La genèse du nombre chez l'enfant et le pré-calcul

Autor(en): **Beauverd, B.**

Objekttyp: **Article**

Zeitschrift: **Études pédagogiques : annuaire de l'instruction publique en Suisse**

Band (Jahr): **56/1965 (1965)**

PDF erstellt am: **21.07.2024**

Persistenter Link: https://doi.org/10.5169/seals-115253

La Genèse du Nombre chez l'Enfant et le pré-Calcul

L'importance de ces recherches sur le plan pédagogique

Depuis sa parution en 1941, cette œuvre, à notre sens, n'a pas eu la diffusion ni surtout suscité l'attention qu'elle mérite; en effet, nous ne connaissons pas de travail qui ait approché de si près le mystère de la pensée logique et noté avec plus de force et de précision les premiers balbutiements de son expression. Il est clair que la pensée, dans son essence, reste encore un secret; mais son mécanisme, son apparentement aux sens, à l'action, sont devenus maintenant, grâce à l'étude de M. J. Piaget, des phénomènes accessibles à notre entendement et nul, plus que le pédagogue, n'est en droit d'en attendre des répercussions décisives dans le domaine particulier de l'étude du nombre.

Quel but se propose l'auteur et par quelle méthode compte-t-il y parvenir? L'avant-propos nous renseigne avec pertinence:

Après avoir étudié jadis divers aspects verbaux et conceptuels de la pensée de l'enfant (« Le Langage et la Pensée », « Le Jugement et le Raisonnement », « La Représentation du Monde » et « La Causalité physique chez l'Enfant »), nous avons tenté ensuite d'analyser les sources pratiques et sensori-motrices de son développement (« La Naissance de l'Intelligence » et « La Construction du Réel chez l'Enfant »). Il importe maintenant pour dépasser ces deux étapes préliminaires et pour atteindre les mécanismes formateurs de la raison elle-même, de chercher comment les schèmes sensori-moteurs de l'assimilation intelligente s'organisent sur le plan de la pensée en systèmes opératoires. En deçà des constructions verbales et en prolongement de l'activité pratique, il s'agit donc de suivre le réseau des opérations qui engendre le nombre et les quantités continues, l'espace, le temps et la vitesse, etc., et qui, en ces domaines fondamentaux, conduisent de la prélogique intuitive et égocentrique à la coordination rationnelle à la fois déductive et expérimentale.

Or, à ces problèmes nouveaux doivent correspondre des méthodes appropriées. De nos méthodes anciennes, nous retiendrons le procédé initial de la conversation libre avec l'enfant, conversation dirigée par les problèmes posés, mais s'obligeant à suivre, lors de chaque réponse, les détours de la construction spontanée du sujet. Mais de notre prise de contact avec les données de l'intelligence sensori-motrice, nous garderons cette indication essentielle de la nécessité d'une manipulation. Comme il avait été possible de l'entrevoir, mais sans développements suffisants, en certains chapitres de « La Causalité physique chez l'Enfant », la conversation avec le sujet est à la fois beaucoup plus sûre et beaucoup plus féconde lorsqu'elle a lieu à l'occasion d'expériences effectuées au moyen d'un matériel adéquat et lorsque l'enfant, au lieu de réfléchir dans le vide, agit d'abord et ne parle que de ses propres actions.

De cet avant-propos nous retenons, en tant qu'éducateur, deux éléments primordiaux. *En premier lieu*, le rôle des sens et de l'action sur les choses qu'ils nous permettent de coordonner, d'organiser et de plus, cette assimilation *intelligente* qui procède de l'action et mène à la pensée. Le rôle des sens n'a pas échappé à l'enseignant, preuves en sont les nombreux matériels utilisés dans nos classes qui forcent l'enfant à agir, à coordonner, à classer et, espérons-le, à penser. Or M. Piaget nous révèle (« Psychologie de l'Intelligence ») que le matériel crée l'habitude, mais que celle-ci, comme la perception, est irréversible, tandis que l'acte d'intelligence est réversible. Inverser une habitude (écrire de droite à gauche au lieu de gauche à droite; parcourir, en auto par exemple, une route dans un sens, puis en sens contraire) consiste à acquérir une nouvelle habitude, alors qu'une opération inverse de l'intelligence (la soustraction par rapport à l'addition) est psychologiquement comprise en même temps que l'opération directe. Le problème va donc être, dans le choix que nous ferons des matériels, d'obliger l'enfant à des actes perceptifs qui conduisent à des actes d'intelligence et non uniquement à une création d'habitudes.

Or, comment se comporte le sujet en présence de circonstances nouvelles? Des infusoires de Jennings jusqu'à l'homme (et au savant lui-même, en face de l'imprévu), il tâtonne. Ce tâtonnement peut être purement sensori-moteur ou s'intérioriser sous forme d'« essai » de la pensée seule, mais sa fonction est toujours la même: inventer des solutions, que l'expérience sélectionnera après coup.

L'acte complet d'intelligence suppose ainsi trois moments essentiels: la question qui oriente la recherche, l'hypothèse qui anticipe les solutions, et le contrôle qui les sélectionne. Seulement on peut distinguer deux formes d'intelligence, l'une pratique (ou « empirique ») l'autre réfléchie (ou « systématique »). Dans la première, la question se présente sous les espèces d'un simple besoin, l'hypothèse, d'un tâtonnement sensori-moteur, et le contrôle, d'une pure suite d'échecs ou de réussites. C'est dans la seconde que le besoin se réfléchit en question, que le tâtonnement s'intériorise en recherches d'hypothèses et que le contrôle anticipe la sanction de l'expérience par le moyen d'une « conscience des relations », suffisant à écarter les hypothèses fausses et à retenir les bonnes. (*La Psychologie de l'Intelligence*, J. Piaget).

