

**Zeitschrift:** Bulletin de l'Association suisse des électriciens  
**Herausgeber:** Association suisse des électriciens  
**Band:** 19 (1928)  
**Heft:** 12

**Artikel:** Beitrag zur Berechnung von Freileitungen insbesondere von Weiterspannleitungen mit grossen Höhenunterschieden  
**Autor:** Langhard, K.  
**DOI:** <https://doi.org/10.5169/seals-1057033>

### **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. [Siehe Rechtliche Hinweise.](#)

### **Conditions d'utilisation**

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. [Voir Informations légales.](#)

### **Terms of use**

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. [See Legal notice.](#)

**Download PDF:** 25.12.2024

**ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>**

# SCHWEIZ. ELEKTROTECHNISCHER VEREIN

# BULLETIN

## ASSOCIATION SUISSE DES ÉLECTRICIENS

Generalsekretariat des Schweiz. Elektrotechnischen Vereins und des Verbandes Schweizerischer Elektrizitätswerke | REDAKTION | Zürich 8, Seefeldstr. 301 | Secrétariat général de l'Association Suisse des Electriciens et de l'Union de Centrales Suisses d'électricité

Verlag und Administration | Fachschriften-Verlag & Buchdruckerei A.-G. | Zürich 4, Stauffacherquai 36/38 | Editeur et Administration

Nachdruck von Text oder Figuren ist nur mit Zustimmung der Redaktion und nur mit Quellenangabe gestattet | Reproduction interdite sans l'assentiment de la rédaction et sans indication des sources

XIX. Jahrgang  
XIX<sup>e</sup> Année

Bulletin No. 12

Juni II 1928  
Juin II

### Beitrag zur Berechnung von Freileitungen insbesondere von Weitspannleitungen mit grossen Höhenunterschieden.

Von K. Langhard, dipl. ing., Bern.

621.319.22(004)

*Der Verfasser untersucht Freileitungen mit grossen Höhenunterschieden der Aufhängepunkte, jene also, die ausserhalb des Anwendungsbereiches der Parabel als Seillinie liegen. An Hand von einfachen Hilfskurven entwickelt er Methoden zur Lösung von mathematisch-statischen Problemen an der Kettenlinie, welche den üblichen, bei der Parabel verwendeten Methoden, an Einfachheit ebenbürtig sind.*

*Im nachfolgenden behandelt er die Ermittlung des Scheitelpunktes der Kettenlinie als Grundlage zur Berechnung der minimalen Leiterabstände; in Anlehnung daran entwickelt er ein Beispiel aus der Praxis; ferner zeigt er, wie die Bestimmung der Vertikalkräfte, sowie der Seilneigungen in den Aufhängepunkten vorgenommen werden können.*

*L'auteur examine le cas des lignes aériennes dont les points d'attache sont situés à des hauteurs très différentes, c. à d. celles pour lesquelles il n'est plus possible de se contenter de l'approximation de la parabole. A l'aide de courbes auxiliaires simples, il développe une méthode pour résoudre les problèmes découlant de l'usage de la chaînette, méthode aussi simple que celle couramment employée avec la parabole.*

*Dans ce qui suit, l'auteur s'occupe de la détermination du sommet de la chaînette, pour en déduire la plus courte distance au sol; il illustre cette opération par un exemple tiré de la pratique et montre ensuite comment on peut déterminer les réactions verticales ainsi que l'inclinaison des conducteurs aux points d'attache.*

Heute werden die Uebertragungsleitungen der Kraftwerke meist nach dem Weitspannsystem projektiert, da man z. B. dank der kombinierten Stahl-Aluminium-Leiterseile in der Lage ist, immer grössere Spannweiten, selbst bei beträchtlichen Höhenunterschieden zu überbrücken.

Für die statische Berechnung des Seiles und der Tragwerke, sowie für die Bestimmung der gegenseitigen Lage von Seil zu Erde oder zu bestimmten Punkten im Raume ist die Kenntnis der Kurve, die das gespannte Leiterseil annimmt, unerlässlich. Bei Annahme vollkommener Biegsamkeit des Leitermaterials ist dies eine Kettenlinie, darf aber bei geringen Höhenunterschieden als eine von dieser nur wenig abweichende Parabel behandelt werden. Die Bestimmung der wichtigsten Kurvenelemente, wie Lage des Scheitelpunktes, Durchhang, Neigung der Seillinie in den Aufhängepunkten ist hier verhältnismässig einfach durchzuführen.

