

**Zeitschrift:** Bulletin de l'Association suisse des électriciens  
**Herausgeber:** Association suisse des électriciens  
**Band:** 5 (1914)  
**Heft:** 2

**Artikel:** Régimes permanents et changements de régime dans les circuits électriques  
**Autor:** Landry, J.  
**DOI:** <https://doi.org/10.5169/seals-1056617>

### **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. [Siehe Rechtliche Hinweise.](#)

### **Conditions d'utilisation**

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. [Voir Informations légales.](#)

### **Terms of use**

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. [See Legal notice.](#)

**Download PDF:** 25.12.2024

**ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>**

# SCHWEIZ. ELEKTROTECHNISCHER VEREIN

# BULLETIN

## ASSOCIATION SUISSE DES ÉLECTRICIENS

Erscheint monatlich mit den Jahres-Beilagen „Statistik der Starkstromanlagen der Schweiz“ sowie „Jahresheft“ und wird unter Mitwirkung einer vom Vorstand des S. E. V. ernannten Redaktionskommission herausgegeben.

Alle den Inhalt des „Bulletin“ betreffenden Zuschriften sind zu richten an das

Generalsekretariat

des Schweiz. Elektrotechnischen Vereins,  
Neumühlequai 12, Zürich 1 - Telephon 9571

Alle Zuschriften betreffend Abonnement, Expedition und Inserate sind zu richten an den

Verlag: Fachschriften-Verlag & Buchdruckerei  
A.-G., Zürich

Bahnhofstrasse 61, Zürich I (Telephon 6741)

Publié sous la direction d'une Commission de Rédaction nommée par le Comité de l'A. S. E.

Ce bulletin paraît mensuellement et comporte comme annexes annuelles la „Statistique des installations électriques à fort courant de la Suisse“, ainsi que l'„Annuaire“.

Prière d'adresser toutes les communications concernant la matière du „Bulletin“ au

Secrétariat général

de l'Association Suisse des Electriciens  
Neumühlequai 12, Zurich 1 - Téléphone 9571

Toutes les correspondances concernant les abonnements, l'expédition et les annonces, doivent être adressées à l'éditeur:

Fachschriften-Verlag & Buchdruckerei S. A.  
Zürich

Bahnhofstrasse 61, Zurich I (Téléphone 6741)

Abonnementspreis

für Nichtmitglieder inklusive Jahresheft und Statistik:  
Schweiz Fr. 15.—, Ausland Fr. 25.—.

Einzelne Nummern vom Verlage Fr. 1.50 plus Porto.

Prix de l'abonnement annuel (gratuit pour les membres de l'A. S. E.), y compris l'Annuaire et la Statistique, Fr. 15.— pour la Suisse, Fr. 25.— pour l'étranger.

L'éditeur fournit des numéros isolés à Fr. 1.50, port en plus.

V. Jahrgang  
V<sup>e</sup> Année

Bulletin No. 2

Februar 1914  
Février

### Régimes permanents et changements de régime dans les circuits électriques.

Par J. Landry, professeur, Lausanne.

Au cours de cette dernière décade, la littérature électrotechnique s'est enrichie d'un très grand nombre de travaux ayant pour objet l'étude des phénomènes dont les circuits électriques sont le siège soit en régime permanent, soit pendant la période troublée, généralement de courte durée, qui succède à tout changement de régime. La multiplicité de ces écrits et la diversité des sujets traités, s'expliquent aisément, car il n'est pas de problèmes plus variés, pouvant être envisagés sous plus de faces et présenter plus de particularités que ceux qui viennent d'être nommés.

Pendant longtemps, les ingénieurs spécialisés dans la technique des courants industriels ou courants « forts », ainsi qu'on a pris l'habitude de les nommer, purent se contenter des solutions auxquelles conduisent les lois générales quand on néglige certains éléments dont les effets ne deviennent appréciables que dans des conditions qui semblaient réservées à d'autres d'entre les nombreux domaines d'application de l'électricité. C'est ainsi qu'ils purent, tant que les distances à franchir et les tensions entre conducteurs des lignes de transmission restèrent modérées, négliger les effets des courants de déplacement dus aux capacités des conducteurs et admettre, sans pour cela commettre de grandes erreurs dans la poursuite des buts immédiats qu'ils avaient en vue, qu'en régime permanent, *intensité efficace* et *phase* des courants restaient invariables *dans toute l'étendue* des circuits ou des parties de circuits envisagés, tandis que l'élément *distance* n'intervenait que pour modifier la *valeur* et dans une certaine mesure aussi la *phase* des tensions.

Comme nous l'avons déjà indiqué ci-dessus, cette façon de procéder, soit le fait d'assimiler les circuits, quels qu'ils soient, à des circuits *localisés*, dits « remplaçants », composés de résistances, de self-inductances, voire même de capacités plus ou moins arbitrairement groupées et égales aux résistances, self-inductances et capacités *totales* des

circuits ou parties de circuits considérés, le mot «totale» étant pris au sens ordinaire, n'offre pas de grands inconvénients tant qu'on en limite l'application à la détermination des grandeurs caractérisant un régime permanent bien défini. Cela n'est vrai cependant que pour les fréquences qui sont celles des courants industriels ordinaires. Mais on pourrait commettre de grandes erreurs en l'étendant, par exemple, à l'étude des régimes permanents de circuits soumis à des forces électromotrices périodiques quelconques de fréquence élevée, et, à plus forte raison encore, à celle de circuits quelconques, en vue de déterminer le caractère et l'importance des tensions ou des intensités libérées lors de changements brusques dans le régime ou lors de ruptures d'équilibre en un point quelconque de l'un d'eux. Il est donc nécessaire dans ces cas de tenir compte du caractère «distribué» des constantes des circuits, c'est-à-dire d'avoir recours aux équations complètes qui font apparaître tensions et courants comme des fonctions de l'espace et du temps ou, si l'on veut venir à bout des problèmes posés sans sortir du domaine des représentations ordinaires, de définir, dans chaque cas, les constantes à donner aux parties constitutives de circuits localisés non seulement «remplaçants» mais réellement «équivalents» aux circuits réels à constantes distribuées.

Au moment où les Electriciens Suisses s'apprêtent à un échange de vues sur la question si débattue des surtensions et des surintensités, ainsi que sur les moyens d'en prévenir ou d'en atténuer les effets, il a paru utile d'exposer dans le Bulletin, en vue de les répandre un peu plus qu'elles ne le sont peut-être, les notions ou représentations dont ceux que ces sujets intéressent doivent être en possession. Il s'agit donc ici de généralités exposées systématiquement et présentées d'une façon aussi élémentaire que possible.

Avant de passer au vaste chapitre des changements de régime, il nous a paru opportun de nous arrêter quelques instants aux régimes permanents des circuits à courant continu et à courants alternatifs, non sans avoir d'abord rappelé l'origine et le sens des équations dont il pourra être fait usage dans la suite.

#### Équations d'un circuit électrique.

1<sup>o</sup> Considérons (fig. 1) un circuit fermé quelconque dans lequel agisse une force électromotrice de générateur  $e = f(t)$  et dont les différents éléments soient, ainsi qu'on l'admet souvent, totalement dépourvus de capacité et parfaitement isolés. Sous l'effet de  $e = f(t)$ , ce circuit deviendra le siège d'un courant d'intensité  $i$  telle qu'en chaque instant on ait:

$$(1) \quad e = f(t) = Ri - \Sigma(e'),$$

expression dans laquelle  $R$  représente la résistance totale du circuit, y compris celles du générateur et des récepteurs pouvant être compris dans le circuit, et  $\Sigma(e')$ , la somme de toutes les forces électromotrices de récepteurs, de self- et de mutuelle inductance, y compris les tensions propres de condensateurs s'il y en a qui soient insérés en série dans le circuit. Certaines de ces forces électromotrices ou tensions étant proportionnelles soit à la

vitesse de variation du courant  $i$  (forces électromotrices de self-inductance =  $-L \frac{di}{dt}$ )

soit à la vitesse de variation des courants localisés dans des circuits voisins du circuit considéré (forces électromotrices de mutuelle inductance =  $-M \frac{di''}{dt}$ ), soit encore à la valeur

instantanée de la charge  $q = \int idt$  (tensions de condensateurs =  $-\frac{1}{C} \int idt$ ), la détermination de l'intensité  $i$  du courant à chaque instant revient en général, à l'intégration d'une équation différentielle ordinaire ou d'une groupe d'équations différentielles simultanées (cas de circuits voisins en couplage magnétique plus ou moins rigide avec le circuit considéré.)

Ainsi, dans le cas représenté fig. 2, qui reproduit le schéma du circuit de charge d'un condensateur de capacité  $C$  connecté à une source de courant de force électromotrice

constante  $E$ , par des conducteurs de résistance  $R$  et de self-inductance  $L$ , l'application de ce qui précède conduit à l'équation différentielle:

$$(2) \quad E = Ri + L \frac{di}{dt} + \frac{\int idt}{C},$$

de laquelle il est facile de tirer  $i = \varphi(t)$  dès que l'on s'est fixé des conditions bien déterminées aux limites.

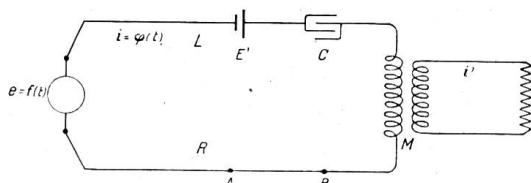


Fig. 1.

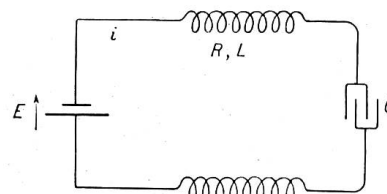


Fig. 2.

L'intensité du courant étant trouvée, il est possible de déterminer la valeur de la différence de potentiel régnant *entre* deux points quelconques du circuit, tels que les points A et B, figure 1, tension pour laquelle on a immédiatement:

$$(3) \quad v_{AB} = R_{AB}i - \sum_{AB}(e')$$

Les lois représentées par l'équation (1) pour le circuit entier schématisé par la figure 1 et par la formule (3) pour une portion quelconque AB du même circuit ne sont pas autre chose que des expressions de la *loi d'Ohm*, certes bien connue de tout le monde.

