opérateurs en mouvement relatif sur cet axe, à la vitesse uc, où c est la célérité de la lumière.

Dans la représentation géométrique des phénomènes précédents donnée par la géométrie pseudo-euclidienne, un changement d'observateur correspond à une pseudo-rotation d'un système de coordonnées pseudo-orthogonales. Là est le motif de l'intérêt que portent les physiciens à la géométrie pseudo-euclidienne abstraite. Pour eux, il ne s'agit pas de proposer un nouveau moyen d'étude des propriétés des figures, mais bien d'alléger, par des considérations géométriques appropriées, l'exposé de leurs résultats.

Pour atteindre leur but, il ne faut pas se limiter aux phénomènes se passant sur une droite mais envisager ce qui se passent dans notre monde géométrico-physique tridimensionnel. A cela s'ajoute la coordonnée temps. On est donc conduit à faire usage d'un espace de représentation quadri-dimensionnel. On considère l'intervalle de deux événements, donné par la racine carrée de la différence $\Delta x^2 - c^2\Delta t^2$. Δx est la distance géométrique des lieux des deux événements et $\Delta\, t$, la différence d'heure lue par l'observateur au moment où il a vu les deux événements. Pour deux observateurs en mouvement relatif, les Δx et les Δt observés sont différents. Par contre l'intervalle est le même pour les deux. Cette constance justifie l'intérêt de la géométrie pseudo-euclidienne abstraite. La fécondité de cette représentation s'est montrée considérable. Par exemple, l'exclusion des transformations imaginaires est liée à l'inexistence de vistesses supérieures à la célérité de la lumière.

VI. GÉOMÉTRIE PSEUDO-EUCLIDIENNE ET PRINCIPES DE LA GÉOMÉTRIE

Axiomes et constructions fondamentales

83. — La géométrie classique repose sur un ensemble d'axiomes qui, depuis Hilbert, sont classés en cinq groupes: appartenance (I), ordre (II), congruence (III), parallélisme (IV) et continuité (V). L'ensemble des propriétés accessibles à partir des axiomes I, II, IV, et V, quelque peu modifié pour tenir compte de l'exclusion du groupe III, constitue la géométrie affine, base des géométries euclidienne et pseudo-euclidienne. Cette dernière diffère de la première; cela ne serait pas le cas si les axiomes de congruence étaient identiques dans les deux disciplines. Cherchons leurs disparités.

Hilbert distingue cinq axiomes de congruence; ils portent sur les segments, les angles et les triangles. Le premier affirme la possibilité du report d'un segment quelconque, sur une droite arbitraire et à partir de tout point. Tacitement, il résulte de la définition du segment que la figure résultant du report d'un segment est un segment d'extrémités distinctes et bien déterminées. Cela est le cas pour le report pseudo-euclidien, à condition que les droites utilisées ne soient pas absolues. Le report d'un segment sur une droite absolue conduit à une demi-droite. Si le support d'un segment est une droite absolue, le résultat de son report sur une droite non absolue est un segment nul. Ces deux constructions ne satisfont pas aux conventions rappelées ci-dessus. En renonçant à ces dernières, on pourrait admettre à la rigueur les « reports » précédents. Cela ne suffirait pas à éliminer toutes les difficultés car le report d'un segment porté par une droite absolue sur une autre, non parallèle à la première, reste impossible. En conclusion, le report des segments par pseudo-congruence obéit au premier axiome de congruence à condition de rejeter les supports constitués par des droites absolues. Cependant, il reste à considérer le report affin sur des supports parallèles, absolus ou non. Pour eux, tous les axiomes de congruence de la géométrie euclidienne sont valables.

Le deuxième axiome de congruence pose la congruence de deux segments respectivement congruents à un troisième. Cette proposition est valable pour les segments de supports parallèles et pour ceux de supports non absolus. Il en est de même pour le troisième axiome. Celui-ci exprime le fait que deux segments qui sont les sommes de deux autres, respectivement congruents sont eux-mêmes congruents.