Bei grösseren Ueberhöhungen hingegen (Geländeneigungen von 20% an) ist die Anwendung einer Parabel als Seilkurve nicht mehr zulässig, weil sich grosse Abweichungen gegenüber der Kettenlinie einstellen. Falls der Höhenunterschied so gross wird, dass der Kurvenscheitel ausserhalb der beiden Aufhängepunkte fällt, so liegt der Kettenlinienscheitel immer höher als derjenige der Parabel und

ist diesem gegenüber seitlich verschoben. Auch verläuft die Parabel etwas flacher als die Kettenlinie, sie weist somit den geringeren Durchhang auf als diese.

Es ist somit leicht möglich, dass die unter Zugrundelegung der Parabel berechneten Abstände gegen Erde oder feste Punkte zu gross ausfallen, und dass dann die genaue Nachrechnung mit der Kettenlinie zu unzulässig kleinen Werten führt. Man wird deshalb bei grösseren Ueberhöhungen den Durchhang nach der Kettenlinie ermitteln.

Zur Durchführung jener Untersuchungen ist jedoch meist die Kenntnis der genauen Lage des Kurvenscheitels erforderlich. Von der Seilkurve kennen wir immer zwei ihrer Punkte, die Lage der Axe und den Parameter, so dass die Berechnung – bei der Parabel wenigstens – sehr einfach ist. Anders verhält es sich mit der Kettenlinie. Zufolge der Exponentialfunktionen ist hier eine explizite Lösung nicht möglich. Der Scheitel kann nur durch umständliche Annäherungsverfahren erhalten werden.

Es soll nun hier an Hand von Hilfskurven eine Lösung gezeigt werden, welche bei diesen Verhältnissen sehr rasch zum Ziele führt.

### I. Bestimmung des Kettenlinienscheitels aus 2 beliebigen Kurvenpunkten.

Bezeichnen wir mit:

- $c$  = Parameter der Kettenlinie,
  - $h$  = Höhenunterschied,
  - $a$  = Horizontalabstand,
  - $sh, ch$  = sinus resp. cosinus hyperbolicus (s. Fig. 1),
- so gilt:

$$y_1 = c \operatorname{ch} \left( \frac{x_1}{c} \right) \quad (1)$$

$$y_1 + h = c \operatorname{ch} \left( \frac{x_1 + a}{c} \right). \quad (2)$$

$$h = c \left[ \operatorname{ch} \left( \frac{x_1 + a}{c} \right) - \operatorname{ch} \left( \frac{x_1}{c} \right) \right].$$

Unter Benützung der Beziehung:

$$c h a - c h \beta = 2 \operatorname{sh} \left( \frac{a + \beta}{2} \right) \operatorname{sh} \left( \frac{a - \beta}{2} \right) \text{ ergibt sich für } h:$$

$$h = 2c \operatorname{sh} \left( \frac{x_1}{c} + \frac{a}{2c} \right) \operatorname{sh} \left( \frac{a}{2c} \right) \text{ und } \operatorname{sh} \left( \frac{x_1}{c} + \frac{a}{2c} \right) = \frac{h}{2c \operatorname{sh} \left( \frac{a}{2c} \right)}. \quad (3)$$

Bezeichnen wir mit  $H$  den Horizontalzug, mit  $F$  den Querschnitt des Seiles und mit  $\gamma$  die wahre oder reduzierte Belastung pro Längeneinheit (Gewicht, Schneelast), so ist bekanntlich  $c = \frac{H}{F\gamma}$  und stellt eine Länge dar.  $c$  liegt für praktisch vorkommende Fälle ungefähr im Bereich von 700–1500 m.

In der Praxis sind nun Mastdistanzen von 400 m bei starken Höhenunterschieden schon ausserordentlich gross, so dass der Wert  $\frac{a}{2c}$  immer beträchtlich kleiner als 1 wird und ungefähr bei  $0,2 \div 0,3$  seine obere Grenze erreicht.