En deuxième lieu, nous admettons avec M. Piaget que l'utilisation d'un matériel intuitif ne saurait se contenter d'une démonstration de la part du maître, car tout l'effet bénéfique d'un matériel pour l'enfant est dans sa manipulation qui conduit à l'expérience et provoque une pensée; celle-ci, au lieu de s'exercer dans le vide, est comme nourrie d'actes. Cette deuxième considération est riche de conséquences; tout d'abord un matériel se choisit en fonction de son efficacité qui ne saurait être que: mener sur les chemins de la pensée, la solliciter, la provoquer, puis la maîtriser. Voilà une responsabilité de l'enseignant nettement établie. Mais il y a plus: cette conversation avec l'enfant, n'est-ce pas l'enseignement individualisé qui tend aujourd'hui à se généraliser grâce à une meilleure connaissance de la psychologie, d'une part, et, d'autre part, à la diminution des effectifs dans nos classes?

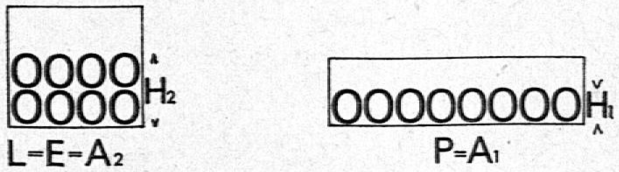
En résumé disons: 1° qu'une expérience sensori-motrice doit faire l'objet d'un choix minutieux en fonction du but poursuivi et que créer une habitude est insuffisant dans le domaine de la pensée; 2° que cette expérience sensori-motrice ne peut être qu'individualisée de même que son exploitation, ce qui postule que la connaissance de l'enfant et le désir de lui être utile priment toute autre considération.

Analyse de l'œuvre

La charpente du livre est fondée sur l'expérience de l'enfant qui, mis en présence d'un matériel adéquat, le manipule et répond à des problèmes de mesure (*grandeurs continues* telles que: liquides, farine, sucre, sable, où les unités sont imbriquées; *grandeurs discontinues* telles que: des arbres, des vaches, des cailloux, où les unités sont clairement sensibles et séparées).

Chaque expérience est menée auprès de trois catégories d'enfants correspondant à trois degrés de développement; le premier stade: incompréhension manifeste du problème posé; le deuxième stade: quelques réussites témoignent d'une certaine maturation; le troisième stade: la réussite. Ces trois stades, arbitraires quant à leur nombre (il pourrait tout aussi bien y en avoir cinq ou dix ou vingt), nous montrent que le matériel sensori-moteur agit comme un catalyseur qui mène à une prise de conscience des phénomènes explorés; mais cette prise de conscience n'est pas fulgurante; elle passe par une évolution plus ou moins lente, avec des étapes de stagnation ou même de régression, un peu comme la transformation de la libellule qui, de l'œuf, passe à l'état de larve, puis à celui de chrysalide et enfin d'insecte parfait.

Voici un exemple puisé dans la *première partie du livre*; il s'agit de la conservation des quantités discontinues et de l'invariance des ensembles. Dans le texte qui va suivre les lettres majuscules (L et P) ou (E et P) ou (A_1 et A_2) désignent des récipients transparents et à parois parallèles, mais des fonds desquels les aires sont volontairement très différentes.



Premier stade

Bab (4 ans 6 mois) pose sur la table un grain toutes les fois que le fait de son côté l'expérimentateur. « C'est la même chose? — Oui. » Puis il met en L un grain chaque fois que l'expérimentateur en dépose un en P. Bab dit alors spontanément à chaque nouveau grain: « C'est la même chose. » Mais lorsque l'on atteint la dizaine de chaque côté et que L est rempli à la moitié, il s'écrie: « J'ai beaucoup. — Et moi? — J'ai presque tout plein. — C'est la même chose? — Moi beaucoup! — Et moi? — Mais regarde! tu as un tout petit peu. — Pourquoi? — Mais regarde (il montre les niveaux). »

Puis Bab dépose une perle en E toutes les fois que l'expérimentateur en place une en P: « Regarde bien si toi et moi avons la même chose. — (Bab énonce alors chaque fois à haute voix le nombre de chaque collection.) Moi un et toi un; moi deux et toi deux; moi trois et toi trois; ... etc. et jusqu'à 6 (le verre E est alors entièrement plein). — C'est la même chose? — ... (conflit entre l'apparence et la correspondance établie). — Si on faisait un collier avec tes perles et un collier avec les miennes, ce serait la même chose? Non, le mien est plus long. — Mais si on prenait toutes tes perles et toutes les miennes? — Non, le tien n'est pas si long; il faut remplir ton verre, pour avoir un aussi long collier. — Compte. — (Il compte 1 ... 6 en E et 1 ... 6 en P) — Alors? — Toi, tu as un petit collier. — Mais pourquoi tu as beaucoup? — Regarde, c'est bas chez toi. C'est moi qui ai beaucoup, j'ai tout plein. »

Coc (5 ans) met d'abord un grain en A_1 chaque fois que l'expérimentateur en met un dans le verre A_2, et dit ensuite spontanément: « C'est tous les deux la même chose. — Comment tu sais? — Parce qu'on met les deux (= les deux grains correspondants)... Non, parce que les deux verres sont la même chose. » (On voit ce recours au critère de la forme d'ensemble, considéré comme plus sûr que celui de la correspondance!) L'enfant est alors invité à mettre un grain en P chaque fois que l'expérimentateur en met un en L: « Est-ce que ça fait la même chose? — Non. Ici (L) c'est plus. — Pourquoi? — Parce que c'est tout petit (= allongé) et ici (P) c'est gros. »

