

Zeitschrift: Bulletin de l'Association suisse des électriciens
Herausgeber: Association suisse des électriciens
Band: 22 (1931)
Heft: 5

Artikel: Die symbolische Rechnung der Wechselstromtechnik und die ebene Vektorrechnung [Fortsetzung und Schluss]
Autor: Landolt, Max
DOI: <https://doi.org/10.5169/seals-1058568>

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. [Siehe Rechtliche Hinweise.](#)

Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. [Voir Informations légales.](#)

Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. [See Legal notice.](#)

Download PDF: 25.12.2024

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>

$$\mathfrak{S}_1 + \mathfrak{S}_2 + \mathfrak{S}_3 = 0.$$

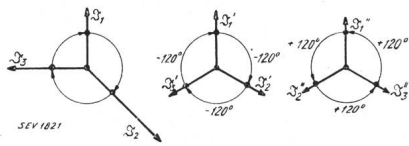


Fig. 31.

Die drei Vektoren des gesuchten *Mit*-Systemes, die *mit* dem durch die gegebenen Vektoren bestimmten Sinn der Verdrehung aufeinander folgen, sollen \mathfrak{S}'_1 , \mathfrak{S}'_2 und \mathfrak{S}'_3 heissen. Zwischen ihnen gelten die Beziehungen:

$$\mathfrak{S}'_2 = e^{-j 120^\circ} \mathfrak{S}'_1 \quad \mathfrak{S}'_3 = e^{-j 240^\circ} \mathfrak{S}'_1.$$

Die drei Vektoren des gesuchten *Gegen*-Systems, die *gegen* den durch die gegebenen Vektoren bestimmten Sinn der Verdrehung aufeinander folgen, sollen \mathfrak{S}''_1 , \mathfrak{S}''_2 und \mathfrak{S}''_3 heissen. Zwischen ihnen gelten die Beziehungen:

$$\mathfrak{S}''_2 = e^{+j 120^\circ} \mathfrak{S}''_1 \quad \mathfrak{S}''_3 = e^{+j 240^\circ} \mathfrak{S}''_1.$$

Für die drei gegebenen Vektoren erhält man die Ansätze:

$$\mathfrak{S}_1 = \mathfrak{S}'_1 + \mathfrak{S}''_1 \quad \mathfrak{S}_2 = \mathfrak{S}'_2 + \mathfrak{S}''_2 \quad \mathfrak{S}_3 = \mathfrak{S}'_3 + \mathfrak{S}''_3.$$

Berücksichtigt man die zwischen den Vektoren des *Mit*- und des *Gegen*-Systems bestehenden Beziehungen, so erhält man:

$$\begin{aligned} \mathfrak{S}_1 &= \mathfrak{S}'_1 + \mathfrak{S}''_1 \\ \mathfrak{S}_2 &= e^{-j 120^\circ} \mathfrak{S}'_1 + e^{+j 120^\circ} \mathfrak{S}''_1 \\ \mathfrak{S}_3 &= e^{-j 240^\circ} \mathfrak{S}'_1 + e^{+j 240^\circ} \mathfrak{S}''_1. \end{aligned}$$

Um zur Bestimmung des Vektors \mathfrak{S}'_1 des *Mit*-Systems den Vektor \mathfrak{S}''_1 des *Gegen*-Systems auf die einfachste Weise zu eliminieren, verdreht man die Vektoren der zweiten Gleichung um $+120^\circ$ und die Vektoren der dritten Gleichung um -120° .

$$\begin{aligned} \mathfrak{S}_1 &= \mathfrak{S}'_1 + \mathfrak{S}''_1 \\ e^{+j 120^\circ} \mathfrak{S}_2 &= \mathfrak{S}'_1 + e^{+j 240^\circ} \mathfrak{S}''_1 \\ e^{-j 120^\circ} \mathfrak{S}_3 &= \mathfrak{S}'_1 + e^{+j 120^\circ} \mathfrak{S}''_1. \end{aligned}$$

Diese drei Gleichungen addiert man und erhält so, da die Summe der drei symmetrischen Vektoren

\mathfrak{S}'_1 , $e^{+j 120^\circ} \mathfrak{S}'_1$ und $e^{+j 240^\circ} \mathfrak{S}'_1$ Null ist:

$$\boxed{\mathfrak{S}'_1 = \frac{\mathfrak{S}_1 + e^{+j 120^\circ} \mathfrak{S}_2 + e^{-j 120^\circ} \mathfrak{S}_3}{3}} \quad (69)$$

Um zur Bestimmung des Vektors \mathfrak{S}''_1 des *Gegen*-Systems den Vektor \mathfrak{S}'_1 des *Mit*-Systems auf die einfachste Weise zu eliminieren, verdreht man die Vektoren der zweiten Gleichung um -120° und die Vektoren der dritten Gleichung um $+120^\circ$. Durch Addition der drei Gleichungen erhält man dann:

$$\boxed{\mathfrak{S}''_1 = \frac{\mathfrak{S}_1 + e^{-j 120^\circ} \mathfrak{S}_2 + e^{+j 120^\circ} \mathfrak{S}_3}{3}} \quad (70)$$

Nach den in den beiden Gl. (69) und (70) enthaltenen Konstruktionsvorschriften sind in Fig. 32 die beiden Vektoren \mathfrak{S}'_1 und \mathfrak{S}''_1 konstruiert. Die

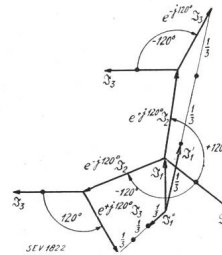


Fig. 32.

