Zeitschrift: Wissen und Leben

Herausgeber: Neue Helvetische Gesellschaft

Band: 5 (1909-1910)

Artikel: Über Leonhard Eulers Verdienste um Wahrscheinlichkeitsrechnung und deren Anwendungen

Autor: Pasquier, L. Gustav du

DOI: https://doi.org/10.5169/seals-750926

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Mehr erfahren

Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. En savoir plus

Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. Find out more

Download PDF: 12.07.2025

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, https://www.e-periodica.ch

Techniken, ebenso vielleicht ein Eingehen auf Stauffers Verhältnis zu einzelnen modernen Meistern wie Hans von Marées, Leibl, Klinger.

ZÜRICH. E. CARO.

□□□

ÜBER LEONHARD EULERS VERDIENSTE

UM WAHRSCHEINLICHKEITSRECHNUNG UND DEREN ANWENDUNGEN

Die schweizerische naturforschende Gesellschaft hat ein großartiges Unternehmen in die Wege geleitet, als sie am 6. September 1909 in ihrer Jahresversammlung zu Lausanne den denkwürdigen Beschluss einstimmig fasste, eine Gesamtausgabe von Leonhard Eulers Werken in der Originalsprache zu veranstalten. Der größte unter den schweizerischen Mathematikern, dem dadurch ein bleibendes Denkmal gesetzt werden wird, hat ein Werk hinterlassen, in welchem mit lichtvoller Klarheit die verschiedensten Gebiete menschlichen Wissens und menschlicher Tätigkeit behandelt werden. Nicht nur die reine Mathematik beherrschte Leonhard Euler mit seltener Geistesgröße und förderte sie in damals ungeahntem Maße; auch zahllose Anwendungen sind ihm zu verdanken. Er verstand es, jedes Thema so klar darzustellen, ohne Vernachläßigung wissenschaftlicher Strenge in so gemeinverständlicher Weise zu behandeln, dass die Lektüre seiner Abhandlungen ein wahrer Genuss ist; als Zeugnis seien hier nur seine *„Briefe an eine deutsche Prinzessin“* hervorgehoben. — Natürlich sind im Riesenwerk, das 43 Quartbände zählen wird, auch nicht-mathematische Gebiete reichlich vertreten. So z. B. fühlte sich Leonhard Euler, der mit kindlicher Frömmigkeit bis an sein Lebensende am Glauben seiner Väter festhielt, bei einem Anlaß gedrungen, eine *„Rettung der Offenbarung vor den Freygeistern“* zu publizieren[1]).

[1]) Leonhard Euler wurde am 15. April 1707 zu Basel geboren und starb in Sankt Petersburg am 18. September 1783. Über seine Biographie s. die Abhandlung „Leonhard Euler“ von Herrn Professor Dr. F. Rudio in der „Vierteljahrsschrift d. naturf. Ges. Zürich“, Jahrgang 53, 1908.

Im vorliegenden Aufsatz soll nun ein sehr kleiner Teil von Leonhard Eulers Riesenwerk besprochen werden: die Wahrscheinlichkeitsrechnung und ihre Anwendungen, ein Gebiet, das gegenwärtig die Aufmerksamkeit immer weiterer Kreise auf sich zieht, weil diese Disziplin in Zweige der Praxis hinüberschlägt, deren Wichtigkeit von Tag zu Tag größer wird, ein Gebiet endlich, in welchem Leonhard Eulers Arbeiten bahnbrechend gewesen sind.

Nicht weniger als 15 Abhandlungen Eulers (10 in französischer, 4 in lateinischer und 1 in deutscher Sprache) beziehen sich auf Wahrscheinlichkeitsrechnung und ihre direkten Anwendungen. Auch in seinen *Briefen* hat Euler gelegentlich dieses Gebiet gestreift. So hat er zwei einschlägige Gutachten, beide in Briefform, für Friedrich II., König von Preußen, abgefasst: das erste im Jahr 1749 über die Genueser staatliche Zahlenlotterie, das zweite im Jahr 1763 über die Frage, ob es geeignet wäre, eine Staatslotterie nach dem Projekt eines Herrn von Griethausen aus Holland einzuführen. Im Anschluss an das erste Gutachten soll hier zunächst diese Frage der Staatslotterien erörtert werden.