2<sup>o</sup> Les circuits électriques n'étant *ni parfaitement isolés, ni totalement dépourvus de capacité*, l'intensité du courant n'est pas la même au même instant dans toutes les parties constitutives de ces circuits, *contrairement* à ce que nous avons admis ci-dessus, de telle sorte que les lois rappelées ci-haut, qui conduisent à ne considérer  $i$  et les grandeurs qui en dépendent que comme des fonctions de la seule *variable indépendante* « temps »  $t$ , donnent des résultats d'autant *moins exacts* que pour une résistance d'isolement et une capacité dérivée données la valeur de  $v$ , soit de la différence de potentiel entre deux points du circuit (points correspondants pris, par exemple, à la même distance du centre générateur sur une ligne de transmission; ou autres) et de  $\frac{dv}{dt}$ , soit de la vitesse de variation

de  $v$ , *sont plus grandes*. Il en résulte que les quantités  $i$  et  $v$  sont, dans le cas général, *fonctions de la distance*  $x$  comptée à partir d'un point bien déterminé du circuit (par exemple, pour des raisons faciles à entrevoir, à partir de l'extrémité côté générateur ou de celle côté récepteur) et du *temps*  $t$ . *Les équations desquelles  $i$  et  $v$  peuvent alors être tirées sont des équations aux dérivées partielles en  $x$  et en  $t$ .*

Nous voulons également les rappeler brièvement.

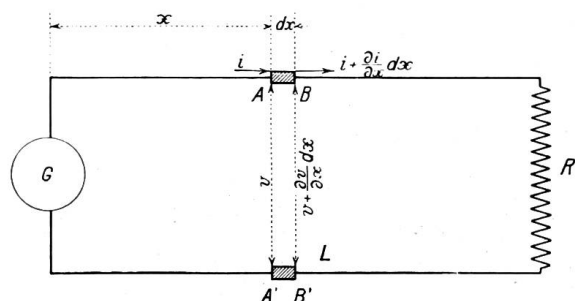


Fig. 3.

A cet effet, considérons, figure 3, un circuit comprenant un générateur  $G$ , une ligne bifilaire  $L$  et un récepteur  $R$ . A la distance  $x$  comptée, par exemple, à partir du générateur  $G$ , prenons un élément  $AB$  de longueur  $dx$  et désignons par  $v$  la *tension ou différence de potentiel* au point A (en réalité entre A et son correspondant A') et par  $i$  l'*intensité du courant* au travers de la section d'entrée A de AB. Désignons encore par les lettres  $r, g, l$  et  $c$  les valeurs, *par unité de longueur*, de la *résistance* des conducteurs (aller et retour

dans le cas de la figure 3), de la *conductance* des filets dérivés de conducteur à conducteur ou entre conducteur et terre (isolement imparfait, effluves), de la *selfinductance* et de la *capacité*. Les constantes de l'élément  $AB$ , de longueur  $dx$ , sont donc:

résistance	$rdx$
conductance des pertes	$gdx$
self-inductance	$ldx$
capacité (en dérivation)	$cdx$

Si l'élément  $AB$  n'est générateur d'aucune  $f. é. m.$  autre que celle de self-inductance, l'équation (3) appliquée convenablement donne immédiatement :

$$v_{AB} = v_{AA'} - v_{BB'} = v - \left( v + \frac{\partial v}{\partial x} dx \right) = rdx \cdot i + ldx \frac{\partial i}{\partial t},$$

d'où

$$(4) \quad - \frac{\partial v}{\partial x} = ri + l \frac{\partial i}{\partial t}$$

D'autre part, la condition de continuité veut que l'on ait :

$$i_A - i_B = i - \left( i + \frac{\partial i}{\partial x} dx \right) = gdx \cdot v + cdx \frac{\partial v}{\partial t}, \text{ d'où}$$

$$(5) \quad - \frac{\partial i}{\partial x} = gv + c \frac{\partial v}{\partial t}.$$

Les équations (4) et (5) sont symétriques par rapport à  $v$  et à  $i$ . On peut en déduire par élimination deux autres équations dont l'une ne contienne plus que  $v$  et l'autre plus que  $i$ , soit :

$$(6) \quad \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} = rgv + (rc + lg) \frac{\partial v}{\partial t} + cl \frac{\partial^2 v}{\partial t^2}$$

$$(7) \quad \frac{\partial^2 i}{\partial x^2} = rgi + (rc + lg) \frac{\partial i}{\partial t} + cl \frac{\partial^2 i}{\partial t^2}$$

Ces deux équations sont de la même forme; on aura donc les mêmes solutions, aux constantes d'intégration près. Généralement, on déterminera  $v$  par exemple, en partant de l'équation (6) et, ayant trouvé  $v$ , on l'introduira dans (5) d'où  $i$  pourra être obtenu en intégrant par rapport à  $x$ .

Les équations (4) et (5) ou celles qui s'en déduisent, (6) et (7), sont les *équations générales de tout circuit électrique*. Elles apparaissent ici comme des équations différentielles à *coefficients constants*, puisque  $r$ ,  $l$ ,  $g$  et  $c$  représentent ce que l'on appelle les *constantes* du circuit ou de la partie de circuit considérés. Mais, en réalité, ces quatre grandeurs ne sont constantes que dans des limites assez étroites. C'est ainsi que  $r$ , qui représente la résistance effective par unité de longueur, est fonction de la fréquence et, dans certains cas, de la valeur de  $i$ . De son côté, la grandeur  $l$  peut également varier entre des limites relativement distantes et suivant une loi difficile à exprimer analytiquement; cela sera le cas, par exemple, pour tout circuit ou partie de circuit placé dans un milieu ferro-magnétique; ou bien, il pourra se faire que pour un appareil déterminé faisant partie d'un circuit ou d'une combinaison de circuits  $l$  doive, suivant le montage de ces derniers, être déterminé d'une façon par rapport à l'onde fondamentale donnant le ton au système et d'une autre façon par rapport à certains harmoniques dont le mouvement périodique considéré pourra être affecté. Enfin, il pourra aussi en être ainsi pour les grandeurs  $g$  et  $c$ , quoique dans une mesure moindre que pour les deux précédentes. Il y a donc là matière à complications sérieuses, si ce n'est insurmontables, et l'opérateur sagace, guidé par un sens physique sûr, pourra généralement en venir à bout s'il consent, après examen approfondi, à certaines simplifications judicieusement choisies.

Les équations (6) et (7) étant susceptibles d'une infinité de solutions particulières, la difficulté principale résidera dans la détermination des constantes d'intégration. *Ce n'est donc qu'en présence d'un problème bien déterminé* qu'on en pourra tirer les fonctions  $v = f(x, t)$  et  $i = f(x, t)$  représentant *tension* et *intensité du courant* en chacun des points du circuit considéré.

Les équations (4) et (5) conduisent, dans le cas où l'on fait  $I = g = 0$ , à l'équation

$$(8) \quad \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} = rc \frac{\partial v}{\partial t}$$

dont *lord Kelvin*, alors *Professor William Thomson*, donna la solution pour le cas du câble télégraphique dans le fameux mémoire intitulé «On the Theory of the Electric Telegraph» qu'il présenta à la société Royale de Londres en mai 1855.

*Oliver Heaviside*, dans son traité classique «*Electromagnetic Theory, The Electrician Series*», 1893, en donne de très nombreuses et suggestives applications. Et depuis les années 1900, sous l'une ou l'autre des formes (4), (5), (6) et (7) ou sous d'autres encore résultant de simplifications appropriées, elles furent très souvent reprises pour être discutées ou appliquées aux multiples cas qui ne peuvent être résolus par les méthodes approchées dont nous avons parlé ci-haut. Nous citerons, sans aucune prétention d'en fournir la liste complète, parmi les travaux qu'il nous a été donné de lire, un mémoire de haute portée et d'une merveilleuse clarté de feu *H. Poincaré*, publié dans l'*Eclairage Electrique*, 3<sup>ème</sup> volume 1904, et dans lequel l'illustre mathématicien donne une solution rigoureuse de l'équation (6) et, depuis lors, les travaux des *Potier, Brylinski, Blondel, de Marchena*, publiés dans le Bulletin de la *Société Internationale des Electriciens* à l'occasion de la discussion générale sur la question des «*surtensions*», que cette société organisa en 1904-1905; ceux des *Kennelly, Steinmetz, Pupin, Campbell*, en Amérique; des *Herzog et Feldmann, Breisig, K. W. Wagner, Petersen, Rogowski, Linke, Rudenberg*, en Allemagne; *O'Meara, Fleming, Russell*, en Angleterre, etc.

### Régimes permanents.

#### Cas des courants continus.

Bien que très simple à traiter et bien connu aussi, le cas des courants continus en régime permanent vaut la peine que nous nous y arrêtions quelques instants, ne serait-ce que pour mettre en relief certaines analogies avec des cas qui seront traités ensuite.

1<sup>o</sup> Dans ce but, prenons le cas représenté à la figure 4 dans laquelle on reconnaît un générateur de force électromotrice invariable  $E$  alimentant un récepteur de résistance  $R'$  (résistance localisée sans pertes latérales) par l'intermédiaire d'une ligne de longueur  $L$  et de résistance  $r$  par unité de longueur. Admettons que le conducteur de retour soit constitué par le sol dont on néglige complètement la résistance, même aux points de contact  $C$  et  $D$ . Admettons de plus que la ligne soit également *parfaitement isolée* et que la résistance du générateur soit négligeable, de telle sorte que l'on ait, quelque soit le régime imposé :

$$V_A - V_D = E = V_0.$$

Dans les hypothèses ci-dessus la différence de potentiel et l'intensité du courant,  $v$  et  $i$ , ne peuvent être fonction que de  $x$ , la distance, et puisque  $g = 0$ , les équations (4) et (5) deviennent :

$$-\frac{dv}{dx} = ri \quad (9)$$

$$\text{et } -\frac{di}{dx} = 0 \quad (10)$$

d'où l'on tire sans difficulté :

$$(11) \quad i = -a = \text{constante}$$

$$(12) \quad v = rax + b.$$

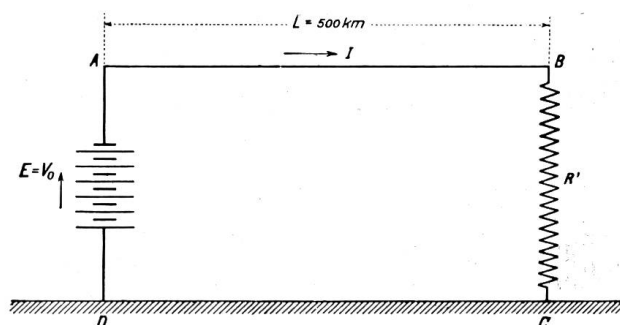


Fig. 4.