Ainsi, en excluant les droites absolues et en réservant le cas de parallélisme, les propriétés fondamentales de la pseudo-congruence sont celles de la congruence. Cette exclusion a une conséquence sur la structure d'un système d'axiomes de la géométrie pseudo-euclidienne. Avant d'énoncer les axiomes de pseudo-congruence, il faut faire apparaître les droites absolues, donc le parallélisme. En géométrie habi-

tuelle, les droites absolues n'interviennent pas car elles sont imaginaires. Il n'y a donc pas de raison impérieuse de faire figurer les axiomes de congruence avant ou après celui de parallélisme. L'avantage de le faire est le suivant. Au moyen des axiomes de congruence, on peut démontrer l'existence de droites coplanaires et non sécantes. L'axiome des parallèles peut alors se limiter à affirmer l'unicité de cette non sécante.

84. — Selon Hilbert, la congruence des angles repose sur la réflexivité de cette relation et l'existence du report. Examinons la première dans le cas de la pseudo-congruence. Celle-ci est réalisée par l'égalité des birapports des côtés avec les droites absolues issues des sommets des angles considérés. Cela suppose que ce birapport est bien déterminé, cas toujours obtenu si les côtés et les droites absolues sont distincts. Si les deux côtés sont confondus, il n'y a pas d'angle. La question de la réflexivité ne se pose pas. Examinons l'angle d'une droite a avec la droite absolue j. Nous sommes conduits au birapport $(ajjk)$. Il est infini, donc mal déterminé. On évite cet inconvénient en examinant l'angle de la droite absolue j avec le côté a. Le birapport correspondant $(jajk)$ est égal à zéro, donc bien déterminé. La réflexivité a un sens, mais, contrairement aux conventions habituelles, l'angle aj doit être distingué de l'angle ja puisqu'ils ne jouissent pas des mêmes propriétés. La simplicité des relations conduit à renoncer à attribuer des propriétés de pseudo-congruence aux angles dont un côté est absolu. Quant à l'angle de deux droites absolues, il conduit à un birapport indéterminé; on ne peut pas parler de réflexivité.

85. — Dans le plan, le report d'un angle est une construction projective; il est bien déterminé par la donnée de trois paires d'éléments correspondants distincts. Ainsi, le report des angles par pseudo-congruence existe lorsque ni l'angle donné ni le côté donné de celui à construire ne comportent de droite absolue. Mais lorsque la réflexivité est en défaut, le report n'est pas possible.

Ce qui précède concerne le plan. Le report d'un angle sur un plan distinct de celui qui le contient exige que les deux plans considérés portent des métriques angulaires de même nature. Il y a là une seconde restriction à imposer dans un axiome concernant le report des angles.

86. — Le dernier axiome de congruence de Hilbert concerne les triangles. Il revient à affirmer la validité du premier cas de congruence des triangles (un angle congruent compris entre les côtés respectivement congruents). Cette propriété exige l'existence de pseudo-congruence entre des côtés et des angles. Il n'a de sens que pour les triangles ordinaires.

Ainsi, l'exclusion des droites absolues est la disparité essentielle entre la congruence euclidienne et la pseudo-congruence. En géométrie pseudo-euclidienne synthétique, il faut encore considérer que la symétrie absolue transforme un segment en un segment pseudo-congruent au proposé. Cela n'est pas le cas en géométrie pseudo-euclidienne abstraite. Dans ce cas, il est nécessaire de constituer une théorie

particulière de la pseudo-congruence des segments en tenant compte de la séparation éventuelle des points impropres des supports des segments considérés.

87. — En géométrie pseudo-euclidienne plane, le report des angles est justiciable de la règle seule, si on dispose d'un tracé des droites absolues issues d'un point quelconque. Les reports d'un angle pris dans un sens ou dans l'autre sont deux constructions distinctes. En géométrie euclidienne l'utilisation d'une représentation réelle des paires de droites isotropes fait intervenir une figure quadratique. Les deux reports précédents d'un angle sont réalisés dans une unique construction, généralement réalisée au compas.