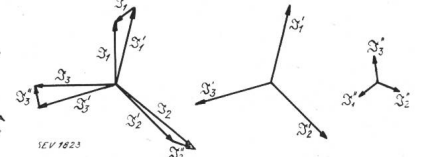


Fig. 33.

dadurch ermöglichte Zerlegung des gemäss Fig. 31 gegebenen unsymmetrischen Dreiphasensystems in zwei symmetrische Dreiphasensysteme ist in Fig. 33 dargestellt.

312.

Impedanz- und Admittanzoperatoren.

Herrscht längs eines Stromkreisteiles mit den Endpunkten *A* und *B* die Wechselspannung *U* und fliesst in dem betrachteten Stromkreisteil der Wechselstrom *I*, so können diese beiden Grössen durch die Vektoren \mathfrak{U} und \mathfrak{I} dargestellt werden. Für beide Vektoren gelte gemeinsam der in Fig. 34 durch einen Pfeil angedeutete Bezugssinn. Stellt man nun die Impedanz des betrachteten Stromkreisteiles als Quotient von Spannung und Stromstärke dar, so erscheint sie als Quotient von zwei Vektoren, also als Operator. Man erhält für den *Impedanz-Operator* Gl. (71).

$$\dot{Z} = \frac{\mathfrak{U}}{\mathfrak{I}}. \quad (71)$$

Ganz analog erhält man für den *Admittanz-Operator* Gl. (72).

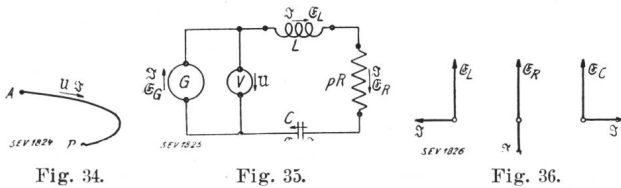
$$\dot{Y} = \frac{\mathfrak{I}}{\mathfrak{U}}. \quad (72)$$

Da weder die Impedanz noch die Admittanz zeitlich sinusförmig veränderliche Grössen sind, dürfen sie in einer Gleichung, die zeitliche Sinusfunktionen darstellende Vektoren enthält, nicht gleichermassen durch Vektoren ausgedrückt werden. Ein Vektorquotient entspricht dagegen sehr gut ihrer Eigenart, zwischen Strom- und Spannungswellen eine Phasenverschiebung hervorzubringen.

Beispiel:

Gegeben seien eine Induktivität *L*, ein Ohmscher Widerstand *R* und ein Kondensator *C*, die in Reihenschaltung von einem Wechselstromgenerator *G* unter Spannung gehalten werden. Die Wechselspannung *U* habe die Kreisfrequenz ω . Der Ohmsche Widerstand *R* sei von einem Parameter *p* abhängig. Gesucht sei die in dem gegebenen Stromkreis herrschende Stromstärke *I* sowie die resultierende Impedanz *Z* der drei in Reihe geschalteten Stromverbraucher.

In Fig. 35 sind die Bezugssinne in das Schema so eingezeichnet, dass die Stromstärke in den verschiedenen Punkten des Stromkreises überall durch



denselben Vektor \mathfrak{I} ausgedrückt wird. Rechnet man mit den Vektoren \mathfrak{E}_L , \mathfrak{E}_R und \mathfrak{E}_C der elektromotorischen Kräfte²⁴⁾ der drei Stromkreisteile, so ergeben sich die in Fig. 36 enthaltenen lokalen Vektordiagramme. Danach gelten die drei Gleichungen:

$$\mathfrak{E}_L = -j\omega L \mathfrak{I} \quad \mathfrak{E}_R = -pR \mathfrak{I} \quad \mathfrak{E}_C = j\frac{1}{\omega C} \mathfrak{I}$$

Da die verschiedenen Bezugssinne einen einheitlichen Umlaufsinn festlegen, darf die Summe aller elektromotorischen Kräfte gleich Null gesetzt werden.

$$\sum \mathfrak{E} = 0$$

So erhält man für die elektromotorische Kraft \mathfrak{E}_G des Generators:

$$\mathfrak{E}_G = -\mathfrak{E}_L - \mathfrak{E}_R - \mathfrak{E}_C$$

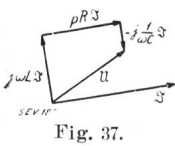
$$\mathfrak{E}_G = j\omega L \mathfrak{I} + pR \mathfrak{I} - j\frac{1}{\omega C} \mathfrak{I}$$

Legt man, um den Spannungsvektor \mathfrak{U} in der konventionellen Lage zu erhalten, seinen Bezugssinn so, wie es in Fig. 35 geschehen ist, so gilt:

$$\mathfrak{U} = \mathfrak{E}_G$$

Damit erhält man:

$$\mathfrak{U} = j\omega L \mathfrak{I} + pR \mathfrak{I} - j\frac{1}{\omega C} \mathfrak{I} \quad (73)$$



Konstruiert man gemäss der in dieser Gleichung enthaltenen Konstruktionsvorschrift das Vektordiagramm, so erhält man den in Fig. 37 dargestellten Linienzug.