Bab et Coc savent tous deux compter, mais cette connaissance qui n'est qu'un savoir et non un pouvoir est incapable de leur donner quelque assurance quant à l'égalité des quantités envisagées. Ces comptages sont troublés et comme anéantis par l'observation des récipients et des hauteurs atteintes par les grains. Nous en déduisons

4

que l'aptitude au comptage, dont les parents sont si fiers quand ils amènent leur enfant à l'école, n'a, sur le plan de la pensée logique, aucune signification: on constate que l'enfant a mémorisé une série de mots quasiment vides de sens et que, même s'il sait établir une sériation: grain — nom des chiffres

1 2 3 4 5 ......
O O O O O ....

cet acte n'est qu'une manipulation mnémotechnique (une habitude irréversible, car l'enfant peut être capable pendant de longs mois de sérier sans que l'on puisse constater un progrès quelconque) qui ne lui confère aucun pouvoir puisque rien encore, ou peu de chose, ne s'est intériorisé.

On voit combien sont curieuses les réactions de ce dernier type, qui sont hautement représentatives de tout le premier stade. Il est clair que la correspondance biunivoque et réciproque entre deux collections devrait conduire à l'équivalence des collections correspondantes. Mais au niveau de ce premier stade, la quantification est si peu poussée que la correspondance n'entre même pas en conflit avec les apparences contraires et se subordonne d'emblée à la perception spatiale. Par exemple Coc croit à l'égalité de A_1 et de A_2, moins parce qu'on y dépose « les deux grains » correspondants à la fois que « parce que les deux verres sont la même chose », comme si le second critère était plus sûr que le premier. Quant à Bab, il a beau dire « c'est la même chose » à chaque nouvelle introduction de deux grains correspondants, il ne tient aucun compte de ce genre d'évaluation, une fois le verre L rempli à demi, et se borne à regarder les niveaux. Bien plus, il compte ensuite jusqu'à 6 et 6 les perles déposées en E et en P, et n'en conclut pas moins que le collier fait avec les perles de E sera plus long, parce qu'en E il y a « beaucoup » « tout plein »! Non seulement la correspondance terme à terme, mais encore, on le voit, le dénombrement lui-même, apparaissent ainsi à l'enfant du premier stade, comme des procédés de quantification beaucoup moins sûrs que l'évaluation directe due aux rapports perceptifs globaux (quantités brutes). En effet, la numération parlée, que le milieu social impose parfois à l'enfant de ce niveau, demeure toute verbale et sans signification opératoire. Quant à la correspondance terme à terme, nous verrons précisément, combien on se tromperait à vouloir la considérer d'emblée comme une opération quantifiante, alors qu'elle débute par un état de simple comparaison qualitative.

Il semble que l'enfant de ce stade n'ait pas la notion du temps (passé, présent, futur) et ne vive (comme les animaux, du moins le pense-t-on) que le moment présent. C'est pourquoi l'acte de comptage (passé) est effacé par une appréciation de mesurage (les grains dans les récipients L et P) qui devrait pour être réussie se fonder sur un souvenir: celui de l'action de compter; on voit que cette action ne s'est pas structurée, mais a glissé sur la matière grise comme l'eau sur les plumes d'un canard.

Second stade

Voici les réponses de Tis (5 ans 1 mois) placé devant les mêmes expériences que Bab et Coc, enfants du premier stade.

Tis (5 ans 1 mois) met en V_1 une perle toutes les fois que l'expérimentateur en dépose une en V_2: « C'est la même chose? — Oui, parce que j'ai mis chaque fois la même chose et vous aussi. — Si on fait deux colliers, etc.? Ils auront la même longueur, parce qu'il y a beaucoup de perles, et vous aussi vous avez beaucoup de perles. — (On verse V_1 en L + M.) c'est la même chose? — Chez vous (L + M) il y a beaucoup. — Et toi? — Pas beaucoup. — Et si on fait des colliers, etc.? — Le tien sera plus long, mon collier sera moins long. — Pourquoi? — Parce qu'il y a plus de perles chez vous. — Mais comment on a mis les perles? — Deux chaque fois. — Pourquoi j'ai plus? — Il y a deux colonnes toutes grandes chez vous, regardez. » Jusqu'ici la réaction de Tis est donc caractéristique du premier stade, mais on va voir maintenant le passage de cette réaction initiale aux conflits typiques du second stade:

Tis met une perle en L toutes les fois que l'expérimentateur en dépose une en P. Tis compte chaque fois la perle qu'il introduit et aboutit à un résultat correct de 12 perles. On s'arrête lorsque L est plein. Tis s'écrie alors spontanément: « C'est moi qui a plus. — Pourquoi? — Il y a plus dedans. — Et si l'on fait deux colliers? — Celui-là (L) est plus long. — Pourquoi? — Le pot est plus grand et celui-là (P) est plus petit (il montre la hauteur). — Mais il y a plus de perles? — Chez vous (L). — Pourquoi? — C'est plus grand. — Comment on a mis les perles? — On a mis chaque fois les deux. — Nous avons la même chose, ou toi tu as plus ou moins? — La même chose les deux. — Pourquoi? — Parce qu'on a mis chaque fois les deux. — Comment seront les deux colliers? — Le vôtre sera long et le mien sera la même chose long. — Pourquoi? — Parce qu'ici (L) c'est grand, et moi ici (P) c'est petit, vous, vous avez beaucoup de perles. — Et toi? — Pas tant beaucoup, mais quand même beaucoup. » On voit que sitôt rappelée, la correspondance terme à terme entre en conflit avec la perception des dimensions, le premier facteur tendant à l'égalité et le second à la différence sans que Tis parvienne à une synthèse réelle.