La tension s'abaisse donc graduellement et *linéairement* au fur et à mesure que l'on se rapproche du récepteur et cela d'une quantité

$$\frac{dv}{dx} = ra$$

par unité de longueur.

Tenant compte de ce que

$$v = V_0, \text{ pour } x = 0, \text{ et}$$

$$v = v_L = -R'a, \text{ pour } x = L,$$

on trouve, en introduisant ces conditions dans l'équation (12) et en tenant compte de (11):

$$a = -\frac{V_0}{R' + rL} = -\frac{V_0}{R' + R}$$

$$b = V_0$$

d'où finalement:

$$(13) \quad v = V_0 \left[ 1 - \frac{r}{R' + R} x \right] = f(x)$$

$$(14) \quad i = -a = \frac{V_0}{R' + R} = I.$$

expressions dans lesquelles  $R = rL$  représente la résistance *totale* de la ligne.

Pour  $R' = \infty$ , cas de la ligne ouverte à son extrémité, on a:

$$(15) \quad \begin{cases} v = V_0 = \text{constant} \\ i = I = 0. \end{cases}$$

et pour  $R' = 0$ , cas de la ligne mise à la terre à son extrémité (court-circuit):

$$(16) \quad \begin{cases} v = V_0 \left[ 1 - r \frac{x}{L} \right] \\ v_L = 0 \\ i = I = \frac{V_0}{R} = \frac{V_0}{rL} \end{cases}$$

Nous avons représenté dans les figures 5 et 6, pour une ligne de 500 kilomètres de longueur, en fil de bronze phosphoreux de 3,5 mm de diamètre, avec  $r = 6,77$  ohm par kilomètre et  $g = 0$ , les cas:

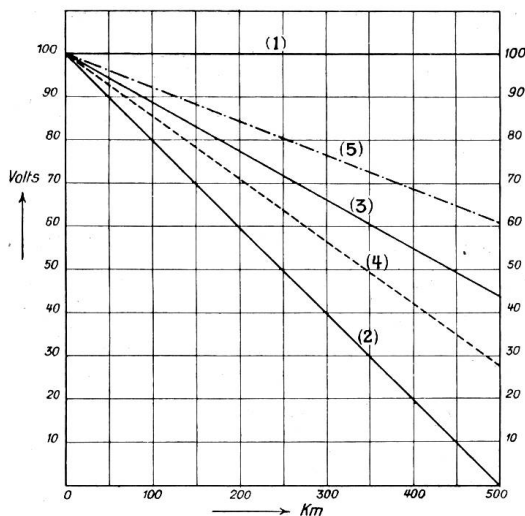


Fig. 5

$$v = f(x) = V_0 \left[ 1 - \frac{r}{R+R'} x \right]$$

- $r = 6,77 \Omega$  par km
- $g = 0$
- $L = 500$  km
- $V_0 = 100$  V.
- (1)  $R' = \infty$
- (2)  $R' = 0$
- (3)  $R' = 2600 \Omega$
- (4)  $R' = 1300 \Omega$
- (5)  $R' = 5200 \Omega$

indications pour les deux figures 5 et 6.

- courbe (1),  $v = V_0 = 100 V; i = 0$ ; pour  $R' = \infty$
- „ (2),  $V_0 = 100 V, v_L = 0; i = I = 0,02955 A$ ; pour  $R' = 0$
- „ (3),  $V_0 = 100 V; v_L = 43,4 V; i = I = 0,01671 A$ ; pour  $R' = 2600 \Omega$
- „ (4),  $V_0 = 100 V; v_L = 27,75 V; i = I = 0,02135 A$ ; pour  $R' = 1300 \Omega$
- „ (5),  $V_0 = 100 V; v_L = 60,6 V; i = I = 0,01165 A$ ; pour  $R' = 5200 \Omega$ .

2<sup>e</sup> Il peut être intéressant en vue d'applications concernant surtout le domaine des mesures d'examiner le cas où  $g$  n'est pas nul, c'est-à-dire celui d'une ligne imparfaitement isolée.

Les équations (4) et (5) deviennent alors, le régime permanent étant supposé atteint :

$$(17) \quad \begin{cases} -\frac{\partial v}{\partial x} = ri \\ -\frac{\partial i}{\partial x} = gv \end{cases}$$

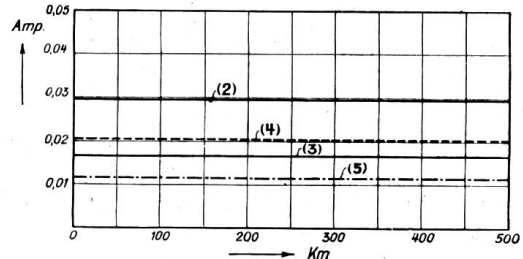


Fig. 6  
 $i = I = \frac{V_0}{R + R'}$

d'où, puisque  $v$  et  $i$  ne varient qu'avec  $x$ ,

$$(18) \quad \begin{cases} \frac{d^2 v}{dx^2} = rgv \\ i = -\frac{1}{r} \frac{dv}{dx} \end{cases}$$

Un simple examen du problème montre, puisque des filets de courant se détachent de chacun des éléments de la ligne, que, d'une part, l'intensité du courant est maximum pour  $x = 0$  et minimum pour  $x = L$  et, d'autre part, que le taux de la chute de potentiel en ligne, au lieu d'être constant comme cela était le cas précédemment, va constamment en diminuant du commencement de la ligne  $x = 0$  à la fin  $x = L$ .

L'équation

$$(18) \quad \frac{d^2 v}{dx^2} = rgv.$$

a pour intégrale

$$v = A \varepsilon^{m_1 x} + B \varepsilon^{m_2 x}$$

dans laquelle  $m_1$  et  $m_2$  sont les racines de l'équation caractéristique

$$m^2 = rg.$$

obtenue en remplaçant  $v$  par  $\varepsilon^{mx}$  dans (18).

On a donc

$$m = \pm \sqrt{rg}, \text{ d'où}$$

$$m_1 = \sqrt{rg}, m_2 = -\sqrt{rg}.$$

et par suite:

$$v = A \varepsilon^{\sqrt{rg} \cdot x} + B \varepsilon^{-\sqrt{rg} \cdot x}.$$

$$\text{et } i = -\frac{1}{r} \frac{dv}{dx} = \sqrt{\frac{g}{r}} \left[ B \varepsilon^{-\sqrt{rg} \cdot x} - A \varepsilon^{\sqrt{rg} \cdot x} \right]$$

que nous écrivons :

$$(19) \quad \begin{cases} v = A \varepsilon^{\beta x} + B \varepsilon^{-\beta x}. \\ i = \frac{1}{R_0} \left[ B \varepsilon^{-\beta x} - A \varepsilon^{\beta x} \right] \end{cases}$$

en désignant par  $\beta$  la quantité réelle :

$$(20) \quad \beta = \sqrt{rg}$$



et par  $R_0$  la quantité *réelle* :

$$(21) \quad R_0 = \sqrt{\frac{r}{g}}.$$

$A$  et  $B$  sont des constantes d'intégration qui dépendent des conditions aux limites.

Nous allons examiner différents cas.

I. — Considérons tout d'abord le cas d'une *ligne infiniment longue*, c'est-à-dire celui d'une ligne de *résistance totale infiniment grande*, et supposons qu'elle soit maintenue sous la tension  $V_0$  à son extrémité  $A$ ,  $x = 0$ , fig. 4. On doit évidemment avoir

$$v = 0 = i, \text{ pour } x = \infty,$$

quelles que soient d'ailleurs les conditions à l'extrémité infiniment éloignée  $B$ . On en tire immédiatement ;

$$A = 0$$

et comme  $v = V_0$ , pour  $x = 0$  et que  $\varepsilon^{-\beta x} = 1$ , pour  $x = 0$ , on a :

$$(22) \quad \begin{cases} v = V_0 \varepsilon^{-\beta x} = f(x) \\ i = \frac{V_0}{R_0} \varepsilon^{-\beta x} = g(x) \end{cases}$$

expressions qui montrent que *tension* et *intensité du courant* décroissent constamment au taux de :

$$\frac{dv}{dx} = -\beta V_0 \varepsilon^{-\beta x} = -\sqrt{rg} V_0 \varepsilon^{-\beta x} \text{ pour } v \text{ et à celui de}$$

$$\frac{di}{dx} = -\frac{\beta}{R_0} V_0 \varepsilon^{-\beta x} = -g V_0 \varepsilon^{-\beta x}$$

pour  $i$ , avec les valeurs maxima :

$$\left(\frac{dv}{dx}\right)_{x=0} = -\sqrt{rg} V_0.$$

$$\left(\frac{di}{dx}\right)_{x=0} = -g V_0.$$

D'autre part, on voit que  $i = i_0 = \frac{V_0}{R_0}$  pour  $x = 0$ , c'est-à-dire que la *ligne infiniment longue*, quelles que soient d'ailleurs les conditions à l'extrémité  $B$ , appelle au départ un courant dont l'intensité est la même que celle que la source débiterait si elle était fermée directement sur une résistance localisée de valeur  $R_0 = \sqrt{\frac{r}{g}}$ . Cette résistance  $R_0$  porte le nom de *résistance caractéristique de la ligne*.