Die Wiege des Zahlenlottos ist am wahrscheinlichsten *Genua*, wo schon in alter Zeit das Glückspiel heimisch war, vielleicht infolge des Zusammenströmens von vielen Seeleuten; dies erklärt auch den Namen „genuesische Lotterie“ oder „genueser Zahlenlotto“. Der historische Ursprung hat folgenden Hintergrund. In *Genua* war es Brauch, die neuen Ratsherren *durch das Los* aus der Zahl der Kandidaten zu wählen: unter 100 Senatoren wurden alljährlich 5 Jahresbeamte auf diese Art bestimmt. Die Bevölkerung der Stadt, von jeher den Zufallsspielen sehr geneigt, wettete nun, auf wen das Los fallen werde. Ein Spieler stellte zum voraus eine Fünfmännerliste auf; wenn dann das Los eine Reihe ergab, die mit dieser Liste ganz oder teilweise übereinstimmte, wurde ihm ein bestimmtes Vielfache seines Einsatzes ausbezahlt. Als diese Art von Wetten volkstümlich wurden, übernahmen zunächst Privatbanken, später die Regierung, das ganze Geschäft und betrieben es mit großem Vorteil. Die Namen der Ratsherren wurden bald durch einfache Zahlen ersetzt; an Stelle von 100 trat 90, und damit war das „Genueser Zahlenlotto“ entstanden. Als sein Erfinder wird Benedetto Gentile, Ratsherr zu Genua, angegeben und dort soll 1620 zum ersten Mal das Lottospiel vor sich ge-

gangen sein. Der Staat suchte den Ziehungen des Zahlenlottos in den Augen der Bevölkerung eine gewisse Weihe zu geben, indem er dabei kirchliche Feierlichkeiten veranstaltete. Aber die Genueser scheinen schon damals den Wert des Spieles richtig erkannt zu haben, denn es ging die Sage, wie Volkmann in seinen historisch-kritischen Berichten von Italien (1771), Bd. III, berichtet, der Ratsherr Benedetto Gentile sei zum Dank für seine Erfindung vom Teufel in eigener Person geholt worden.

Nichtsdestoweniger war die Beteiligung an diesen Wetten eine äusserst lebhafte, und ist es übrigens auch heute noch. — Bereits am Ende des 15. Jahrhunderts mußten zahlreiche Zufallsspiele „als unmoralisch und als Ursache des Ruins vieler Familien" durch strenge Edikte verboten werden. Auch das Zahlenlotto, das seltsamerweise auch „Giuoco del Seminario" hieß, wurde zu wiederholten Malen untersagt. Als sich aber die Republik Genua in einer Geldverlegenheit befand, weil sie eine halbe Million zu Festungszwecken ausgegeben hatte, verpachtete sie (1643) die Spiellizenz an einen Unternehmer. Das Beispiel wurde bald in andern Städten in der Weise nachgeahmt, dass man die Namen von 90 armen Mädchen in eine Urne legte und den fünf Gewinnerinnen eine „Lottomädchenaussteuer" gab, z. B. in Parma, Mailand, Venedig, Savoyen. — Im *Kirchenstaat* ist der Gewissenskonflikt zwischen Staat und Fiskus besonders interessant. Der päpstliche Hof, der diese Lotterie ursprünglich gar nicht dulden wollte und die schärfsten Edikte gegen sie erließ, sah sich schließlich wider Willen gezwungen, selbst eine Lotterie anzulegen, „weil sonst alles Geld in die andern Staaten hinausgezogen wurde," was gegen einen der wichtigsten Grundsätze der merkantilistischen Theorie verstieß, welche damals als höchste Staatsweisheit galt.

Von Italien aus nahm das Lotto seinen Weg nach Österreich, Frankreich, Deutschland; es war ein förmlicher Siegeszug: 1751 Einführung in Wien, 1757 in Paris, 1763 in Berlin durch Friedrich den Großen, 1771 gab es deren 26 in Deutschland. Erst 1861 verschwand die letzte (eine bayrische) Zahlenlotterie aus deutschen Gauen. Zurzeit können sich nur noch zwei Staaten, Italien und Österreich, seines Besitzes rühmen.

Auf die Gründe der Einführung und Beibehaltung, ebenso auf die äußerst verderblichen Folgen dieses Hazardspiels soll hier

nicht eingegangen werden, sondern wir wollen nur die mathematischen Spekulationen andeuten, zu denen Leonhard Euler durch diese Institution veranlaßt worden ist. Leonhard Euler hat dieses Spiel der mathematischen Analyse unterworfen und zahlreiche darauf bezügliche Fragen untersucht. Seither ist das mathematische Interesse dauernd diesem Gegenstand erhalten geblieben.