²⁴⁾ Die der Induktivität, dem Ohmschen Widerstand und der Kapazität zugeschriebenen elektromotorischen Kräfte haben keine unmittelbare physikalische Bedeutung, sie sind jedoch als Rechnungsgrössen äusserst bequem zu verwenden. Ihre Einführung gestattet, das «dynamische» Problem in ein «statisches» überzuführen, wie die Einführung der Zentrifugalkraft das dynamische Problem des Gleichgewichtes rotierender Körper in ein statisches überführt.

Statt mit elektromotorischen Kräften zu rechnen, kann man auch mit Spannungen arbeiten. Insbesondere bei komplizierteren Problemen ist es sehr empfehlenswert, ausschliesslich nur mit der einen oder andern Grössenart zu rechnen, da zufolge der in Satz 5: «Spannung, Potential, Potentialdifferenz und elektromotorische Kraft» des AEF¹⁰⁾ getroffenen Festsetzung Spannung und EMK bei gemeinsamem Bezugssinn entgegengesetztes Vorzeichen haben. Die gemischte Verwendung beider Grössenarten führt deshalb leicht zu Vorzeichenfehlern.

Dividiert man Gl. (73) durch \mathfrak{I} , so erhält man gemäss Gl. (71) den Impedanzoperator \dot{Z} .

$$\dot{Z} = pR + j\left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)$$

Für die gesuchte Impedanz Z , den Betrag des Impedanzoperators \dot{Z} , findet man gemäss Gl. (19):

$$Z = \sqrt{(pR)^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2}$$

Löst man die Gl. (73) nach \mathfrak{I} auf, so erhält man für den Vektor der gesuchten Stromstärke:

$$\mathfrak{I} = \frac{1}{pR + j\left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)} \mathfrak{U}$$

Hieraus entnimmt man gemäss Gl. (72) den Admittanzoperator zu:

$$\dot{Y} = \frac{1}{pR + j\left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)} \quad (74)$$

Durch Vergleich mit Gl. (58) ersieht man, dass der gefundene Admittanzoperator den Aufbau eines Kreisoperators hat. Die darin enthaltenen Operatoren \dot{a} , \dot{b} , \dot{c} und \dot{d} findet man durch Identifizierung der beiden Gl. (74) und (58).

$$\frac{1}{j\left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right) + pR} \equiv \frac{\dot{a} + p\dot{b}}{\dot{c} + p\dot{d}}$$

So erhält man:

$$\begin{aligned} \dot{a} &= a_w + ja_b = 1 & a_w &= 1 & a_b &= 0 \\ \dot{b} &= b_w + jb_b = 0 & b_w &= 0 & b_b &= 0 \\ \dot{c} &= c_w + jc_b = j\left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right) & c_w &= 0 & c_b &= \omega L - \frac{1}{\omega C} \\ \dot{d} &= d_w + jd_b = R & d_w &= R & d_b &= 0. \end{aligned}$$

Die Spitze des Vektors \mathfrak{I} bewegt sich also auf einem Kreis, wenn der Parameter p seinen Wert verändert.

Den Betrag I des Vektors \mathfrak{I} bestimmt man gemäss dem Ausdruck:

$$I = \frac{U}{\sqrt{(pR)^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2}}$$

Beispiel:

Es sei die Ableitung der bekannten, für den stationären Zustand gültigen Differentialgleichungen für Stromstärke und Spannung einer Wechselstrom-Fernleitung²⁵⁾ gezeigt. Die Induktivität, der

²⁵⁾ Diese Gleichungen finden sich zum Beispiel bei Alfred Fraenckel, Theorie der Wechselströme, 2. Auflage, S. 185, Gleichungen (212) und (213), Verlag Jul. Springer, 1921.

Ohmsche Widerstand, die Kapazität und die Ableitung pro km Länge der Fernleitung seien: L, R, C und G . Für ein sehr kleines Längenelement dx ergeben sich diese Konstanten dann zu:

$$L dx \quad R dx \quad C dx \quad G dx.$$

Für die Leitung gilt dann das Schema der Fig. 38, in das für Strom und Spannung die Bezugssinne eingezeichnet sind.

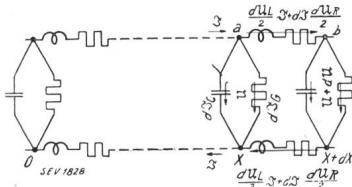


Fig. 38.