De plus, l'expression  $v = V_0 \varepsilon^{-\beta x}$  montre que la tension passe de la valeur  $V_0$  à la valeur  $V_0 \varepsilon^{-\beta}$  quand on passe du point  $A$  au point pour lequel  $x = 1$  et à la valeur  $V_0 \varepsilon^{-\beta L}$  quand on passe du point  $A$  au point pour lequel  $x = L$  sur une *ligne infiniment longue*. La quantité  $\varepsilon^{-\beta L}$  qui exprime le rapport de la tension au point  $x = L$  à la tension à l'origine  $x = 0$ , sur *ligne infiniment longue*, s'appelle *facteur d'affaiblissement normal de la ligne pour la longueur  $L$* , et  $\beta L$ , de son côté, porte le nom d'*exposant d'affaiblissement pour la longueur  $L$* . Il est d'ailleurs facile de voir que

$$\beta L = L \sqrt{rg} = \sqrt{Lr \cdot Lg} = \sqrt{R \cdot G}$$

en désignant par  $R$  la *résistance totale* de la ligne de longueur  $L$  et par  $G$  la *conductance totale* de la ligne de longueur  $L$ . Enfin, comme  $\beta x$  ou  $\beta L$ , quantités réelles, représentent des *angles hyperboliques*, en vertu des relations bien connues :

$$\sinh \cdot x = \frac{\varepsilon^x - \varepsilon^{-x}}{2}$$

et

$$\cosh \cdot x = \frac{\varepsilon^x + \varepsilon^{-x}}{2}$$

les grandeurs  $\beta x$  ou  $\beta L$  portent également le nom *d'angles hyperboliques de la ligne aux distances  $x$  ou  $L$* . Faisant usage de cette notion, qui est extrêmement commode pour les calculs, nous écrivons les relations (22) sous la forme :

$$(23) \quad \left\{ \begin{array}{l} v = V_0 [\cosh \cdot \beta x - \sinh \cdot \beta x] = f(x) \\ i = \frac{V_0}{R_0} [\cosh \cdot \beta x - \sinh \cdot \beta x] = \varphi(x) \end{array} \right\}$$

II. Ayant examiné le cas de la ligne infiniment longue, parcequ'il se prête à la définition de la grandeur *caractéristique*  $R_0$ , passons à celui, fig. 4, d'une ligne de longueur finie  $L$ , de résistance  $r$  et de conductance des pertes, ou, comme l'on dit aussi, de *perditance*  $g$  par unité de longueur, fermée à son extrémité  $B$  par une résistance localisée  $R'$ , sans pertes latérales. Désignons toujours par  $V_0$  la tension constante à l'origine  $x = 0$ . Nous avons vu plus haut que les expressions de  $v$  et  $i$  en un point  $x$  sont données par :

$$v = A\varepsilon^{\beta x} + B\varepsilon^{-\beta x}$$

et

$$i = \frac{1}{R_0} [B\varepsilon^{-\beta x} - A\varepsilon^{\beta x}]$$

dans lesquelles  $A$  et  $B$  sont des constantes d'intégration à déterminer par les conditions aux limites. Ces dernières sont :

$$v = V_0, \text{ pour } x = 0, \text{ et}$$

$$v = v_L = R' i_L, \text{ pour } x = L.$$

Introduisant ces valeurs dans les expressions de  $v$  et de  $i$ , nous obtenons deux équations qui déterminent  $A$  et  $B$ , soit :

$$V_0 = A + B$$

et

$$v_L = A\varepsilon^{\beta L} + B\varepsilon^{-\beta L} = \frac{R'}{R_0} [B\varepsilon^{-\beta L} - A\varepsilon^{\beta L}]$$

d'où l'on tire facilement

$$A = V_0 \frac{\frac{R'}{R_0} - 1}{\frac{R'}{R_0} - 1 + \left(\frac{R'}{R_0} + 1\right) \varepsilon^{2\beta L}}$$

et

$$B = V_0 \frac{\left(\frac{R'}{R_0} + 1\right) \varepsilon^{2\beta L}}{\frac{R'}{R_0} - 1 + \left(\frac{R'}{R_0} + 1\right) \varepsilon^{2\beta L}}$$

ce qui donne :

$$v = \frac{V_0}{\frac{R'}{R_0} - 1 + \left(\frac{R'}{R_0} + 1\right) \varepsilon^{2\beta L}} \left[ \left(\frac{R'}{R_0} - 1\right) \varepsilon^{\beta x} + \left(\frac{R'}{R_0} + 1\right) \varepsilon^{2\beta L} \varepsilon^{-\beta x} \right] = f(x)$$

et

$$i = \frac{V_0}{R_0 \left\{ \frac{R'}{R_0} - 1 + \left(\frac{R'}{R_0} + 1\right) \varepsilon^{2\beta L} \right\}} \left[ \left(\frac{R'}{R_0} + 1\right) \varepsilon^{2\beta L} \varepsilon^{-\beta x} - \left(\frac{R'}{R_0} - 1\right) \varepsilon^{\beta x} \right] = \varphi(x)$$

Ces deux expressions peuvent être écrites beaucoup plus simplement, car :

$$\begin{aligned} \frac{R'}{R_0} - 1 + \left(\frac{R'}{R_0} + 1\right) \varepsilon^{2\beta L} &= \varepsilon^{\beta L} \left[ \left(\frac{R'}{R_0} + 1\right) \varepsilon^{\beta L} + \left(\frac{R'}{R_0} - 1\right) \varepsilon^{-\beta L} \right] \\ &= 2 \varepsilon^{\beta L} \left[ \frac{R'}{R_0} \left( \frac{\varepsilon^{\beta L} + \varepsilon^{-\beta L}}{2} \right) + \frac{\varepsilon^{\beta L} - \varepsilon^{-\beta L}}{2} \right] \\ &= 2 \varepsilon^{\beta L} \left[ \frac{R'}{R_0} \cosh \cdot \beta L + \sinh \cdot \beta L \right] \end{aligned}$$

et semblablement :

$$\left(\frac{R'}{R_0} - 1\right) \varepsilon^{\beta x} + \left(\frac{R'}{R_0} + 1\right) \varepsilon^{2\beta L} \varepsilon^{-\beta x} = 2 \varepsilon^{\beta L} \left[ \frac{R'}{R_0} \cosh \cdot \beta (L-x) + \sinh \cdot \beta (L-x) \right]$$

et

$$\left(\frac{R'}{R_0} + 1\right) \varepsilon^{2\beta L} \varepsilon^{-\beta x} - \left(\frac{R'}{R_0} - 1\right) \varepsilon^{\beta x} = 2 \varepsilon^{\beta L} \left[ \frac{R'}{R_0} \sinh \cdot \beta (L-x) + \cosh \cdot \beta (L-x) \right]$$

d'où, en introduisant ces valeurs dans les expressions précédemment trouvées pour  $v$  et  $i$  :

$$(24) \quad \left\{ \begin{array}{l} v = V_0 \frac{R' \cosh \cdot \beta (L-x) + R_0 \sinh \cdot \beta (L-x)}{R' \cosh \cdot \beta L + R_0 \sinh \cdot \beta L} = f(x) \\ \text{et} \quad i = \frac{V_0 R' \sinh \cdot \beta (L-x) + R_0 \cosh \cdot \beta (L-x)}{R' \cosh \cdot \beta L + R_0 \sinh \cdot \beta L} = \varphi(x) \end{array} \right.$$

Ces expressions permettent de calculer facilement les valeurs de la *tension*  $v$  et de l'intensité du courant  $i$  en chacun des points d'une ligne donnée et caractérisée par les constantes  $\beta$  et  $R_0$ , fermée à son extrémité sur une résistance connue  $R'$ .

Envisageons quelques cas particuliers.

Il a. — *Ligne ouverte à son extrémité B, soit  $R' = \infty$ .*

En divisant numérateur et dénominateur de chacune des expressions (24) par  $R'$ , puis faisant  $R' = \infty$ , on obtient :

$$(25) \quad \left\{ \begin{array}{l} v = V_0 \frac{\cosh \cdot \beta (L-x)}{\cosh \cdot \beta L} = V_0 [\cosh \cdot \beta x - \operatorname{tg} h \cdot \beta L \sinh \cdot \beta x] \\ \text{et} \quad i = \frac{V_0 \sinh \cdot \beta (L-x)}{\cosh \cdot \beta L} = \frac{V_0}{R_0} [\operatorname{tg} h \cdot \beta L \cosh \cdot \beta x - \sinh \cdot \beta x] \end{array} \right.$$

et, en particulier,

$$(26) \quad \left\{ \begin{array}{l} v = v_0 = V_0 \\ \text{et} \quad i = i_0 = \frac{V_0}{R_0} \frac{1}{\operatorname{cotg} h \cdot \beta L} = \frac{V_0}{R_0} \operatorname{tg} h \cdot \beta L, \text{ pour } x = 0 \end{array} \right.$$

puis :

$$(27) \quad \left\{ \begin{array}{l} v = v_L = \frac{V_0}{\cosh \cdot \beta L} = V_0 \operatorname{sech} \cdot \beta L \\ \text{et} \quad i = i_L = 0, \quad \text{pour } x = L \end{array} \right.$$

On voit ainsi qu'une ligne de caractéristiques  $R_0$  et  $\beta$  et de longueur  $L$ , soit d'angle hyperbolique  $\beta L$ , ouverte à son extrémité B ( $R' = \infty$ ) tandis qu'elle est maintenue sous la tension constante  $V_0$  à son autre extrémité, A, accuse en B une tension

$$(28) \quad v_L = \frac{V_0}{\cosh \cdot \beta L} = V_0 \operatorname{sech} \cdot \beta L = V_0 \operatorname{sech} \cdot \sqrt{R \cdot G}$$

et qu'elle absorbe à son origine A un courant dont l'intensité est la même que celle du courant que la source de potentiel constant  $V_0$  produirait dans une résistance

$$(29) \quad R_A = R_0 \cotgh \cdot \beta L = \sqrt{\frac{r}{g}} \cotgh \cdot \sqrt{R \cdot G}.$$

localisée en A.

Comme  $\operatorname{sech} \cdot \beta L$  varie de 1 à 0 et  $\cotgh \cdot \beta L$  de  $\infty$  à 1 quand  $\beta L$  croit à partir de 0, on voit que

$$\begin{aligned} v_L &= V_0 \text{ pour } L = 0 \\ \text{et } v_L &= 0 \text{ pour } L = \infty, \text{ tandis que} \\ R_L &= \infty \text{ pour } L = 0 \\ \text{et } R_L &= R_0 \text{ pour } L = \infty, \end{aligned}$$

ce qui est conforme aux résultats précédents.