Gewöhnlich ist er aber viel kleiner. Wir dürfen somit praktisch genügend genau  $\operatorname{sh} \left( \frac{a}{2c} \right)$  durch  $\frac{a}{2c}$  ersetzen, wie uns eine hyperbolische Tafel, z. B. Hütte I zeigt:

$\varphi = 0,0$	0,100	0,200	0,300
$sh(\varphi) = 0,0$	0,100	0,201	0,305

Mit dieser Annäherung wird also:

$$sh\left(\frac{x_1}{c} + \frac{a}{2c}\right) \approx \frac{h}{a} \tag{4}$$

Das Verhältnis  $\frac{h}{a}$  ist nun für jede Spannweite verschieden, kann also als neue abhängige Variable  $\eta$  eingeführt werden.

Zweckmässig zeichnen wir uns nun den Ausdruck  $\eta = f(\xi) = sh\left(\frac{x_1}{c} + \frac{a}{2c}\right)$  als Kurve auf (siehe Fig. 2), wobei wir sehr gut die Koordinaten aus einer Tafel für hyperbolische Funktionen, wie oben erwähnt, entnehmen können. Die Kurve gilt allgemein, braucht deshalb nur einmal aufgezeichnet zu werden.

Setzen wir nun als Ordinate den jeweiligen Wert  $\frac{h}{a}$  ein, so erhalten wir als Abszisse  $\left(\frac{x_1}{c} + \frac{a}{2c}\right)$ . Bezeichnen wir den Wert mit  $\xi_0$ , so folgt:

$$\frac{x_1}{c} + \frac{a}{2c} = \xi_0$$

und 
$$x_1 = c \xi_0 - \frac{a}{2} \tag{5}$$

Der entsprechende Wert für die Parabel würde lauten:

$$x_1 = c \frac{h}{a} - \frac{a}{2} \tag{5a}$$

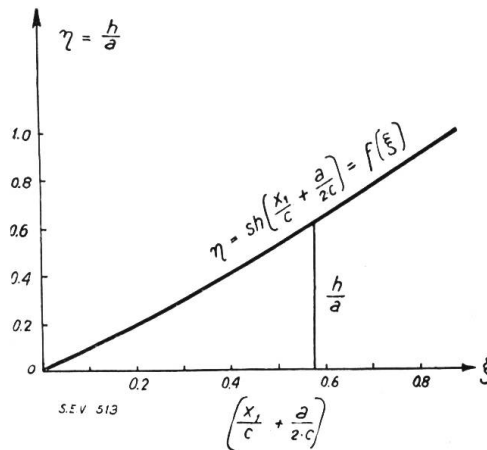


Fig. 2.

Wir sehen, dass beide Formeln gleich gebaut sind, dass aber bei der Kettenlinie angenähert an Stelle von  $\frac{h}{a}$ ,  $\xi_0$  tritt, welches immer kleiner als  $\frac{h}{a}$  ist.

Zur Erläuterung obiger Ausführungen diene folgendes Beispiel aus der Praxis. Ich halte mich hiebei in der Bezeichnungsweise an die von Herrn Dipl. Ing. Jobin „Die Berechnung der Freileitungen“ etc.<sup>1)</sup>, angewandte. In diesem Aufsatz finden sich auch weitere Beispiele ähnlicher Art.

Gegeben waren die Höhenkoten und die Horizontalabstand  $a$  zweier Aufhängepunkte  $A$  und  $B$ , ferner in bezug auf jene, die Lage eines Terrainpunktes  $C$ , endlich der konstant angenommene Horizontalzug und das Gewicht des Seiles pro Längeneinheit bei  $0^0$  und  $2 \text{ kg Schne/m}$ . Gesucht war der Abstand der Leitung vom Terrainpunkt  $C$  (siehe Fig. 3).