Bekanntlich versteht man unter der „mathematischen Wahrscheinlichkeit eines Ereignisses oder eines Erfolges" einen echten Bruch, dessen Nenner die Gesamtanzahl aller überhaupt möglichen Fälle einer bestimmten Art zählt, und dessen Zähler angibt, wie viele von diesen Fällen dem Ereignis, oder dem Erfolge, günstig sind. Bei der genuesischen Zahlenlotterie — an diesem konkreten Beispiel möge die vorige Definition erläutert werden — ist die Wahrscheinlichkeit, im „Nominatspiel" zu gewinnen, gleich $\frac{1}{90}$; der Spieler wählt nämlich im voraus eine einzelne, bestimmte Zahl, sagen wir: die Nummer 19, und wettet darauf, dass diese Nummer an bestimmter Stelle, sagen wir: beim zweiten Zug aus der Urne (beim zweiten „Ruf"), erscheinen werde. Was vorhin als „Ereignis" oder „Erfolg" bezeichnet wurde, besteht hier in dem Herauskommen von Nummer 19 beim zweiten Zug. — Die Wahrscheinlichkeit, beim „Extraktspiel" oder „beim unbestimmten Ruf" zu gewinnen, ist $\frac{5}{90} = \frac{1}{18}$; der Spieler wettet nämlich darauf, dass die von ihm gewählte Zahl unter den fünf gezogenen überhaupt herauskommen werde, bei irgend einem der fünf Züge, gleichgültig bei welchem. — Das „Ambospiel" besteht in dem Erraten von *zwei* Zahlen unter den fünf aus der Urne gezogenen; ein „Terno" wird gewonnen, wenn *drei*; eine „Quaterne", wenn *vier*; und eine „Quine", wenn *alle fünf* von den aus der Urne gezogenen Zahlen richtig erraten werden. Die betreffenden Gewinnwahrscheinlichkeiten sind: beim Ambo 1 : 400,5; beim Terno 1 : 11,778; bei der Quaterne 1 : 511,038; bei der Quine 1 : 43,949,268. Um „gerecht" zu sein, müßte die Lotterieunternehmung den Spieler im Gewinnstfalle nach diesen Verhältniszahlen entschädigen. Das tut sie indessen nicht, sondern ein gewinnender Spieler bekommt in Österreich, oder bekam, beim „Nominatspiel" das 67fache seines Einsatzes (statt des 90fachen); beim „Extraktspiel" das 14fache; beim „Ambo" das 240fache; beim „Terno" das 4800fache;

bei der „Quaterne“ das 60,000 fache; bei der „Quine“ das 1,100,000 fache seines Einsatzes.

Außer den oben zitierten Briefen an den König von Preußen hat Leonhard Euler noch *drei* längere Abhandlungen dem Genueser Zahlenlotto gewidmet. Die eine wurde am 9. Oktober 1781 der Petersburger Akademie der Wissenschaften vorgelegt (abgedruckt erst 1785 in den *Opusc. analyt. II, pag. 331—346*) und trägt den Titel: *„Solutio quarundam quæstionum difficiliorum in calculo prababilium.“* („Lösung einiger schwierigen Fragen aus der Wahrscheinlichkeitsrechnung.“) Der Verfasser behandelt und erledigt folgende Fragen: Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass nach Beendigung einer gegebenen Anzahl von Ziehungen alle 90 Nummern, von 1 bis 90, als Gewinnummern zum Vorschein gekommen sind, oder wenigstens 89 von ihnen, oder wenigstens 88, oder weniger? — Um die Aufgabe möglichst allgemein zu behandeln, ersetzt Euler die speziellen Zahlen 90 und 5 durch algebraische Symbole m und i.

Zu den interessanten Aufgaben der Wahrscheinlichkeitstheorie gehört die Frage nach den *Sequenzen.* Wenn unter den Gewinnnummern zwei oder mehr aufeinanderfolgende Zahlen der natürlichen Zahlenreihe erscheinen, so wird dadurch eine „Sequenz“ gebildet. Wenn zum Beispiel die Zahlen 19, 20, 21, 40, 41 gezogen werden, so enthalten sie: 1 Dreier- und 3 Zweiersequenzen. Wie groß ist nun die Wahrscheinlichkeit, dass bei einer Ziehung eine Sequenz auftrete? Euler hat auch dieses Problem in dem der k. Berliner Akademie der Wissenschaften anno 1765 vorgelegten (1767 in den *„mémoires de l'Académie roy. d. Berl.“*, 1765, *p.* 191—230 veröffentlichten) Aufsatz: *„Sur la probabilité des séquences dans la loterie gênoise“* aufgeworfen und erledigt.