On constate, en effet, l'existence d'un conflit systématique chez Tis, entre un facteur d'égalité et de conservation et un facteur de différences. En déposant dans un récipient quelconque X un élément chaque fois que l'expérimentateur place de son côté un élément en Y, tout enfant de ce stade est porté à conclure que X = Y, même si les formes de ces deux récipients sont différentes l'une de l'autre. Par contre, lorsque l'enfant contemple après coup le résultat obtenu, dans le cas où les collections correspondantes sont de formes différentes, sa croyance en l'équivalence est tenue en échec par l'évaluation fondée sur les rapports perceptifs. En effet, bien qu'il vienne d'effectuer lui-même la correspondance terme à terme, l'enfant ne peut pas s'empêcher, en considérant la collection totale, de supposer, comme au cours du premier stade, que toute augmentation de hauteur (ou de largeur, etc.) entraîne une variation de la quantité comme telle. Seulement, contrairement à ce qui se produisait au premier stade, au cours duquel les facteurs perceptifs annulaient sans plus la croyance en l'équivalence des collections correspondantes, il y a maintenant conflit sans issue, aucune des deux tendances ne l'emportant décidément sur l'autre: lorsque l'enfant regarde les collections de perles, il croit à la non-équivalence et lorsqu'il se rappelle la correspondance qui les a constituées il croit de nouveau à cette équivalence. Même, lorsqu'il semble y avoir décision finale, comme chez Tis, l'expression verbale (« vous, vous avez beaucoup... moi pas tant beaucoup, mais quand même beaucoup ») trahit l'incertitude.

Il n'y a pas de doute, la chrysalide prend forme: l'enfant est capable maintenant de faire appel à sa mémoire et de coordonner des faits passés (mise en sériation) avec un état présent: les perles en L et P; mais cette réversibilité, ce retour en arrière si nécessaire à tout raisonnement, n'est pas encore un pouvoir mobilisable à tout instant; il y a des disparitions et des résurgences qui se concrétisent par *des doutes et des certitudes*.

Troisième stade: conservation et coordination quantifiante.

L'expérience, grosso modo, est la même que celle qui fut présentée aux premier et deuxième stades, mais elle est précédée d'une « hypothèse » en ce sens que les récipients L et P ont été au préalable (voir dessin stade I) remplis chacun de 18 perles, et l'enfant est appelé à nous dire s'il croit ces deux quantités égales; sa réponse enrobe deux multiplications dont les résultats sont égaux; deux récipients peuvent être égaux en contenance, mais dissemblables: petite base $\times$ grande hauteur $=$ grande base $\times$ petite hauteur.

Sum (6 ans 10 mois) compare les bocaux L et P (contenant chacun 18 perles, mais sans que l'enfant les ait comptées ni fait correspondre les unes aux autres). « Tu crois que c'est la même chose ou non? — ... — Comment faire pour savoir? — Dans celui-là (P) il y a plus. — Pourquoi? — Parce que c'est plus gros. On peut moins en mettre ici (L). »

On vide L et P et Sum met en L une perle chaque fois que l'expérimentateur en dépose une en P. « C'est la même chose. — Pourquoi? — Ça (P) c'est plus gros, mais c'est pas rempli, et ça (L) est plus mince, mais c'est tout rempli. — D'où tu sais que c'est la même chose? — Parce qu'on a mis ensemble. » On donne ensuite à Sum un verre G ne contenant qu'une couche de perles, en lui demandant d'en mettre autant en L. Sum remplit L aux $^2/_3$ et dit: «Je ne sais pas comment faire, je crois qu'il y a plus là (G). — (On remplit L.) Je crois que c'est la même chose. — Pourquoi? — Ça (G) c'est plus grand, mais si on faisait long (Sum fait le geste de dresser G en hauteur et de mettre ainsi les perles verticalement), ça ferait la même chose que là (L). »

Lea (7 ans, 7 mois) compare L et P (16 éléments en chacun): « Ici (L), il y a plus, c'est plus haut. — Alors? — C'est moins large, mais c'est plus haut. Ça (P), c'est plus large, mais c'est plus petit, tandis que si on remplissait, ça ferait plus de grains. — Pourquoi? — Parce que c'est plus large. — Explique-moi. — Si on le coupait (L) au milieu, et qu'on le mettait ensemble là (en P), ça ferait toujours moins large. — Pourquoi? — Parce que c'est très mince. »

On vide L et P pour les remplir par correspondance terme à terme. « C'est la même chose. — Pourquoi? — Parce qu'on a toujours mis en même temps. — Mais là (L) c'est plus haut, explique-moi. — Si je vidais celui-là (P) dans celui-là (L) ou celui-là (L) dans celui-là (P) ce sera la même chose. Pourquoi? — Si je les mettais (les éléments de P) dans une colonne ça ferait la même chose. Et alors? — Ça (P) c'est plus large, ça en prend (geste de répandre en largeur), tandis qu'ici (L) le verre est mince, alors ça n'en prend pas (en largeur), mais ça monte. »

Notons, tout d'abord, que chacune des réponses précédentes procède initialement d'une multiplication logique des relations en jeu de hauteur et de largeur. Pour lever la contradiction entre la correspondance univoque et réciproque entre les éléments des deux collections, source d'équivalence, et les changements apparents, le sujet suppose, en effet, d'emblée que ceux-ci forment un tout: pour Sum P est « plus gros mais pas rempli » tandis que L est « plus mince mais tout rempli »; pour Lea, L est « moins large mais plus haut », etc., chaque relation étant ainsi multipliée par l'autre ou surtout par son inverse.