Wir untersuchen nun den Fall:

- a) bei Annahme einer Parabel,
- b) bei Annahme einer Kettenlinie nach dem Annäherungsverfahren.

$$H = 2480 \text{ kg}, F = 2,103 \text{ cm}^2,$$

$$\gamma_{\text{Schnee}} = 13,45 \cdot 10^{-3} \text{ kg/cm}^3, \text{ daraus } c = \frac{H}{F\gamma} = 875 \text{ m}.$$

<sup>1)</sup> Siehe Bulletin S. E. V. 1919, No. 6 und No. 7

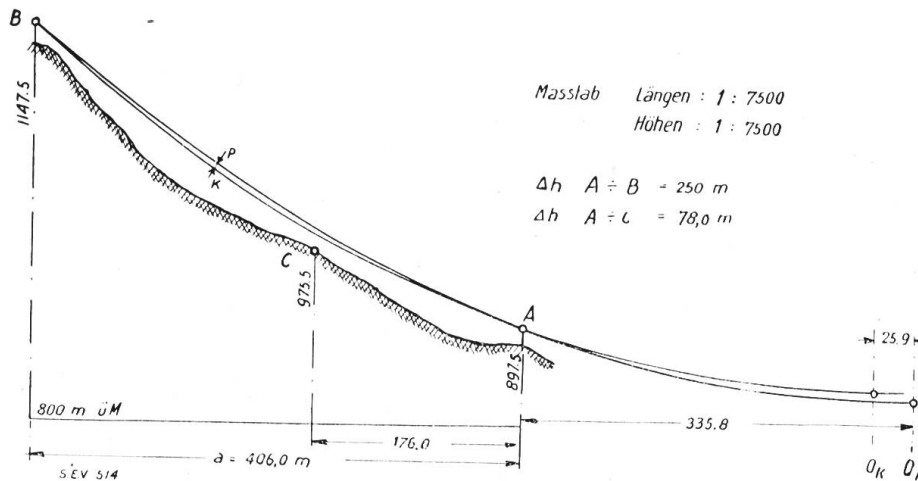


Fig. 3.

a) Berechnung nach der Parabel.

Nach Formel (5a) erhalten wir:

$$x_1 = 875 \frac{250}{406} - \frac{406}{2} = 335,8 \text{ m.}$$

Der Höhenunterschied zwischen dem Kurvenpunkt über C und Punkt A wird:

$$\Delta y_P = + \frac{(335,80 + 176)^2}{2 \cdot 875} - \frac{(335,80)^2}{2 \cdot 875} = \underline{85,24 \text{ m.}}$$

Der Abstand der Leitung vom Punkt C wird somit:

$$85,24 - 78,0 = \underline{7,24 \text{ m.}}$$

b) Berechnung nach der Kettenlinie, angenähert.

Setzen wir denselben Zustand der Leitung wie unter a) voraus, so sind die konstanten Grössen auch für die Kettenlinie genügend genau gültig.

Wir bilden nach I den Wert  $\frac{h}{a} = \frac{250}{406} = 0,615$  und erhalten auf der  $\eta = f(\xi)$  Kurve ein  $\xi_0 = 0,582$ , somit  $x_1 = 875 \cdot 0,582 - 203 = \underline{306,50 \text{ m.}}$

Wie unter a) bilden wir auch hier den Höhenunterschied zwischen dem Kurvenpunkt über C und Punkt A. Wir erhalten:

$$\Delta y_K = + \frac{(306,5 + 176)^2}{2 \cdot 875} + \frac{(306,5 + 176)^4}{24 \cdot 875^3} - \frac{(306,5)^2}{2 \cdot 875} - \frac{(306,5)^4}{24 \cdot 875^3} = \underline{82,16 \text{ m.}}$$

Somit ist der Abstand der Leitung von C  $82,16 - 78,0 = \underline{4,16 \text{ m.}}$

c) Um uns ein Urteil über die erreichbare Genauigkeit des Annäherungsverfahrens zu bilden, berechnen wir den Abstand der Seilkurve vom Punkt C noch logarithmisch an Hand der vollständigen Formel (3).