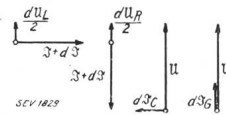


Fig. 39.

Rechnet man ausschliesslich mit Spannungsvektoren, so erhält man für ein Leitungselement dx im Abstände X von einem Bezugspunkte die vier lokalen Vektordiagramme von Fig. 39.

Die diesen Vektordiagrammen entsprechenden Gleichungen lauten:

$$\begin{aligned} \frac{dU_L}{2} &= \frac{j\omega L dx}{2} (\mathfrak{I} + d\mathfrak{I}) \\ \frac{dU_R}{2} &= \frac{R dx}{2} (\mathfrak{I} + d\mathfrak{I}) \\ d\mathfrak{I}_c &= j\omega C dx U \\ d\mathfrak{I}_g &= G dx U. \end{aligned}$$

Die Bedingung, dass die Summe aller auf den Punkt a zufließenden Ströme Null werden muss, führt zu der Gleichung:

$$\mathfrak{I} - d\mathfrak{I}_c - d\mathfrak{I}_g - (\mathfrak{I} + d\mathfrak{I}) = 0.$$

Hieraus erhält man:

$$\begin{aligned} -d\mathfrak{I} &= d\mathfrak{I}_c + d\mathfrak{I}_g \\ -d\mathfrak{I} &= j\omega C dx U + G dx U \\ -\frac{d\mathfrak{I}}{dx} &= (G + j\omega C) U. \end{aligned} \tag{75}$$

Die Bedingung, dass die Spannung längs den Wegen a, x und $a, b, x + dx, x$ gleichgross sein muss, führt zu der Gleichung:

$$\begin{aligned} U &= \frac{dU_L}{2} + \frac{dU_R}{2} + (U + dU) + \frac{dU_R}{2} + \frac{dU_L}{2} \\ -dU &= dU_L + dU_R \\ -dU &= j\omega L dx (\mathfrak{I} + d\mathfrak{I}) + R dx (\mathfrak{I} + d\mathfrak{I}). \end{aligned}$$

Da man den unendlich kleinen Vektor $d\mathfrak{I}$ neben dem Vektor \mathfrak{I} vernachlässigen muss, erhält man hieraus:

$$-\frac{dU}{dx} = (R + j\omega L) \mathfrak{I}. \tag{76}$$

Differenziert man diese Gleichung nach dx , so erhält man den Ausdruck:

$$-\frac{d^2 U}{dx^2} = (R + j\omega L) \frac{d\mathfrak{I}}{dx}.$$

Hierin kann man den Differentialquotienten $d\mathfrak{I}/dx$ aus Gl. (75) einsetzen und erhält so die gesuchte Differentialgleichung für die Spannung:

$$\frac{d^2 U}{dx^2} = (R + j\omega L) (G + j\omega C) U. \tag{77}$$

Differenziert man analog noch Gl. (75) nach dx , so erhält man den Ausdruck:

$$-\frac{d^2 \mathfrak{I}}{dx^2} = (G + j\omega C) \frac{dU}{dx}$$

Hierin kann man den Differentialquotienten dU/dx aus Gl. (76) einsetzen und erhält so die gesuchte Differentialgleichung für die Stromstärke:

$$\frac{d^2 \mathfrak{I}}{dx^2} = (R + j\omega L) (G + j\omega C) \mathfrak{I}. \tag{78}$$

32.

Vektorielle Behandlung von Impedanzen.

Es erweist sich als zweckmässig, auch Impedanzen, die an sich weder gerichtete Grössen noch zeitliche Sinusfunktionen sind, als Vektoren darzustellen. Der Grund ist der, dass sich die resultierende Impedanz einer Reihenschaltung mehrerer Impedanzen durch Addition der Vektoren, die die einzelnen Impedanzen darstellen, finden lässt.

Im vorhergehenden Abschnitt erschien die Impedanz als Vektorquotient, als Operator der Form:

$$\dot{Z} = Z_w + j Z_b.$$

Um zur Vektordarstellung des Impedanzoperators \dot{Z} zu gelangen, genügt es, ihn mit einem beliebigen Einheitsvektor i zu multiplizieren. Dieser Einheitsvektor i braucht keine elektrische Grösse zu sein. Er kann eine rein geometrische Grösse, eine gerichtete Strecke sein.

Multipliziert man obige Gleichung mit dem Vektor i , so erhält man:

$$\dot{Z} i = Z_w i + j Z_b i.$$

Führt man für die Vektoren $\dot{Z} i, Z_w i$ und $j Z_b i$ die Bezeichnungen $\mathfrak{Z}, \mathfrak{Z}_w$ und \mathfrak{Z}_b ein, so schreibt sich diese Gleichung in der Form:

$$\mathfrak{Z} = \mathfrak{Z}_w + \mathfrak{Z}_b.$$

Fig. 40 veranschaulicht die Zusammenhänge.