Mais, comme on le voit bien dans le cas où le sujet compare L et P sans avoir établi au préalable l'équivalence des contenus de ces deux verres, une telle opération ne suffit nullement à constituer la notion d'une quantité constante ou l'égalité de deux quantités. Elle permet uniquement, si l'on connaît par ailleurs cette égalité totale, de déduire qu'à une augmentation de hauteur doit correspondre une diminution de largeur et inversement. Pour Sum, la collection située en G est égale à celle de L parce que « si on faisait long, ça ferait la même chose », autrement dit, parce que la différence de largeur entre G et L équivaut exactement à leur différence de hauteur. De même Lea constate que P est « plus large » que L et que « ça en prend » par conséquent, c'est-à-dire que ça diminue la hauteur, mais si on « les mettait dans une colonne ça ferait la même chose (la même hauteur) ». Bref, sitôt coordonnées opératoirement, les différences perçues sont mesurées, et, à défaut de données numériques, elles sont mesurées les unes par les autres, toute augmentation de largeur étant égalée ou comparée à la diminution concomitante de hauteur, ou l'inverse.

Or, que cette proportion, laquelle constitue ainsi le début de la quantification extensive, aille elle-même de pair avec la partition arithmétique, c'est ce qui apparaît clairement chez la plupart des sujets de ce stade. Par exemple, pour Lea, L contient moins que P (si P est plein), parce que « si on coupait (L) au milieu et qu'on mettait ensemble (les deux moitiés en P) ça ferait toujours moins large ».

D'une manière générale, on constate que ces proportions, ces égalisations de différences et ces partitions numériques se constituent en fonction des opérations inverses dont l'enfant acquiert le maniement par le fait même de rendre « opératoires » les transformations jusque-là conçues à titre de simples rapports perceptifs. Lorsque Lea, par exemple, déclare « si je vidais celui-là (P) dans celui-là (L) ou celui-là (L) dans celui-là (P), ça sera la même chose», il exprime la réversibilité propre à toute opération logique et mathématique, et c'est cette réversibilité qui permet de concevoir égalisations et décompositions.

Durant le troisième stade, enfin, l'équivalence prime d'emblée les rapports perceptifs: une fois mises en correspondance terme à terme, deux collections sont conçues comme équivalentes quels que soient leurs changegements de forme, les rapports perceptifs étant coordonnés entre eux ainsi qu'on vient de le voir. Mais quelles sont les relations entre la correspondance terme à terme et cette coordination des rapports?

Nous attirons l'attention du lecteur sur le fait que le passage par les trois stades n'est pas une mutation soudaine, mais dure des années, l'âge des enfants interrogés nous est un renseignement précieux: Bab, dans le premier stade, a 4 ans 6 mois et Lea, du troisième stade, 7 ans 7 mois, d'où une différence de 3 ans 1 mois. Nous convenons que le cas évoqué ci-dessus n'est qu'un cas très particulier puisqu'il s'agit de deux enfants différents; il serait intéressant de suivre cette évolution chez le même enfant. D'expériences faites dans quelques classes enfantines et primaires du canton de Vaud, il résulte que beaucoup d'enfants de 7 ans et plus, bons calculateurs, n'ont pas encore franchi le stade de l'invariance du nombre et témoignent d'une inaptitude totale dans les exercices de transvasage ou de correspondances décalées, et cela même après l'utilisation constante d'un matériel de choix comme le matériel Cuisenaire. Cette constatation doit nous rendre prudents; ne faisons-nous que des chiens savants? Ne nous laissons pas séduire par certaines facilités et acceptons cette maturation lente mais sûre; quel que soit notre désir d'avancer, l'enfant doit rester un enfant et être tenu pour tel.

Il faut remarquer encore que, dans la première partie du livre, M. Piaget traite simultanément, et selon des expériences très semblables, le problème des grandeurs discontinues; il veut montrer par là que, à son origine, le nombre est saisi quantitativement, globalement, tout comme la quantité d'eau, de sable, etc.; l'enfant semble ne pas voir les unités qui composent ce nombre quand son attention est fixée sur l'ensemble et, réciproquement, ne pas voir l'ensemble quand, dans ses exercices de comptage, il guide son attention vers chaque unité en particulier; on saisit ainsi la similitude qu'il y a avec les liquides dont chaque variation de niveau, dans deux récipients différents, joue un peu le rôle des unités dans les grandeurs discontinues.

*

Dans la seconde partie, c'est le problème du nombre, à la fois cardinal et ordinal, qui se pose.

L'auteur imagine de faire réaliser à l'enfant des correspondances et des échanges.

Correspondances: Un enfant peut être appelé à mettre un œuf par coquetier, une plume par encrier, un buvard par cahier, une fleur par vase, un couteau par assiette, etc.

Echanges: un contre un: un sou contre un « sugus », un jouet contre un autre jouet.

M. Piaget constate que l'enfant du premier stade est capable d'effectuer une correspondance terme à terme, mais qu'il suffit de donner aux fleurs, par rapport aux vases, une autre densité (par exemple éloigner les fleurs les unes des autres ou les grouper en un bouquet sans toucher aux vases), pour qu'il ne reconnaisse plus les mêmes quantités, les mêmes nombres, alors que l'enfant du troisième stade découvre que tout changement dans la disposition des fleurs peut être corrigé par un changement inverse; ainsi les fleurs groupées en un bouquet peuvent reprendre leur place dans chaque vase; et cette correspondance ne suscite aucune manipulation, car l'enfant la joue mentalement. Nous sommes arrivés là à une étape décisive parce que l'enfant intériorise des actions sans éprouver le besoin de les réaliser et, de plus, est capable de cette réversibilité mentale qui lui permet de retourner à une situation vécue il y a un instant (la correspondance: vase — fleur), tout en se dispensant de l'action de redistribuer une à une les fleurs du bouquet. Notons en passant que ce retour en arrière peut être aussi bien le rappel d'un souvenir: la vision de la correspondance vase-fleur qu'il vient de jouer (mémoire) qu'un acte d'intelligence: « puisque le nombre des fleurs n'a pas changé et celui des vases non plus, je pourrai toujours recréer la correspondance (raisonnement) ». Nous nous acheminons déjà vers l'opération arithmétique qui, elle, est à la fois mémoire et raisonnement.