Die in Klammer gesetzten Zahlen sind die angenäherten Werte.

$$sh\left(\frac{x_1}{c} + \frac{a}{2c}\right) = \frac{h}{2c \operatorname{sh}\left(\frac{a}{2c}\right)} \quad (3)$$

$$\frac{a}{2c} = \frac{406}{2 \cdot 875} = 0,2320 \quad sh(0,2320) = 0,2303.$$

Somit wird die rechte Seite von (3)

$$= \frac{250}{2 \cdot 875 \cdot 0,2303} = 0,62031 \quad (0,61576)$$

und 
$$\left(\frac{x_1}{c} + \frac{a}{2c}\right) = 0,58617 \quad (0,58220),$$

somit 
$$\underline{x_1} = 875 \cdot 0,58617 - 203 = \underline{309,90 \text{ m}} \quad (306,50).$$

Mit dem neuen genauen Scheitelwert wird der Abstand der Seilkurve vom Punkt  $c = 82,96 - 78,0 = \underline{4,96 \text{ m}}$ .

Zum Vergleich stellen wir die nach *a*), *b*) und *c*) erhaltenen Werte zusammen.

- Abstand der Leitung von Punkt *C* nach *a*) 7,24 m (Parabel),
- Abstand der Leitung von Punkt *C* nach *b*) 4,16 m (Kettenlinie angenähert),
- Abstand der Leitung von Punkt *C* nach *c*) 4,96 m (Kettenlinie genau).

Wir sehen, dass *b*) und *c*) nur wenig voneinander abweichen, während *a*) von *b*) und *c*) schon um einige Meter abweicht. Wir rechnen nach der Annäherungsmethode eher etwas zu ungünstig, können also eine kleine Differenz in Kauf nehmen.

Der Fehler zwischen angenäherter und genauer Berechnung ist ziemlich stark von der Horizontalabstand der Aufhängepunkte abhängig. Bei den gewöhnlichen Distanzen von ca. 200–300 m werden indessen die Werte von *b*) und *c*) beinahe übereinstimmen. Ein diesbezüglicher Nachweis erübrigt sich.

## II. Die Bestimmung der Vertikalkräfte in den Aufhängepunkten.

Naturgemäss treten bei Leitungen mit Ueberhöhungen auch Abweichungen zwischen den wirksamen Kräften auf, falls man statt der Kettenlinie die Parabel anwendet.

Diese Verschiedenheiten können einige % ausmachen und dürfen wohl in Kauf genommen werden, da es nicht darauf ankommt, die Kräfte mit derselben Genauigkeit zu bestimmen wie etwa den Durchhang.

Nun lässt sich aber zwischen der im I. Abschnitt entwickelten Kurve (4) (siehe Fig. 2) und den Vertikalkräften eine einfache Beziehung finden, welche ermöglicht, diese Kräfte auf mindestens so einfache Weise zu erhalten wie bei der Parabel, wobei man noch den Vorteil besserer Uebereinstimmung mit den tatsächlichen Verhältnissen genießt.

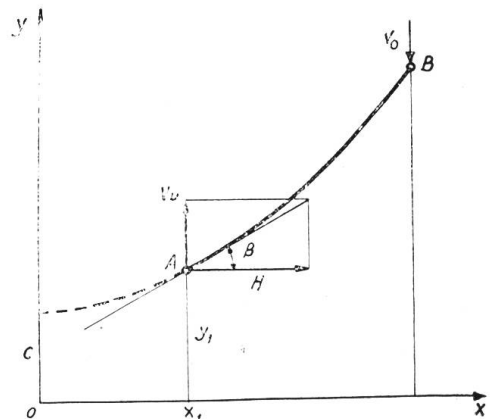


Fig. 4.

Aus Fig. 4 erhalten wir  $V_u = H \operatorname{tg} \beta = H \left[ \frac{dy}{dx} \right]_{x = x_1}$ .

Gleichung der Kettenlinie:

$$y = c \operatorname{ch} \left( \frac{x}{c} \right)$$

$$\left[ \frac{dy}{dx} \right]_{x = x_1} = \operatorname{sh} \left( \frac{x_1}{c} \right), \text{ also } V_u = H \operatorname{sh} \left( \frac{x_1}{c} \right). \quad (6)$$

Nach früher (5) ist: 
$$x_1 = c \xi_0 - \frac{a}{2}.$$

Entnimmt man daraus  $\frac{x_1}{c}$  und setzt es in (6) ein, so ergibt sich:

$$Vu = H sh\left(\xi_0 - \frac{a}{2c}\right), \text{ wobei } sh(\xi_0) = \frac{h}{a} \text{ ist.} \quad (6a)$$