Eine der k. Berliner Akademie der Wissenschaften am 10. März 1763 vorgelesene Abhandlung: *„Réflexions sur une espèce singulière de loterie, nommée loterie gênoise“* (erst 1862 in den *Op. postuma*, Bd. I, *pag.* 319—335 publiziert) enthält eine Beschreibung und ausführliche Theorie des Genueser Zahlenlottos. Die Aufgabe wird ganz allgemein erledigt, mit n die Gesamtanzahl der Nummern, mit t die Anzahl der bei jeder einzelnen Ziehung herausgehobenen bezeichnet. Zum Schlusse wird dann für die beiden Fälle $n = 90$, $t = 5$, der das gewöhnliche Genueser Zahlen-

lotto ergibt, und $n = 100$, $t = 9$, ein ausführlicher Plan einer solchen Lotterie ausgerechnet und aufgestellt, zunächst „nach den strengsten Gesetzen von Recht und Billigkeit“, d. h. so, dass weder der Unternehmer, noch der Spieler, Verlust oder Gewinn zu gewärtigen haben; dann der Art, dass die Unternehmung einen im voraus festgesetzten Profit erwarten darf.

Soll ein Glückspiel von Anfang an den Forderungen der Billigkeit genügen, so müssen Einsätze und Gewinnaussichten gegeneinander abgewogen sein. Dies lässt sich am einfachsten unter Anwendung des Begriffes der sogenannten „mathematischen Hoffnung“ erreichen. Unter diesem Namen versteht man ein Produkt aus zwei Faktoren: der erste ist die Summe, die ein Spieler riskiert, der zweite ist die Wahrscheinlichkeit, sie zu gewinnen. Wenn von drei Spielern der erste die Summe von 20,000 Fr. mit der sehr geringen Wahrscheinlichkeit $\frac{1}{10,000}$, der zweite die Summe von 60 Fr. mit der Wahrscheinlichkeit $\frac{1}{30}$ gewinnen kann, während der dritte den Betrag von 2 Fr. als sichern Besitz in seiner Tasche hat, so ist für alle drei die „mathematische Hoffnung“ dieselbe, weil $20000 \times 0,00001 = 60 \times \frac{1}{30} = 2 \times 1$ ist. Es gilt nun folgender Grundsatz: Soll ein Glückspiel nach Billigkeit geordnet sein, so muss die „mathematische Hoffnung“ für jeden Spieler, inbegriffen den Spielhalter oder die Spielbank, genau gleich sein.

Über den Begriff der *mathematischen Hoffnung* ist gerade damals sehr viel diskutiert worden, und diese Benennung hat naturgemäß zu manchen Missverständnissen Anlaß gegeben. Es ist ein lehrreiches Beispiel dafür, dass unter Umständen der einem Ding gegebene Name die Wirkung hat, dass dem Ding Eigenschaften beigelegt werden, die mit seinen Merkmalen nicht notwendigerweise zusammenhängen. Wenn das Produkt aus Gewinnsumme und Wahrscheinlichkeit als „mathematische Hoffnung“ bezeichnet wird, so ist das zunächst weiter nichts als ein Name für eben dieses Produkt; weil nun aber das Ding „Hoffnung“ heißt und dazu noch „mathematische“, und weil es zugleich wie eine Geldsumme in Franken und Rappen ausgedrückt wird, so schiebt sich fast unbewusst und unvermerkt die Deutung unter, dass einer solchen „Geldsumme“ auch ohne weiteres der gleiche Wert innewohne, wie einem sichern physischen Besitz, der auf

dieselbe Anzahl von Franken und Rappen lautet. Man darf sehr wohl die Vermutung aufstellen, dass eine solche Unterschiebung weniger leicht eingetreten wäre, wenn man statt der Bezeichnung „mathematische Hoffnung“ irgend ein an sich nichtssagendes Wort, zum Beispiel „beillnoru“ oder dergleichen, gewählt hätte.