Le taux de la chute de potentiel en ligne diminue quand  $x$  augmente; il a sa plus grande valeur à l'origine, soit:

$$\left( \frac{dv}{dx} \right)_{x=0} = -\beta V_0 \operatorname{tgh} \cdot \beta L$$

tandis qu'en un point  $x$  quelconque, on trouve:

$$\frac{dv}{dx} = \beta V_0 [\sin h \cdot \beta x - \operatorname{tgh} \cdot \beta L \cos h \cdot \beta x].$$

Il b. — Ligne court-circuitée à son extrémité B, soit  $R' = 0$ .

Si, dans les expressions (24), on fait  $R' = 0$ , on obtient:

$$(30) \quad \left\{ \begin{array}{l} v = V_0 \frac{\sin h \cdot \beta [L-x]}{\sin h \cdot \beta L} = V_0 [\cos h \cdot \beta x - \cotgh \cdot \beta L \sin h \cdot \beta x] \\ \text{et } i = \frac{V_0 \cos h \cdot \beta [L-x]}{R_0 \sin h \cdot \beta L} = \frac{V_0}{R_0} [\cotgh \cdot \beta L \cos h \cdot \beta x - \sin h \cdot \beta x] \end{array} \right.$$

qui montrent comment tension  $v$  et intensité du courant  $i$  varient avec  $x$ , et en particulier que:

$$(31) \quad \left\{ \begin{array}{l} v = v_0 = V_0 \\ \text{et } i = i_0 = \frac{V_0}{R_0} \cotgh \cdot \beta L = \frac{V_0}{R_0 \operatorname{tgh} \cdot \beta L}, \text{ pour } x = 0 \end{array} \right.$$

puis:

$$(32) \quad \left\{ \begin{array}{l} v = v_L = 0 \\ \text{et } i = i_L = \frac{V_0}{R_0} \frac{1}{\sin h \cdot \beta L} = \frac{V_0}{R_0} \operatorname{cosech} \cdot \beta L, \text{ pour } x = L. \end{array} \right.$$

et l'on voit ainsi qu'une ligne de caractéristiques  $R_0$  et  $\beta$  et de longueur  $L$ , soit d'angle (hyperbolique)  $\beta L$ , court-circuitée à son extrémité B ( $R' = 0$ ) tandis qu'elle est maintenue sous la tension constante  $V_0$  à son autre extrémité, A, absorbe à son origine A un courant d'intensité:

$$i_0 = \frac{V_0}{R_0 \operatorname{tgh} \cdot \beta L}$$

soit de même intensité que celui que la source de potentiel constant  $V_0$  produirait dans une résistance

$$(33) \quad R_A = R_0 \operatorname{tgh} \cdot \beta L = \sqrt{\frac{r}{g}} \operatorname{tgh} \cdot \sqrt{R \cdot G}.$$

localisée en A,

tandis qu'elle débite en B, soit à l'endroit du court-circuit, un courant d'intensité

$$i_L = \frac{V_0}{R_0 \sin h \cdot \beta L}$$

soit de même intensité que celui que la source de potentiel constant  $V_0$  produirait dans une résistance

$$(34) \quad R_{BA} = R_0 \sinh \cdot \beta L = \sqrt{\frac{r}{g}} \sinh \cdot \sqrt{R \cdot G}.$$

localisée en  $A$  également.

Le rapport  $\frac{i_0}{i_L} = \cosh \cdot \beta L$ , est d'ailleurs le même que le rapport des tensions  $\frac{V_0}{V_L}$  dans le cas de la ligne ouverte à son extrémité  $B$ .

On voit facilement que

$$\begin{aligned} R_A &= R_0 \text{ pour } L = \infty \\ R_{BA} &= \infty \text{ pour } L = \infty. \end{aligned}$$

de telle sorte que lorsque  $L$  augmente au delà de toute limite,  $i_0$  tend vers

$$i_{0 \text{ } L = \infty} = \frac{V_0}{R_0}$$

et  $i_L$  vers

$$i_{L \text{ } L = \infty} = 0.$$

ainsi que nous l'avons déjà vu précédemment.

Quant au taux de la chute de potentiel, il a sa plus grande valeur pour  $x = 0$ , soit à l'origine, avec :

$$\left( \frac{dv}{dx} \right)_{x=0} = -\beta V_0 \cotgh \cdot \beta L$$

tandis que pour un point  $x$  quelconque, on trouve :

$$\frac{dv}{dx} = \beta V_0 [\sinh \cdot \beta x - \cotgh \cdot \beta L \cosh \cdot \beta x].$$

On voit facilement,  $\cotgh \cdot \beta L$  étant plus grand que  $tgh \cdot \beta L$ , que le taux de la chute de potentiel, tout en diminuant constamment en valeur absolue dans les deux cas quand  $x$  croît, est toujours plus grand lorsque la ligne est court-circuitée en  $B$  que lorsque la ligne est ouverte en  $B$ .

II c. — *Ligne fermée en B sur une résistance de valeur finie différente de 0, soit  $R' > 0$ .*

En introduisant dans les expressions (24) une valeur déterminée  $R'$  et en donnant à  $x$  des valeurs comprises entre 0 et  $L$ , on peut facilement calculer les valeurs de  $v$  et de  $i$  en chacun des points de la ligne.

Si l'on examine attentivement les expressions (24) on voit que pour  $R' = R_0$ ,  $v$  et  $i$  deviennent :

$$v = V_0 \frac{\cosh \cdot \beta [L - x] + \sinh \cdot \beta [L - x]}{\cosh \cdot \beta L + \sinh \cdot \beta L}$$

$$\text{et} \quad i = \frac{V_0 \sinh \cdot \beta [L - x] + \cosh \cdot \beta [L - x]}{R_0 \cosh \cdot \beta L + \sinh \cdot \beta L} = \frac{v}{R_0}$$

Mais comme :

$$\sinh \cdot \beta [L - x] = \sinh \cdot \beta L \cosh \cdot \beta x - \cosh \cdot \beta L \sinh \cdot \beta x$$

$$\text{et} \quad \cosh \cdot \beta [L - x] = \cosh \cdot \beta L \cosh \cdot \beta x - \sinh \cdot \beta L \sinh \cdot \beta x$$

on a :

$$\sinh \cdot \beta [L - x] + \cosh \cdot \beta [L - x] = [\cosh \cdot \beta L + \sinh \cdot \beta L] [\cosh \cdot \beta x - \sinh \cdot \beta x]$$

et par conséquent :

$$(35) \left\{ \begin{array}{l} v = V_0 [\cosh \cdot \beta x - \sinh \cdot \beta x] = V_0 \varepsilon^{-\beta x} \\ \text{et} \quad i = \frac{V_0}{R_0} [\cosh \cdot \beta x - \sinh \cdot \beta x] = \frac{V_0}{R_0} \varepsilon^{-\beta x} = I_0 \varepsilon^{-\beta x} \end{array} \right.$$

On retrouve ainsi pour  $v$  et  $i$  les mêmes expressions que celles qui représentaient ces deux grandeurs dans le cas d'une ligne infiniment longue de caractéristiques  $R_0$  et  $\beta$ .

*On voit donc, fait très intéressant, qu'une ligne de caractéristiques  $\beta$  et  $R_0$ , de longueur quelconque  $L$ , fermée à son extrémité par une résistance sans pertes latérales, égale à la résistance caractéristique de la ligne,  $R_0$ , se comporte exactement de la même façon qu'une ligne infiniment longue de mêmes caractéristiques  $\beta$  et  $R_0$ . En un point qui se trouve à une distance  $x$  du point de départ, la tension  $v$  et l'intensité du courant  $i$  ont les mêmes valeurs qu'elles auraient au même point sur une ligne s'étendant de  $A$  à l'infini.*

Dans le cas où la résistance  $R'$  diffère de la résistance caractéristique  $R_0$ , il faut, dans le but de pouvoir se servir facilement des tables des fonctions hyperboliques, distinguer deux cas suivant que  $R' \begin{cases} < \\ > \end{cases} R_0$ .

1. Dans le cas où  $R' < R_0$ , on posera :

$$\left. \begin{array}{l} \text{ou} \quad \left. \begin{array}{l} \text{tg} h \cdot \delta_1 = \frac{R'}{R_0} \\ \delta_1 = \text{arctg} h \cdot \frac{R'}{R_0} \end{array} \right\} \quad (36) \end{array} \right\}$$

Les expressions de  $v$  et de  $i$  peuvent alors s'écrire :

$$(37) \left\{ \begin{array}{l} v = V_0 \frac{\sinh[\beta(L-x) + \delta_1]}{\sinh \cdot [\beta L + \delta_1]} \\ \text{et} \quad i = \frac{V_0}{R_0} \frac{\cosh[\beta(L-x) + \delta_1]}{\sinh[\beta L + \delta_1]} \end{array} \right.$$

d'où

$$(38) \left\{ \begin{array}{l} v = v_0 = V_0 \\ \text{et} \quad i = i_0 = \frac{V_0}{R_0} \text{cotg} h[\beta L + \delta_1], \text{ pour } x = 0 \end{array} \right.$$

puis :

$$\begin{array}{l} v = v_L = V_0 \frac{\sinh \cdot \delta_1}{\sinh \cdot [\beta L + \delta_1]} \\ \text{et} \quad i = i_L = \frac{V_0}{R_0} \frac{\cosh \cdot \delta_1}{\sinh \cdot [\beta L + \delta_1]}, \text{ pour } x = L. \end{array}$$

On en tire immédiatement :

$$(39) \left\{ \begin{array}{l} \frac{v_L}{v_0} = \frac{\sinh \cdot \delta_1}{\sinh \cdot \beta L \cosh \cdot \delta_1 + \cosh \cdot \beta L \sinh \cdot \delta_1} = \frac{1}{\sinh \cdot \beta L \text{cotg} h \cdot \delta_1 + \cosh \cdot \beta L} \\ \text{et} \quad \frac{i_L}{i_0} = \frac{I_L}{I_0} = \frac{\cosh \cdot \delta_1}{\cosh \cdot \beta L \cosh \cdot \delta_1 + \sinh \cdot \beta L \sinh \cdot \delta_1} = \frac{1}{\cosh \cdot \beta L + \text{tg} h \cdot \delta_1 \sinh \cdot \beta L} \end{array} \right.$$