Der Vektor \mathfrak{Z} und seine beiden Komponenten \mathfrak{Z}_w und \mathfrak{Z}_b stellen bildlich die Dreh-Streckung dar, die der darin enthaltene Operator \dot{Z} ausübt, wenn er mit einem Vektor multipliziert wird. Impedanz-Vektoren dienen lediglich dazu, die graphische Kombination von Impedanzen zu resultierenden Impedanzen zu ermöglichen. Soll dagegen ein Zeitvektor, der eine Stromstärke darstellt, in einen eine Spannung darstellenden Zeitvektor übergeführt werden, so ist er mit dem Impedanz-Operator, das heisst, mit einem Vektorquotient zu multiplizieren.

Was nachstehend für Impedanz-Operatoren und Impedanz-Vektoren gezeigt wird, gilt sinngemäss auch für Admittanz-Operatoren und Admittanz-Vektoren.

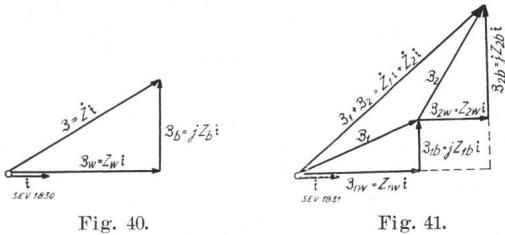


Fig. 40.

Fig. 41.

321.

Reihenschaltung.

Es soll gezeigt werden, dass der Operator \dot{Z} der resultierenden Impedanz einer Reihenschaltung von zwei Impedanzen, deren Operatoren \dot{Z}_1 und \dot{Z}_2 sein mögen, durch Addition der sie darstellenden Vektoren graphisch gefunden werden kann.

Gegeben seien die beiden Impedanzoperatoren:

$$\dot{Z}_1 = Z_{1w} + j Z_{1b}$$

$$\dot{Z}_2 = Z_{2w} + j Z_{2b}$$

Durch Multiplikation mit dem Einheitsvektor i erhält man die Vektoren \mathfrak{Z}_1 und \mathfrak{Z}_2 .

$$\mathfrak{Z}_1 = \mathfrak{Z}_{1w} + \mathfrak{Z}_{1b} \quad \mathfrak{Z}_2 = \mathfrak{Z}_{2w} + \mathfrak{Z}_{2b}$$

$$\mathfrak{Z}_{1w} = Z_{1w} i \quad \mathfrak{Z}_{2w} = Z_{2w} i$$

$$\mathfrak{Z}_{1b} = j Z_{1b} i \quad \mathfrak{Z}_{2b} = j Z_{2b} i$$

Durch graphische Addition der beiden Vektoren \mathfrak{Z}_1 und \mathfrak{Z}_2 findet man den Vektor $\mathfrak{Z}_1 + \mathfrak{Z}_2$. Die Zusammenhänge sind in Fig. 41 veranschaulicht.

Die Zusammenhänge sind so einfach, dass man anhand der Fig. 41 sogleich erkennt, dass der durch den Vektor $\mathfrak{Z}_1 + \mathfrak{Z}_2$ dargestellte Impedanzoperator gleich der Summe der Operatoren \dot{Z}_1 und \dot{Z}_2 ist.

$$\dot{Z}_1 + \dot{Z}_2 = Z_{1w} + j Z_{1b} + Z_{2w} + j Z_{2b}$$

322.

Parallelschaltung.

Es seien die Vektoren \mathfrak{Z}_1 und \mathfrak{Z}_2 von zwei parallelgeschalteten Impedanzen graphisch gegeben. Gesucht sei der Vektor der resultierenden Impedanz.

Es soll nun eine Konstruktionsvorschrift abgeleitet werden, nach der der gesuchte Vektor \mathfrak{Z} graphisch ermittelt werden kann²⁶⁾. Dividiert man die beiden gegebenen Vektoren durch einen beliebigen Einheitsvektor i , so erhält man zwei Operatoren \dot{Z}_1 und \dot{Z}_2 .

²⁶⁾ Es bestehen verschiedene graphische Lösungen für diese Aufgabe. Wohl die älteste, von E. Orlich herrührend, findet sich bei Alfred Fraenckel, Theorie der Wechselströme, 2. Auflage, S. 51, Verlag Jul. Springer, 1921. Weitere Lösungen haben angegeben: H. Rukop, Diagramm für die Parallelschaltung beliebiger Scheinwiderstände, Archiv für Elektrotechnik, Band XXI (1929), S. 444, ferner: Albert von Brunn, Neue Methoden zur graphischen Bestimmung von Wechselstrom-Ortskurven, Bull. SEV 1929, S. 75.

Die hier behandelte Lösung lehnt sich an eine Veröffentlichung von E. Gross an: «Ueber Ortskurven bei der Parallelschaltung verschiedener Scheinwiderstände, von denen einer veränderlich ist», E. u. M. 1929, S. 885, sowie an die Konstruktion von Rukop.

$$\frac{\mathfrak{Z}_1}{i} = \dot{Z}_1 \quad \frac{\mathfrak{Z}_2}{i} = \dot{Z}_2$$

Führt man gemäss Fig. 42 die Spannung u und die Ströme \mathfrak{I}_1 und \mathfrak{I}_2 ein, so gelten die Beziehungen:

$$\mathfrak{I}_1 = \frac{u}{\dot{Z}_1} \quad \mathfrak{I}_2 = \frac{u}{\dot{Z}_2}$$

Für den Operator \dot{Z} der resultierenden Impedanz der Parallelschaltung gilt dann die Beziehung:

$$\dot{Z} = \frac{u}{\mathfrak{I}_1 + \mathfrak{I}_2}$$

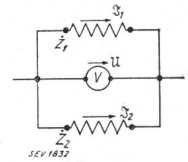


Fig. 42.