Les échanges un contre un amènent à la même conclusion. Remarquons en passant l'expérience suivante:

L'échange un contre un avec numération parlée

La numération parlée semble n'exercer qu'une faible influence sur le sentiment d'équivalence résultant — ou ne résultant pas — de la correspondance terme à terme. Déjà nous avons eu l'occasion de signaler fréquemment l'absence de cohérence entre la numération apprise et les opérations effectives dont est capable l'enfant.

Le moment est venu d'examiner la chose systématiquement. Nous déterminons d'abord jusqu'où l'enfant sait compter sans difficulté. Puis nous faisons l'expérience de l'échange un contre un en choisissant un nombre de couples d'objets inférieur à la limite de la numération parlée du sujet. Nous demandons alors à celui-ci de compter les objets qu'il vient de recevoir et cachons sous notre main les sous qu'il nous a donnés en échange (pour qu'il ne puisse pas les compter); nous le prions alors simplement de deviner combien d'objets sont ainsi cachés.

Nous avons retrouvé ainsi, sans que la numération parlée y change quoi que ce soit, les mêmes stades qu'avec les techniques précédentes. « Il n'est donc pas exagéré de dire que ce facteur verbal ne joue guère de rôle dans le progrès même de la correspondance et de l'équivalence. Sans doute, au moment où la correspondance devient quantifiante et donne ainsi naissance à des débuts d'équivalence, la numération parlée peut accélérer le processus d'évolution. Mais comme tels les nombres ne l'engendrent pas, et c'est là tout ce que nous voulions montrer. »

Ce jugement rejoint ce que nous disions en page 49 de Bab et Coc.

Dans la *correspondance spontanée* il s'agit pour l'enfant de prendre autant d'unités qu'une série, proposée par l'expérimentateur, en contient. Cette série peut être une poignée de jetons, une lignée de boutons ou toute autre figure imaginable (triangle, cercle, losange, etc.). On constate que l'enfant qui a acquis l'invariance du nombre ne s'arrête plus aux configurations des unités, ni aux proportions des figures. Il échangera volontiers une rangée de boutons contre une poignée équivalente de boutons ou un triangle de trois unités contre une rangée de trois unités, etc., etc. Désormais ce qui compte c'est la quantité dénombrée, persuadé qu'il est que toutes les unités sont égales entre elles et que leur place respective importe peu.

Le dernier chapitre de la deuxième partie nous conduit à **l'ordination** et à **la cardination.**

Trois expériences vont nous fournir les renseignements essentiels: 1° Dix bâtons figurent les marches d'un escalier et neuf autres bâtons sont de longueurs telles qu'ils constituent une série à intercaler dans la précédente. 2° Des figures en carton dont la deuxième est le double de la première, la troisième le triple, etc. 3° Des barrières et des tapis de façon que nous ayons (n+1) tapis pour n barrières et un bonhomme (le sauteur en hauteur).

Les deux premiers matériels, très semblables quant au but poursuivi, vont nous permettre des exercices d'ordination: du plus petit au plus grand et vice versa, à partir du dixième, ce qui obligera l'enfant à dérouler la série dans les deux sens — des exercices de cardination: montrer neuf bâtonnets, sept bâtonnets, 1 bâtonnet — des exercices simultanés, de cardination et d'ordination: montrer les six premiers bâtonnets, les cinq derniers.

Le troisième matériel consiste en barrières égales et en tapis égaux: à trois barrières correspondent 4 tapis, à 7 barrières 8 tapis, etc.; c'est le problème des intervalles. Voici les réponses concluantes de Shen (6 ans 6 mois):

Shen (6 ans 6 mois) série correctement les 7 barrières. « On va mettre des tapis de chaque côté des barrières, Ça fera combien? — 6, parce qu'il y a 7 barrières (il les met entre les barrières). — Non, regarde (on met T1 et T2) — Alors 8 (il les met). »

On fait sauter le bonhomme jusque sur le 4e tapis: « Combien de barrières il a traversées? — 3. — Et combien de tapis il a touchés? — 4. — Pourquoi? — Parce qu'il y a 3 barrières. »

On montre 6 barrières sériées sans tapis: « Combien de tapis il a touchés? — 8 parce que c'est 7 barrières. — Regarde. — Ah oui, 7 parce qu'il y a 6 barrières. »

On désigne la 4e barrière seule: « Combien de tapis? — (Il met les barrières 1 à 3 et répond): 5 tapis parce qu'il y a 4 barrières. »

On présente 6 tapis serrés: « Combien de barrières il sautera? — 5 parce qu'il y a 6 tapis. Autrement s'il y avait 6 barrières, il faudrait en mettre une sur le dernier tapis. (Il série B1 plus grand que5, qu'il intercale ensuite.) »

Supposons que nous ayons 10 poupées de tailles différentes. Ces dix poupées forment une classe et un enfant peut prendre une poupée au hasard et encore une autre poupée; la sous-classe ainsi réalisée aura deux poupées et la classe restante huit poupées. Il n'a pas opéré de choix: ce qui l'intéresse c'est la qualité « poupée », pour lui elles ont toutes cette qualité et il est absolument indifférent de prendre une poupée plutôt qu'une autre, chacune de ces unités est équivalente. Il n'a fait jusqu'ici que de la cardination. S'il ordonne les poupées par rang de taille, il s'apercevra qu'au rang va correspondre une taille, obligatoirement, et que la plus petite occupera le 10e rang; il fait alors de l'ordination. Une qualité spéciale de la poupée, la taille, a déterminé la sériation de la plus grande à la plus petite. Si le maître lui demande de prendre les trois premières, l'enfant devra saisir trois poupées (cardination) mais ce sera la 1e, puis la 2e, puis la 3e (ordination).