Wegen der philosophischen und metaphysischen Betrachtungen, die daran geknüpft wurden, sei hier eine in der Geschichte der Wahrscheinlichkeitsrechnung berühmt, oder wenn man will, berüchtigt gewordene Aufgabe gestreift: das sogenannte *Petersburger Problem*, dem Euler auch eine Abhandlung gewidmet hat: „*Vera aestimatio sortis in ludis*“ („Die wahre Wertung des Glücks in den Spielen“). *A* spielt mit *B* zu folgenden Bedingungen: es wird ein Würfel geworfen; fällt eine gerade Augenzahl beim ersten Wurf, so zahlt *A* dem *B* 1 Franken, fällt die gerade Augenzahl erst beim zweiten, oder beim dritten, oder vierten, oder fünften ..... Wurf, so zahlt *A* dem *B* dagegen 2, oder 4, oder 8, oder 16, ... Franken. Wie hoch ist der Einsatz zu bemessen, den *B* „gerechterweise“ dem *A* als Gegenleistung auszuhändigen hat? Man findet nämlich einen *unendlich* großen, wenn man den Ansatz von den gleichen mathematischen Hoffnungen auf diesen Fall anwendet und zulässt, dass das Spiel *beliebig lang* fortgesetzt werden kann. Die Aufgabe wurde 1713 von Niklaus Bernoulli gestellt, und weil auch der erste Lösungsversuch in den Veröffentlichungen der Petersburger Akademie erschien, erhielt die Aufgabe selbst den Namen „Petersburger Problem“. Euler trägt folgenden neuen Gedanken in die Diskussion hinein: bei Abwägung von Einsatz und Gewinnchancen müssen auch die Mittel des Spielers in Betracht gezogen werden, denn niemand verfüge über deren unendlich viele; ihre Vermehrung oder Verminderung sei nicht in arithmetischer, sondern in geometrischer Progression zu bemessen; ein Spieler werde sich nur dann „vernünftigerweise“ auf ein Spiel einlassen, bei welchem Verlust- und Gewinnchancen genau gleich groß sind, wenn er riskiert, dabei seine Mittel zum Beispiel entweder zu verdoppeln, oder um die Hälfte zu vermindern.

Das Petersburger Problem gab zu einem Angriff gegen die Prinzipien der Wahrscheinlichkeitsrechnung Anlaß, und über diesen Punkt ist in jener Periode eine ziemlich umfangreiche Literatur entstanden. Namentlich der Enzyklopädist J. L. d'Alembert zeigte

sich dabei als leidenschaftlicher Kämpfer. Er kommt mehrmals ausführlich auf die Frage zurück, wie groß die Wahrscheinlichkeit sei, mit einer Münze in 2 Würfen mindestens einmal „Kopf“ zu werfen. Bei der Wiederholung von Ereignissen nimmt die Theorie *jede* Kombination als gleich möglich und gleich wahrscheinlich an; zum Beispiel bei 10 maligem Aufwerfen einer Münze wird das 10 malige Erscheinen von „Kopf“ für gerade so wahrscheinlich angenommen, als ein beliebiger Wechsel von „Kopf“ und „Schrift“. Ist das berechtigt? frägt d'Alembert; er glaubt es nicht, sondern meint, dass, wenn schon 9 mal hintereinander „Kopf“ gefallen ist, es wahrscheinlicher sei, dass das nächste Mal „Schrift“ fallen werde, als wieder „Kopf“. Dabei würde also ein Einfluss des voraufgehenden Ereignisses auf das folgende angenommen werden. Die Größe dieses willkürlich angenommenen Einflusses früherer Würfe auf folgende kann d'Alembert natürlich nur hypothetisch angeben; aber er führt Gründe an, eigentlich nur Scheingründe, welche diese Ansicht stützen sollen. Euler drückt sich da in seinem oben zitierten Aufsatz vom 9. Oktober 1781 recht deutlich aus: „Dann müsste auf jeden folgenden Wurf *jeder* vorangehende, wenn er auch vor hundert Jahren und an irgend welchem Orte geschehen wäre, von Einfluss sein, ungefähr das Absurdeste, was man überhaupt ausdenken kann.“

Einen andern Punkt noch hatte d'Alembert kritisierend beleuchtet: Sieht man auf einem Tisch Buchstaben nebeneinander liegen, welche das Wort Constantinopolitanensibus bilden, oder welche alphabetisch aufeinanderfolgen, so wird kein Mensch annehmen, dass sie durch bloßen Zufall so angeordnet seien, trotzdem die Wahrscheinlichkeit der beiden Anordnungen aus den auftretenden Buchstaben, nach der geltenden Theorie, nicht geringer sein soll, als die Wahrscheinlichkeit einer willkürlichen und regellosen Aufeinanderfolge. In den ersten Fällen erkenne man eine Absicht, und eine solche müsse auch bei regelmäßigem Fallen der Münze angenommen werden; deswegen sei mehrmaliges Auffallen von „Kopf“ hintereinander unwahrscheinlicher, als Wechsel in den Flächen der Münze. — Aber auch hier drückt sich Leonhard Euler, im gleichen Aufsatz, wuchtig absprechend aus: „Mich schrecken die Einwürfe von d'Alembert nicht zurück, der versucht hat, diesen Kalkül zu verdächtigen. Zuerst nämlich hat dieser