Ersetzt man hierin die Stromvektoren \mathfrak{I}_1 und \mathfrak{I}_2 , so erhält man:

$$\dot{Z} = \frac{u}{\frac{u}{\dot{Z}_1} + \frac{u}{\dot{Z}_2}}$$

Durch Kürzung und Ausrechnung findet man hieraus:

$$\dot{Z} = \frac{\dot{Z}_1 \dot{Z}_2}{\dot{Z}_1 + \dot{Z}_2} \tag{79}$$

Rechnet man vorläufig nicht mit dem Operator \dot{Z}_2 , sondern mit einem veränderlichen Vielfachen davon, also mit $p_2 \dot{Z}_2$, so erhält man für den resultierenden Impedanzoperator:

$$\dot{Z} = \frac{p_2 \dot{Z}_1 \dot{Z}_2}{\dot{Z}_1 + p_2 \dot{Z}_2} \tag{80}$$

Durch Vergleich mit Gl. (58) ersieht man, dass der gefundene Operator \dot{Z} den Aufbau eines Kreisoperators hat. Die darin enthaltenen Operatoren \dot{a} , \dot{b} , \dot{c} und \dot{d} findet man durch Identifizierung der beiden Gl. (80) und (58).

$$\frac{p_2 \dot{Z}_1 \dot{Z}_2}{\dot{Z}_1 + p_2 \dot{Z}_2} \equiv \frac{\dot{a} + p \dot{b}}{\dot{c} + p \dot{d}}$$

So erhält man:

$$\dot{a} = 0 \quad \dot{b} = \dot{Z}_1 \dot{Z}_2 \quad \dot{c} = \dot{Z}_1 \quad \dot{d} = \dot{Z}_2 \tag{81}$$

Multipliziert man Gl. (80) noch mit dem Einheitsvektor i , durch den man vorher die beiden gegebenen Vektoren \mathfrak{Z}_1 und \mathfrak{Z}_2 dividiert hat, so erhält man:

$$\mathfrak{Z}_{p_2} = \frac{p_2 \dot{Z}_1 \dot{Z}_2}{\dot{Z}_1 + p_2 \dot{Z}_2} i \tag{82}$$

Der Vektor \mathfrak{Z}_{p_2} läuft somit bei Veränderung des Parameters p_2 auf einem Kreise. Nimmt der Parameter p_2 insbesondere den Wert Null an, so wird auch der gefundene Kreisoperator zu Null, damit erhält auch der resultierende Impedanzvektor \mathfrak{Z}_0 die Länge Null. Der Kreis geht also durch den Fusspunkt der Vektoren \mathfrak{Z}_1 und \mathfrak{Z}_2 . Wird da-

gegen der Parameter p_2 unendlich gross, so nimmt der Kreisoperator den Wert \dot{Z}_1 an. Der Vektor \mathfrak{Z}_∞ fällt also mit dem Vektor $\dot{Z}_1 i$ zusammen. Der Kreis geht also durch die Spitze des Vektors \mathfrak{Z}_1 . Diese Zusammenhänge sind in Fig. 43 veranschaulicht.

Ein geometrischer Ort für den Kreismittelpunkt ist die Mittelsenkrechte des Vektors \mathfrak{Z}_1 . Ein zweiter geometrischer Ort lässt sich durch Berechnung des Mittelpunktsoperators \dot{m} oder des Mittelpunktsvektors $\dot{m} i$ finden.

Gemäss Gl. (59) findet man den Ansatz:

$$\dot{m} = \frac{-\dot{Z}_1 \dot{Z}_2 \dot{Z}_{1k}}{\dot{Z} \dot{Z}_{2k} - \dot{Z}_{1k} \dot{Z}_2}$$

Im Zähler erscheint das Produkt der konjugierten Operatoren \dot{Z}_1 und \dot{Z}_{1k} . Dieses darf nach Gl. (40) dem Quadrat des Betrages gleichgesetzt werden. Es wird also:

$$\dot{Z}_1 \dot{Z}_{1k} = Z_1^2$$

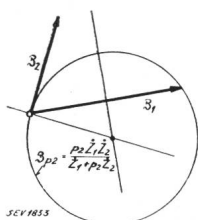


Fig. 43.

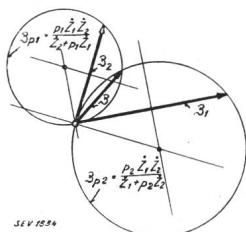


Fig. 44.