88. — Le report d'un angle du premier type conduit à la notion de multiple d'un angle. L'échelle angulaire ainsi obtenue jouit d'une propriété de caractère archimédien : il existe un multiple de l'angle unité choisi supérieur à tout angle donné du premier type. Pour le voir, donnons une seconde construction de cette échelle. Par le sommet A d'un angle, menons les droites absolues et une parallèle m à l'une d'entre elles. Appelons M son intersection avec la seconde droite absolue a issue de A. Les côtés de l'angle donné bc coupent m en B et C. A partir d'un point arbitraire P de a, projetons B et C sur la seconde droite absolue a' issue de A, en B' et C'. La droite $B'C$ coupe a en Q. Menons QC' et soit D son intersection avec m. Appelons I le point impropre commun de m et a'. Les deux projections donnent $(MBCI) = (AB'C'I) = (MCDI)$ ou

$$\frac{MC}{BC} = \frac{MD}{CD} \quad \text{ou encore} \quad \frac{MC}{MB} = \frac{MD}{MC}.$$

Les angles BAC et CAD sont pseudo-congruents. L'itération de la construction conduit à une suite de points portés par une demi-droite issue de M et dont les abscisses sont en progression géométrique. Celle-ci contient des termes supérieurs et inférieurs à tout nombre positif. C'est dire que l'échelle angulaire pseudo-uniforme dépasse dans les deux sens toute droite issue de A et non séparée de b par les droites absolues. L'axiome d'Archimède est valable pour les angles du premier type. Par contre, le report répété d'un angle du premier type ne permet pas de dépasser un angle du second type. Ces angles sont des grandeurs non archimédiennes relativement à ceux du premier type.

89. — L'angle unité est du premier type. Il n'est donc pas possible de choisir comme tel l'angle de deux droites pseudo-perpendiculaires ou un de ses sous-multiples.

Le théorème de Pythagore

90. — A la suite d'Euclide, on démontre souvent le théorème de Pythagore de la géométrie euclidienne au moyen des propriétés des aires. D'elles, on déduit la relation entre les carrés des longueurs des côtés du triangle rectangle. D'autre part, il

existe une démonstration directe du théorème basée sur la similitude. Hilbert a montré que si l'axiome de congruence des triangles ne porte que sur les figures de même sens, le théorème sur les aires est valable alors que celui sur les longueurs des côtés est en défaut. Les applicacions de ce dernier sont beaucoup plus nombreuses que celles de la relation des aires.

L'importance de cette distinction apparait encore dans le fait suivant. En n'ayant recours qu'à des propriétés affines, Pappus a démontré une relation de somme d'aires de parallélogrammes construits sur les côtés d'un triangle quelconque. Si le triangle est rectangle, le théorème de Pappus est celui sur les aires des carrés des côtés. Le théorème de Pythagore n'est qu'un cas particulier de celui de Pappus, théorème appartenant à la géométrie affine.

Voyons comment se présente le théorème de Pappus sur les pseudo-carrés construits sur les cathètes d'un triangle pseudo-rectangle. Soit ABC un triangle pseudo-rectangle en A. Par les sommets B et C, menons les parallèles aux côtés AC et AB, jusqu'à l'intersection avec la droite absolue, issue de A qui ne coupe pas l'hypoténuse BC. Par les intersections B' et C', menons les parallèles à AB et à AC jusqu'aux intersections avec les prolongements de CA et BA. Nous avons construit deux pseudo-carrés $ABB'D$ et $ACC'E$. Prolongeons les côtés $B'D$ et $C'E$ jusqu'en leur intersection F. Traçons la droite AF ainsi que ses parallèles issues de B et C. Nous obtenons deux parallélogrammes $ABGF$ et $ACHF$, respectivement équivalents à $ABB'D$ et $ACC'E$. Le triangle AEF est pseudo-rectangle en E. Les cathètes AE et EF sont pseudo-congruentes à AC et AB. L'hypoténuse l'est à BC. Les cathètes du triangle AEF sont respectivement pseudo-perpendiculaires à celles de ABC. La droite AF l'est donc à BC. Transportons les segments BG et CH sur leurs supports en BG' et CH'. Nous obtenons ainsi le parallélogramme $BCH'G'$ à côtés pseudo-perpendiculaires. Les côtés BC et BG' sont pseudo-congruents. Ce parallélogramme est un pseudo-carré. Ainsi, l'aire du pseudo-carré construit sur l'hypoténuse d'un triangle pseudo-rectangle est égale à la somme de celles des pseudo-carrés construits sur les cathètes.