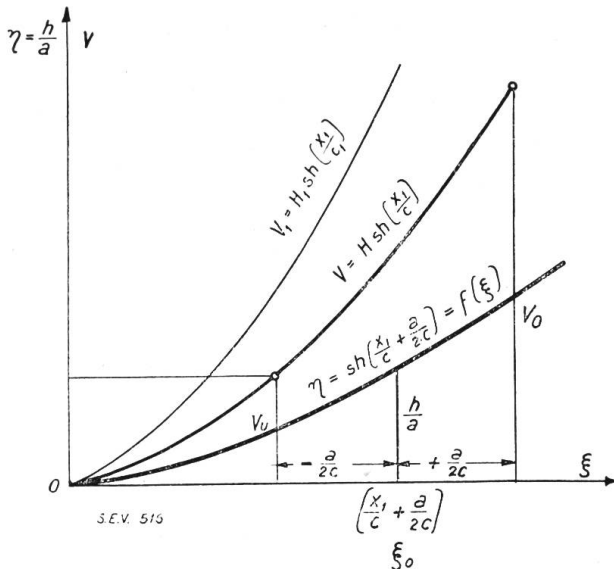


Fig. 5.

Ein Vergleich der Ausdrücke (4) und (6) zeigt, dass sie durch dieselbe Kurve dargestellt werden können. Man hat nämlich nur die Ordinaten der Kurve (4) mit dem für einen Leitungsabschnitt konstant gehaltenen Horizontalzug  $H$  zu multiplizieren, um zur Kurve 6 zu gelangen. Da  $H$  und  $c$  für ein grösseres Leitungsstück konstant sind, braucht die Kurve auch nur einmal aufgezeichnet zu werden.

Verwenden wir auf der ganzen Leitung verschiedene Horizontalzüge, so leiten wir uns zweckmässig für jeden Zug aus (4) eine neue Kurve ab und zeichnen alle im selben Abszissenmasstab und auf dasselbe Blatt wie Kurve (4) auf. (s. Fig. 5).

Das Aufzeichnen lohnt sich jedoch nur, wenn wir eine grössere Anzahl von Lasten zu bestimmen haben.

Die Vertikalkraft  $Vu$  z. B. im unteren Aufhängepunkt wird nun an Hand der Kurven wie folgt bestimmt: Bildung des Wertes  $\frac{h}{a}$ ; Einsetzen in die  $\eta = sh(\xi)$  Kurve. Man erhält wie in Abschnitt I  $\xi_0 = \left(\frac{x_1}{c} + \frac{a}{2c}\right)$ ; von  $\xi_0$  wird nun  $\frac{a}{2c}$  subtrahiert und für diesen neuen Abszissenwert in der  $V = H sh\left(\frac{x_1}{c}\right)$  Kurve das zugehörige  $V$  abgelesen. Würde es sich darum handeln, die Vertikalkraft im oberen Aufhängepunkt zu bestimmen, so liesse sich das Verfahren mit denselben Kurven wiederholen. Wie eine kleine Ueberlegung zeigt, hätten wir aber diesmal  $\frac{a}{2c}$  zu  $\xi_0$  zu addieren statt wie früher von  $\xi_0$  abzuziehen.

### III. Neigungen der Seillinie in den Aufhängepunkten.

Zur Kontrolle der Minimalabstände zwischen Leiter und Tragwerken speziell mit Auslegern ist oft die Bestimmung der Seilneigungen in den Aufhängepunkten erforderlich. Nach Fig. 4 erhalten wir

$$\text{tg } \beta_u = sh\left(\frac{x_1}{c}\right).$$

Wir ermitteln wie nach I für ein gegebenes Verhältnis  $\frac{h}{a}$  den Wert  $\xi_0$ . Nach

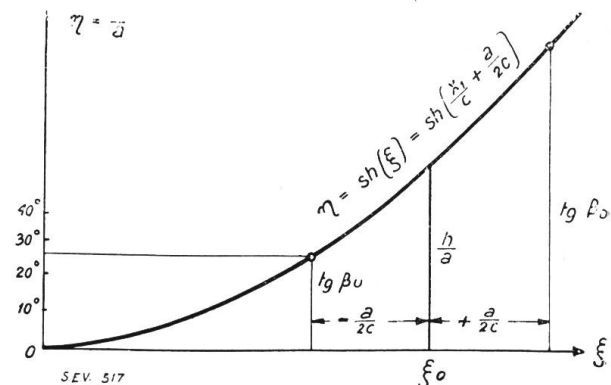


Fig. 6.