Schreibt man die auftretenden Operatoren in Binom-Form, so erhält man für den Nenner die Gleichung:

$$\dot{Z}_1 \dot{Z}_{2k} - \dot{Z}_{1k} \dot{Z}_2 = (Z_{1w} + j Z_{1b}) (Z_{2w} - j Z_{2b}) - (Z_{1w} - j Z_{1b}) (Z_{2w} + j Z_{2b})$$

Multipliziert man die rechte Seite dieses Ausdruckes aus, und ordnet man, wobei sich einige Glieder herausheben, so erhält man:

$$\dot{Z}_1 \dot{Z}_{2k} - \dot{Z}_{1k} \dot{Z}_2 = -j 2 (Z_{1w} Z_{2b} - Z_{1b} Z_{2w})$$

Damit erhält der Mittelpunktsoperator die Form:

$$\dot{m} = \frac{-Z_1^2 \dot{Z}_2}{-j 2 (Z_{1w} Z_{2b} - Z_{1b} Z_{2w})}$$

Multipliziert man wieder mit dem bisher gebrauchten Einheitsvektor i , so erhält man mit geringfügiger Umstellung für den Mittelpunktsvektor $\dot{m} i$ den Ausdruck:

$$\dot{m} i = \frac{Z_1^2}{2 (Z_{1w} Z_{2b} - Z_{1b} Z_{2w})} (-j \dot{Z}_2 i)$$

Hierin ist der erste Teil ein reiner Faktor, der zweite Teil dagegen stellt den um einen rechten Winkel verdrehten Vektor \mathfrak{Z}_2 dar. Die Richtung des Mittelpunktsvektors steht somit senkrecht auf der Richtung des gegebenen Vektors \mathfrak{Z}_2 . Damit ist der zweite geometrische Ort für den Kreismittel-

punkt gefunden. Er ist in Fig. 43 eingetragen. Der gegebene Vektor \mathfrak{Z}_2 ist also eine Tangente des gefundenen Kreises.

Der gesuchte Vektor \mathfrak{Z} entspricht nach Gl. (79) dem Werte 1 des Parameters p_2 . Er liegt somit irgendwo auf dem durch die Spitze des Vektors \mathfrak{Z}_{p_2} beschriebenen Kreise, der durch den Fuss- und den Endpunkt des gegebenen Vektors \mathfrak{Z}_1 geht und für den der ebenfalls gegebene Vektor \mathfrak{Z}_2 eine Tangente ist. Dieser Kreis ist somit ein erster geometrischer Ort für die Spitze des gesuchten Vektors \mathfrak{Z} .

Rechnet man analog wie vorher nicht mit dem Operator \dot{Z}_1 , sondern mit einem veränderlichen Vielfachen davon, also mit $p_1 \dot{Z}_1$, so findet man wegen des symmetrischen Aufbaues der Gl. (80) hinsichtlich der Operatoren \dot{Z}_1 und \dot{Z}_2 offenbar dasselbe Resultat wie vorher, es sind darin lediglich die Indices 1 und 2 miteinander zu vertauschen. Man bekommt so für den gesuchten Vektor \mathfrak{Z} einen zweiten geometrischen Ort in Gestalt eines durch die Spitze des Vektors \mathfrak{Z}_{p_1} beschriebenen Kreises, der durch den Fuss- und den Endpunkt des gegebenen Vektors \mathfrak{Z}_2 geht und für den der ebenfalls gegebene Vektor \mathfrak{Z}_1 eine Tangente ist. Fig. 44 veranschaulicht die Zusammenhänge.

Damit sind für die Spitze des gesuchten Vektors \mathfrak{Z} zwei leicht konstruierbare geometrische Orte gefunden und die gestellte Aufgabe ist damit gelöst²⁷⁾.

33.

Vektorielle Behandlung von Dreh- und Wechselströmen.

Sollen beispielsweise im Vektordiagramm des Transformators der mit dem Magnetisierungsstrom in Phase liegende Nutzfluss und die dagegen zeitlich phasenverschobenen Streuflüsse dargestellt werden, so handelt es sich hierbei um magnetische Wechselströme, von denen nicht eine veränderliche räumliche Lage, sondern die Amplitude und die zeitliche Phasenverschiebung abgebildet werden sollen. Es kommt hiezu die im Abschnitt «Vektorielle Behandlung von Wechselstromgrössen» behandelte Methode zur Anwendung. Diese gilt ganz allgemein für zeitlich sinusförmig veränderliche Grössen, also auch für magnetische Flüsse, magnetische Spannungen und elektrische Durchflutungen.

Im Gegensatz dazu soll jetzt gezeigt werden, wie solche Flüsse zu behandeln sind, bei denen in Abhängigkeit von der Zeit die Intensität schwankt und die räumliche Lage der Achse sich verändert.

Oft haben magnetische Flüsse im Luftspalt einer elektrischen Maschine in Funktion des Umfanges sinusförmige Verteilung und weisen dabei gleiche Wellenlänge auf. Unter dieser Voraussetzung lassen sie sich mit Vorteil durch Vektoren abbilden. Dabei wird ihre Stärke durch den Betrag dieser Vektoren wiedergegeben und der Bogen zwischen ihren

²⁷⁾ Diese sowie die in Fussnote 26 erwähnten weiteren Konstruktionen versagen allerdings, wenn der zwischen den gegebenen Impedanzvektoren eingeschlossene Winkel gleich 0 oder gleich 180° ist.