Le même résultat peut encore être obtenu comme suit. Construisons le pseudo-carré $ACKL$ situé du côté de AC où se trouve B. Par une translation, transportons le pseudo-carré $ABB'D$ de façon à superposer les points L et D, en $LMNO$. Translatons le triangle ABC en NMP et menons les droites BN et CP. Le triangle BON est pseudo-rectangle en O. Ses cathètes sont respectivement pseudo-congruentes à AB et AL, donc à AB et AC. Il est pseudo-congruent à ABC. L'angle CBN est donc pseudo-droit. La figure $BCPN$ est un pseudo-carré. Le triangle CKP est lié à BON par une translation; il en est de même de NMP et BAC. Ainsi l'aire du pseudo-carré $BCPN$, construit sur l'hypoténuse est égale à la somme des aires des carrés $ACKL$ et $LMNO$ ou $ABB'D$, construits sur les cathètes. Comme la précédente, cette démonstration est de caractère affin. On reconnaît d'ailleurs deux démonstrations souvent exposées dans les éléments.

91. — Le résultat précédent diffère du théorème de Pythagore relatif aux pseudo-longueurs des côtés des triangles pseudo-rectangle; dans celui-ci, le carré de l'hypoténuse est égal à la différence des carrés des cathètes. La géométrie pseudo-euclidienne est donc du type que Hilbert qualifie de non pythagoricienne. En géométrie euclidienne, l'expression métrique des deux théorèmes est la même; il est donc possible de les confondre. D'un point de vue général, opérer ainsi, c'est profiter d'une coïncidence accidentelle. La démonstration par la similitude de la géométrie élémentaire porte sur les longueurs des segments. Montrons qu'elle s'étend à la géométrie pseudo-euclidienne.

Soit un triangle ABC, pseudo-rectangle en A. Tirons sa hauteur AD. Le point D est extérieur au segment BC. Choisissons les notations de telle sorte qu'il appartienne à la demi-droite d'origine B qui ne contient pas C. Les triangles ADC et ADB sont pseudo-rectangles en D. L'angle C est commun à ADC et BAD. La pseudo-similitude donne $AC^2 = BC.\,CD$. Les côtés de l'angle BAD sont respectivement pseudo-perpendiculaires à ceux de ABC. Ces angles sont pseudo-congruents et il y a pseudo-similitude entre les triangles ABC et BDA. Cela conduit à $AB^2 = BC.\,(BD - BC)$ Nous avons déjà obtenu les proportions précédentes au moyen de la théorie des projections (al. 43). Formons la différence

$$AC^2 - AB^2 = BC\,.\,CD - BC\,.\,CD + BC^2 \qquad \text{ou} \qquad BC^2 = AC^2 - AB^2\,.$$

Cette relation exprime le théorème de Pythagore sur les pseudo-longueurs des côtés des triangles pseudo-rectangles. La validité de cette démonstration montre que, même en géométrie euclidienne, la liaison entre la similitude et le théorème de Pythagore est plus profonde que celle avec les aires.

A propos des pseudo-cercles

92. — En géométrie pseudo-euclidienne synthétique, le lieu des points pseudo-équidistants d'un point se compose de deux pseudo-cercles. Cette dernière courbe ne peut donc pas être définie comme étant un tel lieu. La symétrie pseudo-orthogonale est définie indépendamment de la notion de pseudo-cercle. Celui-ci peut être considéré comme le lieu des points liés à un point fixe par les symétries pseudo-orthogonales relatives aux droites d'un faisceau. Le sommet du faisceau est le centre de la courbe.

La transformation résultant de la composition de deux de ces symétries dont les axes forment un angle mesurable est une pseudo-rotation. Celle-ci engendre une branche de pseudo-cercle. Elle correspond à l'usage du compas en géométrie euclidienne. Dans celle-ci, la rotation engendre le cercle complet.