Subtraktion resp. Addition von  $\frac{a}{2c}$  erhalten wir eine neue Abszisse und für diese in derselben Kurve die entsprechende Ordinate als  $\operatorname{tg} \beta_{11}$  resp.  $\operatorname{tg} \beta_{10}$ . Wir bringen somit auf der  $\eta$  Axe eine  $\beta$  Teilung an und können dann die Neigungswinkel direkt ablesen (siehe Fig. 6).

## Ein Instrument zur Messung von Induktivitäten und Kapazitäten.

Von Dr. Ing. A. Täuber-Gretler, Zürich.

621.374.9

*Der Autor beschreibt ein Induktionsdynamometer mittels welchem in besonderer Schaltung auf ca.  $\pm 1\%$  genau Induktivitäten und Kapazitäten gemessen werden können und das vor den bekannten Messmethoden den Vorteil der rascheren und einfacheren Durchführbarkeit der Messungen aufweist. Er entwickelt ausserdem die Gleichungen für die Wirkungsweise des Instrumentes.*

*L'auteur décrit un dynamomètre à induction, au moyen duquel on peut mesurer, en schéma spécial, inductivités et capacités à environ  $\pm 1\%$  près. Cet instrument a sur les méthodes connues l'avantage de permettre une exécution plus rapide et plus simple des mesures. L'auteur développe en outre les équations qui régissent le fonctionnement de l'appareil.*

Häufig besteht das Bedürfnis, Messungen von Induktivitäten und Kapazitäten mittlerer Grössenordnung — etwa von 0,01 Henry bzw. von 0,01 Microfarad an aufwärts — auszuführen, bei denen man sich mit einer Genauigkeit von ca. 1% begnügen kann, andererseits aber fordert, dass die Messungen mit möglichst geringem Zeitaufwand und ohne Zuhilfenahme kostspieliger Apparaturen, wie sie nur einem wohlausgerüsteten Laboratorium zur Verfügung stehen, vorgenommen werden können.

Es existieren mannigfache Apparatentypen, welche diesem Bedürfnis entgegenkommen. Die meisten beruhen auf dem Prinzip der Wheatstoneschen Brücke und enthalten, in gemeinsamem Kasten eingebaut, einen Messdraht mit Teilung, Vergleichsnormale, Batterie, Wechselstrominduktorium und Telephon. Zur ausschliesslichen Messung von Kapazitäten dienen auch Instrumente, an denen der gesuchte Wert direkt abgelesen werden kann.

Das nachstehend beschriebene Instrument (Fig. 1) besitzt den Vorteil, innerhalb weiter Grenzen sowohl Induktivitäten als auch Kapazitäten messen zu können. Der erforderliche Messtrom kann jedem Wechselstromnetz entnommen werden. Es ist ein Induktionsdynamometer von der Art, wie sie an anderer Stelle ausführlich erläutert wurde.<sup>1)</sup> Wirkungsweise und Schaltung für den vorliegenden Zweck seien vorerst kurz behandelt.

Wird durch die Feldspule eines elektrodynamischen Instruments mit eisengeschlossenem Kraftlinienweg ein Wechselstrom geschickt und ist die Drehspule über einen Widerstand geschlossen, welcher induktiv oder kapazitiv wirken möge, so zeigt die Drehspule unter dem Einfluss der in ihr durch den Kraftfluss der Feldspule induzierten EMK bei überwiegender Induktivität das Bestreben, sich in eine solche Lage zu drehen, dass der sie durchsetzende resultierende Kraftfluss Null ist. Die elektrodynamische Kraftwirkung verschwindet, wenn sich Induktivität und Kapazität im Drehspulkreis in ihrer Wirkung gerade aufheben. Bei überwiegender



Fig. 1.

<sup>1)</sup> Siehe den Aufsatz des Verfassers: Das „Induktionsdynamometer“, Bulletin S. E. V., XII, 1926, Seite 545.