bedeutende Geometer die mathematischen Studien beiseite gelegt; jetzt scheint er sie sogar zu bekämpfen, indem er unternommen hat, eine Reihe von Grundsätzen umzustürzen, die auf das Sicherste begründet sind. Den Laien mögen seine Einwürfe gewichtig erscheinen; doch die Furcht liegt ferne, dass die Wissenschaft selbst Schaden durch sie erleide.“ — Dieser felsenfesten und wiederholt ausgesprochenen Überzeugung Leonhard Eulers ist es größtenteils zu verdanken, dass sich die Mehrzahl der Mathematiker jener Zeit den Einwürfen d'Alemberts gegenüber ablehnend verhielt, dass sie es wohl der Mühe nicht für wert erachtete, darauf einzugehen, und dass der Ruf d'Alemberts so fast ohne Nachklang verhallte. Der Standpunkt Eulers hat sich als der richtige und fruchtbringende erwiesen.

Auch auf dem Gebiete der *Vermessungskunde* hat Leonhard Euler Bedeutendes geleistet. Verfeinerte Berechnungsmethoden sind hauptsächlich in solchen Wissenschaften notwendig, in welchen Theorie und Praxis zu gleicher Höhe der Ausbildung geführt worden sind. Zu einer solchen Ausbildung gelangten in der Jetztzeit namentlich *Astronomie* und *Geodäsie*. Daher findet in Astronomie und Vermessungskunde die Wahrscheinlichkeitsrechnung eine sehr wichtige Anwendung.

Die bewunderungswürdige Genauigkeit der astronomischen Tafeln ist nicht nur eine Folge der Güte der gemachten Beobachtungen, nicht nur eine Folge der Sicherheit, mit welcher diese Beobachtungen theoretisch begründet sind, sondern auch eine Folge der Zuverläßigkeit der Hilfsmittel, durch welche *die wahrscheinlichsten* Elemente der Bahnen der Gestirne aus der Menge der mannigfaltigen und einander widersprechenden Beobachtungen gefunden wurden. — Die bedeutenden Fortschritte in der Konstruktion geodätischer Instrumente, die bewundernswerte Feinheit, mit welcher gegenwärtig die trigonometrischen Vermessungen ausgeführt werden, würden nutzlos gewesen sein, wenn nicht gleichzeitig eine Verbesserung in den Berechnungsmethoden stattgefunden hätte. — *Dass* es überhaupt vorteilhafter sei, zahlreiche Beobachtungen zu vereinigen, als sich auf eine einzelne, mit genügender Sorgfalt ausgeführte Beobachtung zu beschränken, galt *vor* Euler keineswegs als ausgemacht; der Engländer Simpson zum Beispiel erzählt noch 1755, es gäbe namhafte Persönlichkeiten, die der

entgegengesetzten Ansicht huldigten. *Leonhard Euler* hat durch seinen großen Einfluss mit dazu beigetragen, der richtigen Ansicht: dass möglichst zahlreiche Beobachtungsresultate zu berücksichtigen und auszugleichen seien, definitiv zum Durchbruch zu verhelfen und eine Verbesserung in den Berechnungsmethoden zu erzielen.

Den Anlaß, sich speziell mit dieser Frage zu beschäftigen, gab ihm eine (1778 gedruckte) lateinische Arbeit des berühmten Basler Mathematikers Daniel Bernoulli „Über die am meisten wahrscheinliche Beurteilung von mehreren, einander widersprechenden Beobachtungen und die wahrscheinlichste, hieraus zu ziehende Schlussfolgerung." Euler deckt das willkürliche einer der Voraussetzungen, die Bernoulli gemacht hatte, auf und gibt dann eine bedeutend vereinfachte Lösungsmethode der gestellten Aufgabe. — Erwähnt sei noch eine zweite einschlägige Arbeit Eulers, der Petersburger Akademie am 27. November 1777 vorgelegt, gedruckt erst 1788, deren Titel den Inhalt genügend kennzeichnet: „*Eclaircissemens sur le Mémoire de Mr. de La Grange,* . . . ., concernant la méthode de prendre le milieu entre les résultats de plusieurs observations; dans lequel on examine les avantages de cette méthode par le calcul des probabilités, et où l'on résoud différens problèmes relatifs à cette matière."