93. — En géométrie euclidienne, l'associé d'un cercle est peu employé et ne l'a été qu'à partir du XIXe siècle. Cela est dû au fait que, dans ce cas, la symétrie absolue est une transformation imaginaire. En effet, dans un système de coordonnées rectan-

gulaires, l'équation d'une droite isotrope passant par le point d'abscisse a de l'axe des x est $y = i(x-a)$. L'ordonnée de l'intersection avec l'axe des y est $y = ia$. Déterminons l'abscisse de l'intersection avec la droite isotrope issue de l'origine et d'équation $y = -ix$. elle est $x = \frac{a}{2}$. La correspondance est bien une symétrie absolue.

94. — Les droites absolues réapparaissent à propos de la symétrie orthogonale. En géométrie euclidienne, coupons le cercle de rayon nul de centre A par une droite d; par les intersections, menons les droites isotropes distinctes des précédentes. Elles constituent un cercle de rayon nul dont le centre est le symétrique de A par rapport à d. La propriété subsiste en géométrie pseudo-euclidienne, avec des droites absolues réelles.

95. — Dans les éléments, le problème de la longueur de la circonférence et le nombre π jouent un rôle important. En géométrie pseudo-euclidienne, le problème ne se pose pas car un pseudo-cercle a une pseudo-longueur infinie.

Questions diverses

96. — La géométrie affine est mise en valeur par le fait qu'elle constitue un tronc commun aux deux géométries euclidienne et pseudo-euclidienne. L'intérêt des coordonnées affines est mis en évidence par le fait qu'elles jouent un rôle important dans les deux géométries pseudo-euclidiennes, synthétique et abstraite.

97. — En géométrie euclidienne, le théorème de la somme des angles d'un triangle possède une expression métrique simple: la somme des mesures de ces angles est égale au double de la mesure d'un angle droit. L'extension à la géométrie pseudo-euclidienne ferait appel à des mesures imaginaires d'angles. L'intérêt de telles considérations est limité.

La mesure des angles suppose le choix d'une unité. Il est commode de prendre comme telle l'angle au centre d'un arc de longueur égale au rayon. On peut opérer de même en géométrie pseudo-euclidienne synthétique. L'angle unité est alors obtenu en reportant des pseudo-longueurs proportionnelles aux nombres $ch\ 1 = 1{,}54308$ et $sh\ 1 = 1{,}17520$ sur deux droites pseudo-perpendiculaires.

En géométrie pseudo-euclidienne abstraite, une telle définition n'est valable que sous réserve, puisque la pseudo-longueur d'un arc de pseudo-cercle de rayon réel est elle-même imaginaire.

98. — L'existence d'une métrique réelle des angles applicable aux angles droits permet d'établir un lien entre la propriété de la somme des angles d'un triangle et le théorème de Pythagore. Soit un triangle ABC, rectangle en A, de côtés a,b,c. La somme des angles B et C est un angle droit. On a donc $sin\ (B+C) = 1$. Elevons au

carré l'expression développée du premier membre et éliminons les cosinus carrés que présente cette expression. Il vient

$$1 = \sin^2 B + \sin^2 C + 2 \sin B \sin C \cos (B + C) .$$

Le dernier facteur est nul. Nous avons donc

$$1 = \sin^2 B + \sin^2 C = \left(\frac{b}{a}\right)^2 + \left(\frac{c}{a}\right)^2 .$$

Cette dernière relation est le théorème de Pythagore de la géométrie euclidienne. L'absence d'une relation métrique entre les angles d'un triangle élimine la possibilité d'un calcul analogue au précédent en géométrie pseudo-euclidienne.

Conclusion

99. — La géométrie pseudo-euclidienne, synthétique ou abstraite, ne donne pas un moyen commode d'étude des figures. Par contre elle est l'occasion de quelques réflexions intéressantes sur la structure de la géométrie euclidienne. Par des moyens simples, elle fournit un exemple de non validité de l'axiome d'Archimède relatif à certains angles et où apparaît un caractère non pythagoricien. En outre l'inégalité triangulaire n'est pas toujours satisfaite. L'intérêt principal de son étude tient à ces possibilités et aux applications de sa partie abstraite à la théorie de la relativité.