Comme d'autre part :

$$\frac{v_L}{v_0} = \frac{i_L}{i_0} = \varepsilon^{-\beta L} = \frac{1}{\cosh \cdot \beta L + \sinh \cdot \beta L}, \text{ pour } R' = R_0,$$

on voit facilement,  $\text{cotg} h \cdot \delta_1$  étant constamment plus grande que 1 et  $\text{tg} h \cdot \delta_1$  constamment plus petite que 1, que dans le cas  $R' < R_0$

$$\left(\frac{V_L}{V_0}\right)_{R' < R_0} < \left(\frac{V_L}{V_0}\right)_{R' = R_0}$$

et

$$\left(\frac{i_L}{i_0}\right)_{R' < R_0} > \left(\frac{i_L}{i_0}\right)_{R' = R_0}$$

de telle sorte que si l'on pose, en désignant par  $\theta_1$  un exposant d'affaiblissement équivalent de la ligne de caractéristiques  $R_0$  et  $\beta$  et de longueur  $L$ , fermée sur résistance  $R' < R_0$ ,

$$\left(\frac{V_L}{V_0}\right)_{R' < R_0} = \varepsilon^{-\theta_{1v}}$$

et

$$\left(\frac{i_L}{i_0}\right)_{R' < R_0} = \varepsilon^{-\theta_{1i}}, \text{ on a:}$$

$$(40) \quad \begin{cases} \theta_{1v} > \beta L \\ \text{et } \theta_{1i} < \beta L \end{cases}$$

et l'on en conclut que dans une ligne de caractéristiques  $R_0$  et  $\beta$ , ou d'angle hyperbolique  $\beta L$ , fermée sur un récepteur de résistance  $R'$  inférieure à la résistance caractéristique de la ligne  $R_0$ , le facteur d'affaiblissement équivalent  $\varepsilon^{-\theta_{1v}}$  des tensions est plus petit (affaiblissement plus prononcé) que le facteur d'affaiblissement normal  $\varepsilon^{-\beta L}$  de la ligne, tandis que le facteur d'affaiblissement équivalent  $\varepsilon^{-\theta_{1i}}$  des courants est plus grand (affaiblissement moins prononcé) que le facteur d'affaiblissement normal  $\varepsilon^{-\beta L}$  de la ligne.

2. Dans le cas où  $R' > R_0$ , on peut poser:

$$\left. \begin{aligned} \cotgh \cdot \delta_2 &= \frac{R'}{R_0} \\ \text{ou } \delta_2 &= \operatorname{arctgh} \cdot \frac{R_0}{R'} \end{aligned} \right\} (41)$$

et par des calculs semblables à ceux qui ont été faits sous N° 1, on peut établir les rapports:

$$(42) \quad \left\{ \begin{aligned} \frac{V_L}{V_0} &= \frac{\cosh \cdot \delta_2}{\cosh[\beta L + \delta_2]} = \frac{1}{\cosh \cdot \beta L + \operatorname{tgh} \cdot \delta_2 \sinh \cdot \beta L} \\ \text{et } \frac{i_L}{i_0} &= \frac{\sinh \cdot \delta_2}{\sinh[\beta L + \delta_2]} = \frac{1}{\sinh \cdot \beta L \cotgh \cdot \delta_2 \cosh \cdot \beta L} \end{aligned} \right.$$

et comme  $\operatorname{tgh} \cdot \delta_2$  est constamment plus petit et  $\cotgh \cdot \delta_2$  constamment plus grand que l'unité, on voit que

$$\left(\frac{V_L}{V_0}\right)_{R' > R_0} > \left(\frac{V_L}{V_0}\right)_{R' = R_0}$$

et

$$\left(\frac{i_L}{i_0}\right)_{R' > R_0} < \left(\frac{i_L}{i_0}\right)_{R' = R_0}$$

Procédant de la même façon qu'auparavant, c'est-à-dire posant:

$$\left(\frac{V_L}{V_0}\right)_{R' > R_0} = \varepsilon^{-\theta_{2v}}$$

et

$$\left(\frac{i_L}{i_0}\right)_{R' > R_0} = \varepsilon^{-\theta_{2i}}$$

on voit que

$$(43) \quad \begin{cases} \theta_{2v} < \beta L \\ \theta_{2i} > \beta L \end{cases}$$

c'est-à-dire que dans une ligne de caractéristiques  $R_0$  et  $\beta$ , ou d'angle hyperbolique  $\beta L$ , fermée sur un récepteur de résistance  $R'$  supérieure à la résistance caractéristique de la ligne  $R_0$ , le facteur d'affaiblissement équivalent  $\varepsilon^{-0,2x}$  des tensions est plus grand (affaiblissement moins prononcé) que le facteur d'affaiblissement normal  $\varepsilon^{-\beta L}$  de la ligne, tandis que le facteur d'affaiblissement équivalent  $\varepsilon^{-0,2x}$  des courants est plus petit (affaiblissement plus prononcé) que le facteur d'affaiblissement normal  $\varepsilon^{-\beta L}$  de la ligne.

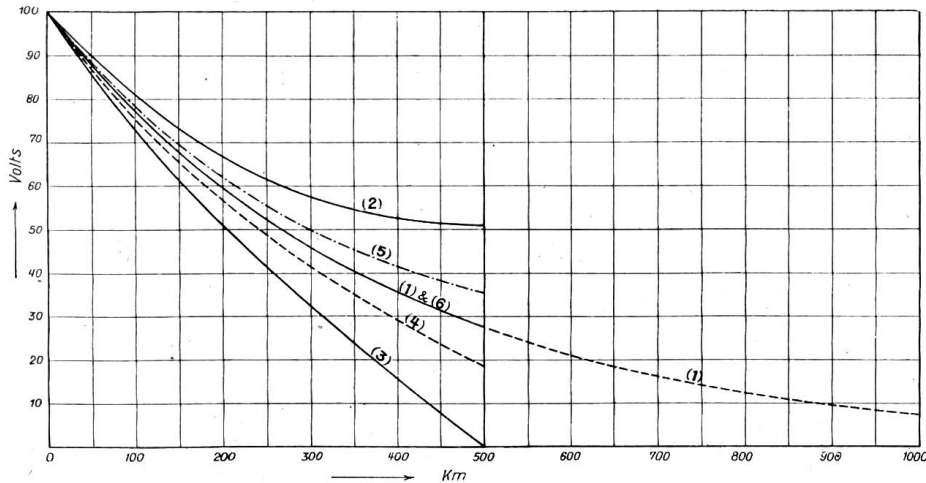


Fig. 7

$v = f(x)$

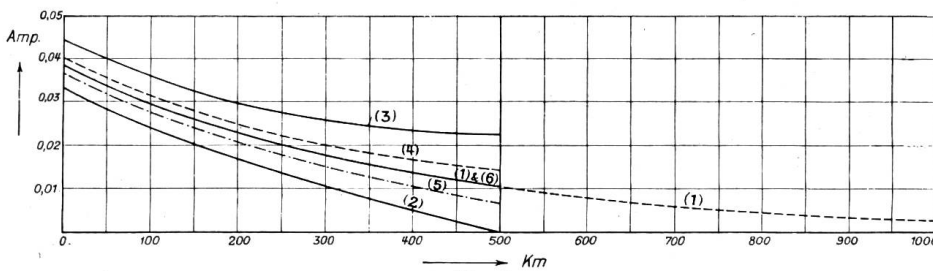


Fig. 8.

$i = g(x)$

- Ligne de :  $L = 500$  km  
 $r = 6,77 \Omega$  par km  
 $g = 1 \cdot 10^{-6}$  mhos p. km  
 $\beta = \sqrt{rg} = 0,0026$   
 $\beta L = 1,3$   
 $R_0 = 2600 \Omega = \sqrt{\frac{r}{g}}$   
 $V_0 = 100$  volts
- (1) cas de la ligne infinie
  - (2) cas  $R' = \infty$ , ligne ouverte en  $\beta$
  - (3) cas  $R' = 0$ , ligne court-circuitée en  $\beta$
  - (4) cas  $R' = 1300 \Omega = \frac{R_0}{2}$ , en  $\beta$
  - (5) cas  $R' = 5200 \Omega = 2 R_0$ , en  $\beta$
  - (6) cas  $R' = R_0 = 2600 \Omega$  en  $\beta$

Indication pour les 2 figures 7 et 8.

Tous les résultats qui précèdent sont illustrés par les figures 7 et 8, qui se rapportent à un circuit tel qu'indiqué fig. 4, et dans lequel la ligne a pour constantes :

$$r = 6,77 \Omega \text{ par km}$$

$$g = 1 \cdot 10^{-6} \text{ mhos par km}$$

$$\beta = \sqrt{rg} = 2,6 \cdot 10^{-3}$$

$$R_0 = \sqrt{\frac{r}{g}} = 2600 \Omega$$

$$L = 500 \text{ km}$$

$$\beta L = 1,3$$

La tension à l'origine a été admise invariablement à 100 volts constants, et les 5 courbes représentent les cas :

- courbe (1), ligne infiniment longue;  $v_0 = 100 \text{ V}; v_L = 27,3 \text{ V}; i_0 = 0,0386 \text{ A}$   
 $i_L = 0,0104 \text{ A}$
- courbe (2), ligne de 500 km,  $R' = \infty; v_0 = 100 \text{ V}; v_L = 50,8 \text{ V}; i_0 = 0,0336 \text{ A}$   
 $i_L = 0$



courbe (3), ligne de 500 km,	$R' = 0;$	$v_0 = 100 \text{ V};$	$v_L = 0;$	$i_0 = 0,0446 \text{ A}$
				$i_L = 0,0227 \text{ A}$
courbe (4), ligne de 500 km,	$R' = \frac{R_0}{2} = 1300 \Omega;$	$v_0 = 100 \text{ V};$	$v_L = 18,4 \text{ V};$	$i_0 = 0,0402 \text{ A}$
				$i_L = 0,0144 \text{ A}$
courbe (5), ligne de 500 km,	$R' = 2 R_0 = 5200 \Omega;$	$v_0 = 100 \text{ V};$	$v_L = 35,4 \text{ V};$	$i_0 = 0,0366 \text{ A}$
				$i_L = 0,0068 \text{ A}$
courbe (6), ligne de 500 km,	$R' = R_0 = 2600 \Omega;$	$v_0 = 100 \text{ V};$	$v_L = 27,3 \text{ V};$	$i_0 = 0,0386 \text{ A}$
se confond avec courbe (1)				$i_L = 0,0104 \text{ A}$

Les figures 7 et 8 étant construites à la même échelle que les figures 5 et 6, qui se rapportent à un circuit identique à celui que nous venons de considérer, mais dans l'hypothèse  $g = 0$ , il est des plus facile de constater l'effet des pertes par défaut d'isolement sur la répartition des tension et courant le long du circuit.