Zu den Leistungen Eulers, die am meisten mit der Praxis verknüpft und von weittragender Bedeutung sind, gehören seine bahnbrechenden Arbeiten auf dem Gebiete des Versicherungswesens, drei in französischer, eine in leicht lesbarer lateinischer und eine in deutscher Sprache. Die zwei ersten stammen aus seiner Berliner Zeit (1741—1766) und fallen beide in das Jahr 1760 (gedruckt erst 1767). 1. „*Recherches générales sur la mortalité et la multiplication du genre humain.*" 2. „*Sur les rentes viagères.*" Zwei weitere hat Euler 1776, nach seiner völligen Erblindung, redigiert: 3. „*Éclaircissemens sur les Établissemens publics en faveur tant des veuves que des morts, avec la description d'une nouvelle espèce de Tontine aussi favorable au public qu'utile à l'État, calculés sous la direction de Monsieur Léonard Euler.* Par Mr. Nicolas Fuß." 4. „*Solutio quaestionis ad calculum probabilitatis pertinentis. Quantum duo coniuges persolvere debeant, ut suis haeredibus post utriusque mortem certa argenti summa*

persolvatur." („Lösung einer die Wahrscheinlichkeitsrechnung betreffenden Frage: wieviel zwei Ehegatten einzahlen müssen, damit, nach dem Ableben beider, ihren Erben eine bestimmte Geldsumme ausbezahlt werde."). — 5. „*L. Eulers nötige Berechnung zur Einrichtung einer Witwenkasse,*" durch Vermittlung von *A. G. Kästner* veröffentlicht in „Neues Hamburger Magazin", Bd. 43 (1770), *pag.* 3—12.

In überaus klarer und gemeinverständlicher Weise legt Euler in diesen Arbeiten die Prinzipien dar, auf welche eine Lebensversicherungsanstalt basiert werden muss, wenn sie auf die Dauer soll bestehen können. Das oben zitierte Hauptwerk „Éclaircissemens sur les Établissemens publics . . . . ." erlebte schon 1782 eine deutsche Übersetzung (durch J. A. Kritter in Göttingen). Die deutsche wie die französische Ausgabe fanden sehr zahlreiche Leser und trugen den Gedanken der Versicherung, sowie die ausgezeichneten Prinzipien, auf welche Euler sie stützte, in breite Schichten der Bevölkerung. — Der hier zur Verfügung stehende Raum gestattet ein näheres Eingehen auf diese Werke nicht. Nur ein Punkt möge als Zeugnis von Leonhard Eulers Ideenreichtum und schöpferischer Erfindungsgabe hervorgehoben werden.

n der zweiten Hälfte des 17. Jahrhunderts waren in Frankreich die vielgenannten *Tontinen* aufgekommen und hatten sich von dort auch nach andern Ländern verbreitet. Zur Erläuterung des Prinzips dieser Institution diene folgendes historische Beispiel: Um sich 100,000 Reichstaler zu verschaffen, eröffnete Friedrich III, Kurfürst von Brandenburg, im Jahr 1698 eine Tontine. Wer dem Staat Geld geben wollte, verpflichtete sich, 100 Reichstaler zu bezahlen. Dadurch erwarb er, oder eine von ihm bezeichnete Person, zum Beispiel sein Kind, Anspruch auf eine lebenslängliche Rente. Ihre Höhe blieb aber nicht ein für allemal fest, sondern stieg von Jahr zu Jahr, jedoch so, dass man nicht zum voraus angeben konnte, um wieviel. Dieses sichere, aber in bezug auf Raschheit unbestimmte Anwachsen der Leibrente hatte folgenden Grund: Der Kurfürst vergütete alljährlich die feste Summe von 5000 Reichstalern als Zins für das erhaltene Kapital. Diese konstant bleibende Summe von 5000 Reichstalern wurde nun jährlich unter die *noch lebenden* Rentenbezieher verteilt. Da aber jedes Jahr einige der Teilnehmer starben, bekam der Einzelne

offensichtlich immer mehr. Die Überlebenden waren, hinsichtlich des Rentenbetrages, die Erben der durch Tod ausgeschiedenen. Schließlich erhielt der Längstlebende die gesamte Rentensumme: 5000 Reichstaler, jährlich für sich allein, obgleich für ihn auch nur 100 Reichstaler eingezahlt worden waren. Beim Tode des zuletzt Überlebenden war der Staat von jeder Verpflichtung zu weiteren Leistungen befreit und die eingezahlten 100,000 Reichstaler ihm verfallen.