Nous voyons par cet exemple que la cardination et l'ordination obéissent à des impératifs bien distincts parfois, mais aussi, d'autres fois, étroitement imbriqués; en effet: « la 1e, puis la 2e, puis la 3e » il y a là une idée d'addition sous-jacente, donc de cardination.

Il n'est pas nécessaire non plus qu'une différence existe entre les unités pour justifier l'idée d'ordination; si l'enfant réalise une série de boutons ronds, rouges et à deux trous, donc absolument semblables, chaque bouton occupera un rang déterminé et la seule différence sera que n'importe quel bouton pourra être mis à la place d'un autre sans que ni la cardination ni l'ordination ne soient changées. M. Piaget s'exprime ainsi à ce sujet:

« Un nombre cardinal est une classe dont les éléments sont conçus comme des « unités » équivalentes les unes aux autres et cependant comme distinctes, leurs différences consistant seulement en ceci que l'on peut les sérier, donc les ordonner. Inversement, les nombres ordinaux sont une série dont les termes, tout en se succédant selon les relations d'ordre qui leur assignent leurs rangs respectifs, sont également des unités équivalentes les unes aux autres et par conséquent susceptibles d'être réunies cardinalement. Les nombres finis sont donc nécessairement à la fois cardinaux et ordinaux. »

*

La troisième et dernière partie en vient aux opérations numériques.

La composition additive des classes

L'auteur imagine un jeu de perles, les unes brunes, les autres blanches; mais elles ont une qualité commune: elles sont toutes en bois. Il met ainsi en action une classe composée de deux sous-classes. La classe a une qualité générale: être en bois; la première sous-classe a en plus une qualité particulière (couleur): être brune, et la deuxième sous-classe a, elle, en plus également, la qualité d'être blanche. L'enfant doit avoir constamment à l'esprit la ressemblance (en bois) et les différences (couleurs), la première constituant la classe et les secondes les sous-classes. Il semble que cette mémorisation, qui paraît si simple, est impossible pour les enfants des stades I et II parce qu'ils en sont au stade de la perception: ils doivent donc traduire avec des perles, matériellement, le problème posé. Or, quand ils ont assemblé les perles brunes et les perles blanches, ils sont d'accord qu'ils ont un collier en perles de bois; mais si nous leur demandons si ce collier est plus long que le collier en perles brunes, ils ne peuvent pas répondre parce que ce collier n'existe pas; pour répondre ils devraient défaire le collier en perles de bois, mais ils ne le posséderaient plus comme élément de comparaison. En bref, nous voyons que rien ne s'est encore intériorisé et que la réversibilité (qualité mentale par excellence) ne peut jouer. Il faut donc attendre le moment où l'enfant sera capable mentalement de faire et défaire les colliers, pour le trouver enfin apte à résoudre cette opération portant sur des classes: $A+B=C$; $C-B=A$; $C-A=B$.

De la composition additive des classes à celle des nombres

L'addition de classes ci-dessus pourrait être transcrite sous cette forme: 7 perles brunes en bois + 2 perles blanches en bois = 9 perles en bois.

Il est clair que l'idée de classe est ici prédominante, mais abondonnons les particularités propres aux deux classes; nous pourrons écrire:

7 perles en bois + 2 perles en bois = 9 perles en bois,

ou encore plus simplement:

7 perles + 2 perles = 9 perles.

Relation qui signifie que ces perles sont toutes, et en tout, semblables, puisque nous avons abondonné leurs signes particuliers; ce faisant ces perles sont toutes équivalentes; en conséquence nous pourrions aussi bien écrire: 7 p. + 2 p. = 9 p. que 2 p. + 7 p. = 9 p.

ou 4 p. + 5 p. = 9 p. L'équivalence entre les unités est précisément une des caractéristiques de la composition additive des nombres. L'autre des caractéristiques est que les unités sont distinctes en ce sens qu'elles sont posées côte à côte, ce qui nous permet à n'importe quel moment de stabiliser la formation; par exemple (6 + 3) et de déterminer avec précision quelle perle est la 7^e^ ou la 5^e^ ou la 9^e^, étant bien entendu que nous pouvons permuter la 9^e^ contre la 7^e^ ou la 2^e^ contre la 8^e^ puisque les perles sont équivalentes et le total invariant. Voici la définition que M. Piaget nous donne:

« Un nombre est à la fois une classe et une relation asymétrique, les unités qui le composent étant simultanément additionnées en tant qu'équivalentes et sériées en tant que différentes les unes des autres. »

Les relations arithmétiques de partie à tout

L'opération additive est constituée lorsque le tout est considéré comme invariant, quelle que soit la distribution de ses parties.

M. Piaget imagine cette histoire test:

« Un jour maman te donne 3 carrés de chocolat à dix heures et 3 carrés à quatre heures. »

On concrétise la chose par

1er jour: 3 boutons et 3 boutons

« Le lendemain, elle t'en donne autant

3 boutons et 3 boutons

mais comme tu n'as pas faim à dix heures, tu n'en manges qu'un le matin et tous les autres l'après-midi. »

Sous les yeux de l'enfant, on passe deux boutons du tas de gauche au tas de droite.

2e jour: 1 bouton et 5 boutons.

On fait alors comparer les deux tas du 1er jour (3 + 3) et les deux tas du 2e jour (1 + 5); on demande à l'enfant s'il en a mangé autant chaque jour.