Le problème que nous venons d'envisager se prêterait à de nombreuses autres constatations et remarques intéressantes. Mais nous nous en tiendrons là, le but que nous avons en vue en consacrant ces quelques lignes au cas du *courant continu en régime permanent* étant, ainsi que nous l'avons déjà indiqué plus haut, de préparer le lecteur au problème plus complexe des *courants alternatifs en régime permanent*.

**Cas des courants alternatifs.**

Nous ne pouvons naturellement pas songer à entrer dans beaucoup de détails sur le cas des courants alternatifs en régime permanent. Il nous suffira, étant donné le but que nous poursuivons, de rappeler quelques notions essentielles et, en premier lieu, de dire quelques mots des différents modes de représentation des grandeurs alternatives sinusoidales.

Une grandeur alternative, par exemple, une force électromotrice  $e$  variant sinusoidalement dans le temps est représentée par la fonction périodique simple

$$(44) \quad e = E_m \sin(\omega t - \alpha) = E \sqrt{2} \sin(2\pi ft - \alpha) = E \sqrt{2} \sin\left(\frac{2\pi}{T} t - \alpha\right)$$

dans laquelle  $E_m$  représente l'amplitude de  $e$ ,  $E$  sa valeur efficace,  $f$  sa fréquence,  $T$  sa période,  $\omega$  sa pulsation, et  $\omega t - \alpha$  sa phase. L'angle  $\alpha$ , qui peut être positif ou négatif, représente le *déphasage* ou *décalage* de  $e$  par rapport à une autre grandeur périodique simple ou alternative sinusoidale  $y = Y_m \sin(\omega t)$  dont la phase est prise pour origine.

Une telle *fém* peut être représentée géométriquement dans le plan, soit par une sinusoidale ayant comme axe des abscisses une droite indéfinie  $Ox$  sur laquelle on porte

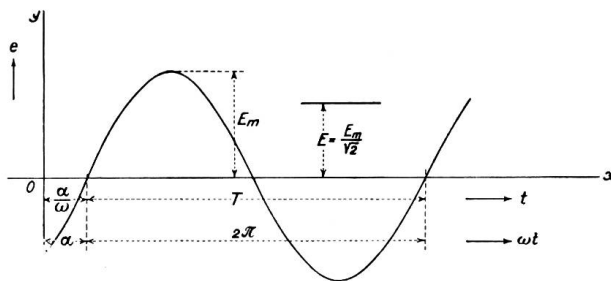


Fig. 9.

les temps  $t$  ou les angles  $\omega t$  et comme axe des ordonnées une droite  $Oy$  perpendiculaire à  $Ox$  et parallèlement à laquelle on porte les valeurs de la fonction  $e$  (fig. 9), soit par un vecteur  $OA$  de longueur  $E$  ou  $E_m$ , issu d'un centre  $O$  et faisant un angle  $\alpha$  avec une droite horizontale  $Ox$  dont la direction représente la phase de la grandeur de comparaison  $y$  (fig. 10). Comme la plupart des problèmes que l'on a à résoudre consistent dans

la recherche des valeurs efficaces et des phases ou des différences de phase, ce second mode de représentation avec vecteurs de longueurs proportionnelles aux valeurs efficaces est de beaucoup le plus employé, soit comme moyen de calcul direct, soit pour la construction de graphiques figuratifs permettant de déterminer par voie trigonométrique les relations de grandeur et de phase cherchées. C'est ainsi, par exemple, qu'on pourra déterminer valeur efficace et phase de la différence de potentiel  $V_{AB}$  à appliquer entre extrémités  $A$  et  $B$

d'une portion de circuit de résistance  $R_{AB}$  et de self-inductance  $L_{AB}$  pour y entretenir un courant  $i$  de valeur efficace  $I$ , soit  $i = I\sqrt{2} \sin(\omega t)$  L'équation de cette portion de circuit, en supposant qu'aucune *fém* autre que celle de self-inductance n'agisse entre  $A$  et  $B$  et que le dit circuit n'ait ni capacité dérivée, ni pertes par défauts d'isolement, étant :

$$V_{AB} = R_{AB} i - \left( - L_{AB} \frac{di}{dt} \right) = R_{AB} i + L_{AB} \frac{di}{dt},$$

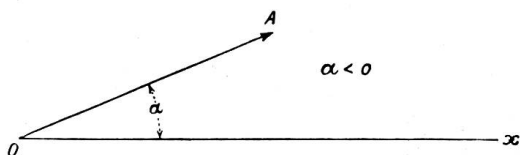


Fig. 10.

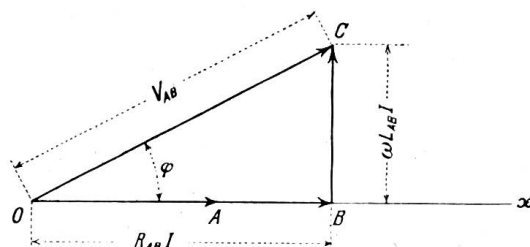


Fig. 11.

la différence de potentiel cherchée est mesurée en *valeur efficace* par la longueur  $OC$  (figure 11) du vecteur résultant de  $OB = R_{AB} I$ , valeur efficace de  $R_{AB} i$  en phase avec  $i$  ( $OA$ ) et de  $BC = \omega L_{AB} I$ , valeur efficace de  $L_{AB} \frac{di}{dt}$  en quadrature et en avance sur  $i$  ( $OA$ ), et son déphasage sur  $i$ , de son côté, est mesuré par l'angle  $BOC = \varphi$  que fait  $OC = V_{AB}$  avec  $OA = I$ . On en conclut que la différence de potentiel cherchée est représentée par la fonction

(45)

$$\begin{aligned} v_{AB} &= OC \cdot \sqrt{2} \sin(\omega t + \varphi) = V_{AB} \sqrt{2} \sin(\omega t + \varphi) \\ &= \sqrt{OB^2 + BC^2} \sqrt{2} \sin\left(\omega t + \arctg \frac{BC}{OB}\right) = I \sqrt{R_{AB}^2 + \omega^2 L_{AB}^2} \sqrt{2} \sin\left(\omega t + \arctg \frac{\omega L_{AB}}{R_{AB}}\right) \end{aligned}$$

Ce mode de représentation, très commode pour tous les problèmes qui se posent d'une façon analogue à celui que nous venons de résumer, se prête particulièrement bien à la recherche du régime *au départ* d'une ligne de transmission devant alimenter à son autre extrémité et sous une tension donnée  $V$  un récepteur ou un groupe de récepteurs dont puissance absorbée  $P$  et facteur de puissance  $\cos \varphi$  sont connus. On se trouve alors en présence d'un circuit  $AB$ , formé d'une ligne de résistance  $R$  et de self-inductance  $L$  en série avec un récepteur ou un groupe de récepteurs de *résistance équivalente*  $R_e = \frac{V \cos \varphi}{I}$  et de self-inductance équivalente  $L_e = \frac{V \cdot \sin \varphi}{\omega I}$ , et le problème est ramené au cas précédent, avec

$$V_{AB} = V_{AB} \cdot \sqrt{2} \sin(\omega t + \varphi')$$

où

$$(46) \quad \left\{ \begin{aligned} V_{AB} &= \sqrt{(V \cos \varphi + RI)^2 + (V \sin \varphi + \omega LI)^2} \\ \text{et} \quad \text{tg } \varphi' &= \frac{V \sin \varphi + \omega LI}{V \cos \varphi + RI} \end{aligned} \right.$$

Un autre mode de représentation des grandeurs alternatives sinusoidales, très en faveur dans les pays anglo-saxons, est le mode de représentation par *quantités complexes*. Rappelons-en brièvement l'essentiel. Pour cela, considérons (fig 12) deux axes rectangulaires  $Ox$  et  $Oy$  et convenons de représenter une quantité *réelle*  $\pm a$  par une longueur correspondante  $a$ , portée sur  $Ox$ , soit à droite, soit à gauche de l'origine  $O$ . Quels symboles algébriques devons-nous alors employer pour représenter une même longueur  $a$  portée sur  $Oy$ , soit vers le haut, soit vers le bas? Pour cela, nous devons faire usage d'un symbole indiquant que la longueur  $OA = a$  a été tournée d'un angle droit autour de

son origine  $O$ , soit en  $OB$  (rotation à gauche, sens positif), soit en  $OB'$  (rotation à droite, sens négatif). Prenons le premier cas et désignons par la lettre  $j$  le symbole cherché, de telle sorte que l'expression  $ja$  soit représentative de la quantité  $a$  portée en  $OB$ . Si nous faisons tourner  $OB$  d'un nouvel angle droit dans le sens positif,  $OB$  devenu  $jja = j^2a$  se confond avec  $OA' = -a$ . On a donc  $j = \sqrt{-1}$ , symbole des quantités imaginaires et l'on voit que multiplier par  $j = \sqrt{-1}$  une quantité  $a$  représentée par une longueur  $OA$  portée suivant  $Ox$  revient à faire passer, en tournant,  $OA$  en  $OB$  représenté par  $\sqrt{-1} a = ja$ , tandis que multiplier par  $-j = -\sqrt{-1}$  une quantité  $a$  représentée par  $OA$  portée suivant  $Ox$  revient à faire passer, en tournant,  $OA$  en  $OB'$  représenté par  $-\sqrt{-1} a = -ja$ .