Im letzten Teil seines Hauptwerks über Versicherungswesen bemerkt Euler, dass den Vorteilen einer solchen Tontine folgende Unannehmlichkeiten als Nachteile gegenüberstehen: 1. Die Anzahl der Teilnehmer ist eine beschränkte. 2. Sobald die Tontine einmal funktioniert, dürfen neue Mitglieder nicht mehr eintreten. 3. Die Interessenten wissen nie zum voraus, wieviel sie im nächsten Jahr für ihr preisgegebenes Kapital beziehen werden, was leicht zu Misstrauen der Unternehmung gegenüber und zu Streitigkeiten Anlaß gibt. 4. Die zu entrichtende Einlage ist für alle gleich hoch und kann den Vermögensverhältnissen von Personen verschiedenen Standes nicht angepasst werden. 5. Personen der verschiedensten Altersstufen kommen in dieselbe Gruppe; dies bedeutet eine Ungerechtigkeit den ältern Jahrgängen gegenüber; denn für sie ist die Chance, zu den Längstlebenden zu zählen, geringer als für die jüngeren. 6. Man muss abwarten, ob und bis die erforderliche, nicht geringe Anzahl von Teilnehmern sich meldet. 7. Die Tontine muss aussterben: sie erlischt mit dem Tode des längstlebenden Mitgliedes.

Leonhard Euler hat nicht nur die Nachteile der gewöhnlichen Tontinen klar eingesehen, er hat auch die Idee zu einer gänzlichen Umformung dieser Institution gefasst. Er hat eine „kontinuierliche“ Tontine ersonnen, welche keinen der soeben angeführten Nachteile mehr hat, die aber doch das *Tontinenprinzip* realisiert, dessen charakteristisches Merkmal darin zu suchen ist, dass die Überlebenden irgend einer Gruppe den Anteil der verstorbenen Mitglieder derselben Gruppe erben[1]). Leonhard Eulers „kontinuierliche Tontine“ ist von zahlreichen Versicherungsgesell-

---

[1]) Näheres darüber siehe in meiner Abhandlung: „Leonhard Eulers Verdienste um das Versicherungswesen,“ erschienen in „Vierteljahrsschrift d. naturf. Ges. Zürich“. Jahrg. 54, 1909.

schaften faktisch durchgeführt worden. Dieses Prinzip, dem auch Leonhard Euler eine Gestalt verlieh, hat sich in sehr mannigfaltigen Institutionen verkörpert und schließlich eine Form gefunden, in welcher es die Gefahren früherer Systeme abgestreift hat und doch noch seine Wirkung ausübt: den Reiz zum Beitritt in eine Lebensversicherungsanstalt zu erhöhen.

Wie schon anfangs hervorgehoben, konnte in dieser kurzen Studie nur ein kleiner Teil von Leonhard Eulers Riesenwerk besprochen werden. Dieser große Meister hat auch auf dem Gebiet der Wahrscheinlichkeitsrechnung und ihrer Anwendungen die theoretischen Fragen, die er behandelte, in hohem Maße gefördert und für die Praxis Weittragendes geleistet. Alles ist in sehr klarem Stil geschrieben, unter häufiger Heranziehung veranschaulichender Bilder, sodass selbst Leser, die nicht Fachleute sind, dem Gedankengang des Verfassers leicht nachkommen und aus der Lektüre seiner Schriften hohen Genuss ziehen.

ZÜRICH Dr L. GUSTAV DU PASQUIER.

□□□

DIE RÖMISCHE NIOBIDE

Der Streit zwischen Rom und Mailand, welche von beiden Städten künftig die Ehre haben soll, diese in kurzer Zeit berühmt gewordene, der Banca Commerciale gehörige Statue zu beherbergen, hat jüngst die Aufmerksamkeit auch weiterer Kreise der im Sommer 1906 aufgefundenen Figur zugewendet und rechtfertigt es wohl, dass wir hier dem schönen Werke, das durch Photographien und Abbildungen in populären Zeitschriften auch dem Laien nicht völlig unbekannt geblieben, aber bisher in Abgüssen noch nicht verbreitet ist, einige Worte widmen, die von seiner Bedeutung und kunsthistorischer Stellung handeln.

Jedermann kennt die Gruppe der Niobe mit ihren Kindern in den Uffizien in Florenz, die rührende Figur der königlichen Mutter, in deren Schoß die jüngste Tochter flüchtet, der Pädagog mit dem bei ihm Schutz suchenden Knaben, die andern Söhne und Töchter in den mannigfachsten Stellungen der Flucht, der Angst, der Verwundung, des Sterbens. Weniger allgemein bekannt