En cas de réponse négative on lui fait dire le pourquoi: probablement que la densité 5 du second après-midi attire seule son attention et il en déduit que 5 est plus grand que 3 sans se préoccuper de ce qui s'est passé le matin ou vice versa. Nous saisissons encore une fois qu'il y a là un problème d'invariance des totaux reçus chaque jour, et en plus, un problème de compensation inverse.

1er jour	2e jour
$3 + 3 = 6$	$3 + 3 = 6$
	$(3 - 2) + (3 + 2) = 6$

« L'apparition des opérations numériques se caractérise par un processus d'égalisation des différences. »

Mettons devant l'enfant deux groupes de jetons, l'un de 7 jetons et l'autre de 3. Faisons-lui montrer le tas où il y a le plus de jetons et celui où il y en a le moins, puis demandons-lui de les arranger de façon que lui et moi ayons le même nombre de jetons. Il est curieux de constater que l'enfant commence toujours par isoler la partie commune aux deux parts (en l'occurrence 3 jetons) puis procède au partage de la différence 4, soit jeton par jeton, soit par groupes de deux.

Nous voyons que ce processus contient des opérations très variées:

D'abord cette partition asymétrique de 7 en fonction des 3 jetons communs: $3 + 4 = 7$; puis cet isolement de la différence « 4 » afin d'en opérer le partage, isolement qui n'est rien autre qu'une soustraction opérée à 7; cette recherche de la partie commune cache l'égalité $3 = 3$; enfin le partage de la différence est une division en vue d'obtenir deux parts égales à deux ce qui sous-entend une multiplication. Nous saisissons ainsi toute la complication de ce calcul et surtout les imbrications des quatre opérations qui ne sauraient être maîtrisées si l'enfant n'était capable de les concevoir mentalement. Cette fois encore: intériorisation, projection vers le futur (les actes à réaliser), réversibilité, addition — soustraction, multiplication — division.

« *Composer des équivalences* (par exemple 9 œufs bleus dans 9 coquetiers, puis 9 œufs rouges dans ces mêmes coquetiers) *puis opérer des correspondances entre ces équivalences, c'est mettre sur pied une composition multiplicative.* »

Supposons que nous ayons x coquetiers, y œufs bleus et z œufs rouges; nous faisons mettre tous les œufs dans les coquetiers, nous en concluons qu'il y a autant d'œufs bleus que de coquetiers, équivalence que nous écrivons $x = y$; nous faisons procéder de même avec les œufs rouges et constatons également l'équivalence $x = z$. A ce moment nous posons la question: y a-t-il autant d'œufs bleus que de rouges? Dans ce cas il n'y a pas eu correspondance entre les œufs bleus et les œufs rouges; l'enfant est obligé de concevoir cette correspondance entre deux équivalences uniquement sur le plan mental.

Une fois franchie cette étape, l'enfant est prêt à généraliser à n collections les constatations faites au sujet de deux collections.

Gros (5 ans 10 mois) est convaincu de l'équivalence $X = Z$, si $X = Y$ et si $Z = Y$: « Si je mets toutes ces fleurs $(X + Z)$ dans ces vases (Y), il y en aura combien par vase? — 1 bleue et une rose. — C'est combien? — 2 — Et si je redonnais ça (une nouvelle collection de 10) il y en aurait combien par vase? — 3 — Pourquoi? — J'en mettrais une, une, une. — Et maintenant si on a l'idée de les mettre dans des pots qui n'auront qu'une fleur par pot? — (Il prépare 10 + 10 + 10 pots.) »

Dans le dernier chapitre, M. Piaget montre que, par des exercices de mesurage (récipients et transvasages variés) judicieusement choisis, il est possible de recréer toutes les situations imaginées au cours des chapitres consacrés aux grandeurs discontinues.

« Mesurer et calculer suivent, dans l'entendement de l'enfant, la même voie et mènent au même but. Mesurer, c'est composer des unités qui se conservent, et introduire entre ces compositions un système d'équivalences. Créer une unité de mesure, l'utiliser correctement dans des manutentions qui forcent le raisonnement, c'est calculer. »

Ces quelques citations nous font saisir dans quelle estime M. Piaget tient ces exercices simples et efficaces.

Arrivé au terme de cette étude, nous devons nous demander comment il se fait qu'une œuvre aussi pertinente n'ait pas plus tôt imprégné notre école et dirigé son effort.

D'autre part, celui qui suit le renouveau de l'enseignement des mathématiques ne peut être que frappé et converti par la similitude des points de vue du psychologue et du mathématicien. Il y a, dans les manifestations qui accompagnent la naissance de l'esprit de logique, une ressemblance frappante avec les nouvelles théories en mathématique. Il y a quelques années on s'est enfin aperçu que l'enfant entrant à l'école n'est pas une être inculte: il sait construire des phrases cohérentes qui témoignent d'une intelligence certaine. Alors, pourquoi faire table rase et commencer à zéro par des jambages, des lettres, des syllabes?

Ce même enfant, nous enseigne M. Piaget, a des expériences en mathématique: il peut nous dire s'il a toutes ses billes dans la main ou s'il en a oublié quelques-unes sur le chemin et lesquelles (la rouge, la bleue et la jaune) ou encore, s'il les a toutes perdues et qu'il ne lui en reste point. Nous voyons là une mathématique de classes, rudimentaire, et même un essai de nombrer.

Nous nous réjouissons de cette heureuse conjonction des vues du psychologue et du mathématicien et, pour que notre bonheur soit complet, nous espérons voir se joindre à ce duo le pédagogue qui a tout à gagner à cette confrontation.

B. Beauverd,

Inspecteur scolaire, Lausanne