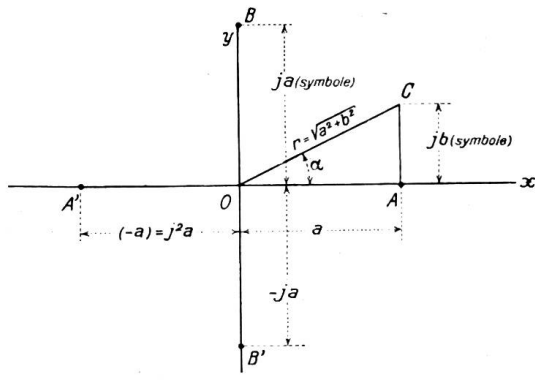


Fig. 12.

Il est alors facile de comprendre qu'une quantité *complexe* de la forme  $a + jb$  représentant la somme d'une quantité réelle  $a$ , portée suivant  $Ox$  en  $OA$ , et d'une quantité réelle  $b$ , portée en  $AC$  à la suite de  $OA$  et parallèlement à  $Oy$ , représente une droite  $OC$  issue de l'origine  $O$  et dont les projections horizontale et verticale sont  $a$  et  $b$ . La longueur de cette droite  $OC$  est  $r = \sqrt{a^2 + b^2}$  et l'angle que fait  $OC$  avec  $Ox$  est donné par  $tg \alpha = \frac{b}{a}$  soit

$$\alpha = \text{arctg} \frac{b}{a}. \text{ Comme, d'autre part,}$$

(fig. 12):

$$a = r \cos \alpha$$

$$b = r \sin \alpha, \text{ on peut écrire}$$

$$a + jb = r \cos \alpha + jr \sin \alpha = r(\cos \alpha + j \sin \alpha),$$

ou encore, puisque

$$\cos \alpha = \frac{e^{j\alpha} + e^{-j\alpha}}{2}$$

$$\sin \alpha = \frac{e^{j\alpha} - e^{-j\alpha}}{2j}$$

$$(47) \quad a + jb = r(\cos \alpha + j \sin \alpha) = r e^{j\alpha} = \sqrt{a^2 + b^2} e^{j \text{arctg} \frac{b}{a}}$$

qui sont des expressions complexes équivalentes de la droite  $OC$  (figure 12).  $r$  est le *module*,  $\alpha$  l'*argument* de la quantité complexe  $a + jb$ .

Les grandeurs alternatives sinusoidales pourront donc être représentées par des quantités complexes. Puisqu'il suffit de multiplier une quantité réelle  $A$ , représentée par une longueur  $OA$  portée suivant  $Ox$  (fig. 13), par la quantité complexe  $e^{j\alpha} = \cos \alpha + j \sin \alpha$  pour la faire passer en  $OA_1$ , soit dans une direction faisant un angle  $\alpha$  avec  $Ox$ , on pourra:

1° représenter une grandeur alternative, par exemple une *fém* sinusoidalee  $= E_m \sin(\omega t - \alpha)$  d'amplitude  $E_m$  et de pulsation  $\omega$ , dont les valeurs instantanées sont mesurées par les projections successives, sur un axe fixe  $Oy$ , d'un vecteur  $OB = E_m$  tournant autour de son origine  $O$  avec une vitesse angulaire constante de  $\omega$  radiants par seconde ou de  $f$  tours par seconde (fig. 13), par une expression complexe

$$(48) \quad E = E_m [\cos(\omega t - \alpha) + j \sin(\omega t - \alpha)] = E_m e^{j(\omega t - \alpha)}$$

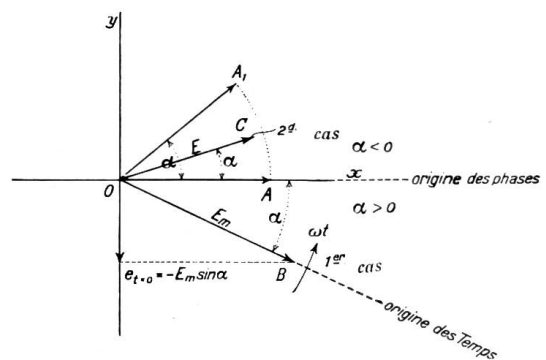


Fig. 13.

2<sup>o</sup> ou bien, si, comme c'est presque toujours le cas, l'on n'a en vue que la recherche des valeurs efficaces et des phases ou des différences de phases des grandeurs alternatives, on pourra représenter la même *fém*  $e = E\sqrt{2}\sin(\omega t - \alpha)$  de valeur efficace  $E$  et de déphasage  $\alpha$ , soit le vecteur  $OC$ , fig. 13, par l'expression complexe

$$(49) \quad \mathbf{E} = E[\cos\alpha - j\sin\alpha] = E\varepsilon^{-j\alpha}$$

$\alpha$  étant, dans les deux cas, considéré comme grandeur algébrique ( $\alpha < 0$  pour  $OC$ ,  $\alpha > 0$  pour  $OB$ , fig. 13).

Ainsi, proposons-nous de déterminer valeur efficace et phase du courant produit par une *fém* alternative sinusoidale  $e = E\sqrt{2}\sin(\omega t - \alpha)$  agissant dans un circuit localisé de résistance effective  $R$ , de self-inductance  $L$  et de capacité  $C$  en série (sans capacité dérivée, ni pertes latérales). Pour cela, nous n'aurons qu'à diviser l'expression complexe de  $e$ , soit

$$\mathbf{E} = E\sqrt{2}\varepsilon^{j(\omega t - \alpha)}$$

par l'expression complexe de l'impédance du circuit, qui est une grandeur vectorielle, soit par

$$\mathbf{Z} = R + j\left[\omega L - \frac{1}{\omega C}\right] = \sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2} \varepsilon^{\operatorname{arctg} \frac{\omega L - \frac{1}{\omega C}}{R}}$$

et l'on obtiendra ainsi l'expression complexe du courant  $i$  cherché, soit:

$$(50) \quad \mathbf{I} = \frac{\mathbf{E}}{\mathbf{Z}} = \frac{E\sqrt{2}[\cos(\omega t - \alpha) + j\sin(\omega t - \alpha)]}{R + j\left[\omega L - \frac{1}{\omega C}\right]} = \frac{E\sqrt{2}\varepsilon^{j(\omega t - \alpha)}}{\sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2} \varepsilon^{j\operatorname{arctg} \frac{\omega L - \frac{1}{\omega C}}{R}}}$$

$$= \frac{E\sqrt{2}\varepsilon^{j(\omega t - \alpha)}}{Z\varepsilon^{j\varphi}} = \frac{E}{Z}\sqrt{2}\varepsilon^{j(\omega t - \alpha - \varphi)}$$

d'où pour  $i$

$$i = \frac{E}{Z}\sqrt{2}\sin(\omega t - \alpha - \varphi) = I\sqrt{2}\sin(\omega t - \alpha - \varphi)$$

avec

$$(51) \quad \left\{ \begin{array}{l} I = \frac{E}{Z} = \frac{E}{\sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2}} \\ \text{et} \\ \operatorname{tg}\varphi = \frac{\omega L - \frac{1}{\omega C}}{R} \end{array} \right.$$

On serait évidemment arrivé au même résultat en partant de la forme réduite dont il a été question sous n<sup>o</sup> 2, ci-dessus.

Le mode de représentation par quantités complexes présente donc l'avantage de permettre la résolution de tous les problèmes relatifs aux courants alternatifs sinusoidaux en régime permanent en partant des lois du courant continu en régime permanent, par exemple de la loi d'Ohm

$$\mathbf{I} = \frac{\mathbf{E}}{\mathbf{Z}}$$

dans laquelle  $\mathbf{I}$ ,  $\mathbf{E}$  et  $\mathbf{Z}$  représentent les expressions complexes de  $i$ ,  $e$  et de l'impédance du circuit. Tous les problèmes des courants alternatifs peuvent ainsi se traiter par

l'algèbre des quantités complexes. Il faut cependant se souvenir que la *partie réelle* du produit  $\mathbf{EI}$  ne représente pas la *puissance réelle* consommée par le circuit et que pour obtenir cette dernière, il faut prendre la *partie réelle du produit* de l'une des grandeurs  $\mathbf{E}$  ou  $\mathbf{I}$  par l'autre dans laquelle on a changé  $j$  en  $-j$ .

Enfin, remarquons que

$$\mathbf{I} = \frac{E}{Z} \sqrt{2} \varepsilon^{j(\omega t - \alpha - \varphi)} \text{ peut aussi s'écrire}$$

$$\mathbf{I} = E \sqrt{2} \varepsilon^{j(\omega t - \alpha)} \frac{\varepsilon^{-j\varphi}}{Z} = E \sqrt{2} \varepsilon^{j(\omega t - \alpha)} \frac{1}{Z} [\cos \varphi - j \sin \varphi].$$

$$(52) \quad = \mathbf{E} \cdot \mathbf{A}$$

$$(53) \quad \text{où} \quad \mathbf{A} = Z^{-1} [\cos \varphi - j \sin \varphi] = \frac{R}{Z^2} - j \frac{\omega L - \frac{1}{\omega c}}{Z^2} = G - jS$$

$$= \sqrt{G^2 + S^2} \varepsilon^{-j \frac{S}{G}} = \frac{1}{\sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega c}\right)^2}} \varepsilon^{-j\varphi}$$

La quantité complexe  $\mathbf{A}$  porte le nom d'*admittance* complexe du circuit localisé; son *module* est égal à l'inverse du module de l'impédance  $\mathbf{Z}$  et son argument est de signe contraire de celui de  $\mathbf{Z}$ .

D'autre part,  $G = \frac{R}{Z^2}$  porte le nom de *conductance* et  $S = \frac{\omega L - \frac{1}{\omega c}}{Z^2}$ , celui de *susceptance du circuit localisé considéré*.

Dans la suite de cet article, nous nous servirons de l'un ou de l'autre des moyens que nous avons passés en revue, suivant qu'il nous paraîtra le mieux approprié.

(à suivre).