Achsen durch den Winkel zwischen den Vektoren ausgedrückt. Der Wellenlänge entspricht der Winkel 2π . Der resultierende Fluss verschiedener solcher Teilflüsse lässt sich dann durch Addition ihrer Vektoren finden. Weisen die Teilflüsse in Funktion des Umfangs eine zusammengesetzte Kurvenform auf, so ist für jede Harmonische ein separates Vektordiagramm zu zeichnen.

Ist die Stärke der betrachteten Teilflüsse mit der Zeit sinusförmig veränderlich, so wird auch der resultierende Fluss nach Grösse und Lage (der Achse) eine Funktion der Zeit sein. Da durch die verschiedene Lage der Vektoren die räumlich verschiedene Lage der Flussachsen wiedergegeben wird, kann durch dieses Darstellungsmittel nicht noch die zeitliche Phasenverschiebung ausgedrückt werden. Die einfache graphische Darstellung durch Vektoren versagt hier, denn sie gibt ein Bild, das nur in einem bestimmten Zeitpunkt richtig ist. Den vollständigen Verlauf der Erscheinungen kann sie nur durch eine ganze Reihe von solchen Momentbildern wiedergeben.

Hier erweist sich nun die ebene Vektorrechnung als sehr brauchbares Hilfsmittel. Sie kann eine unendliche Reihe von Momentbildern in einer einzigen Gleichung ausdrücken. Nach Galileo Ferraris²⁸⁾ zerlegt sie einen zeitlich sinusförmig veränderlichen Vektor $\bar{\Phi}_t$ ²⁹⁾ in zwei gleichschnell, aber entgegengesetzt drehende Vektoren $\bar{\Phi}_{Rt}$ und $\bar{\Phi}_{Lt}$, deren Betrag halb so gross ist wie die Amplitude $\bar{\Phi}$ des ursprünglichen Vektors $\bar{\Phi}_t$. Für diese rechts- und linksherum rotierenden Vektoren $\bar{\Phi}_{Rt}$ und $\bar{\Phi}_{Lt}$, deren Spitzen Kreise mit dem Fusspunkt als Zentrum beschreiben, erhält man nach Gl. (52) die Ausdrücke:

$$\bar{\Phi}_{Rt} = e^{-j(\omega t + \varphi)} \frac{\bar{\Phi}}{2} \tag{81a}$$

$$\bar{\Phi}_{Lt} = e^{j(\omega t + \varphi)} \frac{\bar{\Phi}}{2} \tag{81b}$$

Der ursprüngliche Vektor $\bar{\Phi}_t$ ist die Summe der beiden Vektoren $\bar{\Phi}_{Rt}$ und $\bar{\Phi}_{Lt}$

$$\bar{\Phi}_t = e^{-j(\omega t + \varphi)} \frac{\bar{\Phi}}{2} + e^{j(\omega t + \varphi)} \frac{\bar{\Phi}}{2} \tag{82}$$

Fig. 45 ist ein Momentbild, das den in dieser Gleichung ausgedrückten Zusammenhang für einen bestimmten Zeitpunkt graphisch darstellt.

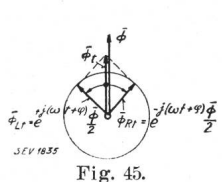


Fig. 45.

Damit die Addition rechnerisch ausgeführt werden kann, sind die in Gl. (81a) und (81b) enthaltenen Versoren nach Gl. (24) umzuschreiben. So erhält man:

²⁸⁾ Siehe hiezu: L. A. Finzi, Ueber Dreh- und Wechselfelder, Archiv für Elektrotechnik, Band XXII (1929), S. 573, ferner: Gerhard Hauffe, Komplexe Behandlung von Wechsel- und Drehfeldern, E. u. M., 1927, S. 101.

²⁹⁾ Da für den griechischen Buchstaben Φ kein deutscher (Fraktur-) Buchstabe besteht, wird der Vektor nach Satz 10: «Vektorzeichen» des AEF¹⁶⁾ durch Ueberstreichen gekennzeichnet.

$$\bar{\Phi}_{Rt} = (\cos(\omega t + \varphi) - j \sin(\omega t + \varphi)) \frac{\bar{\Phi}}{2}$$

$$\bar{\Phi}_{Lt} = (\cos(\omega t + \varphi) + j \sin(\omega t + \varphi)) \frac{\bar{\Phi}}{2}$$

Bei Bildung der Summe heben sich die den rechtwinkligen Versor j enthaltenden Glieder gegenseitig auf. Es wird:

$$\bar{\Phi}_t = \cos(\omega t + \varphi) \bar{\Phi} \tag{83}$$

Sind mehrere zeitlich sinusförmig veränderliche Flüsse gegeben, deren Achsen miteinander Winkel einschliessen, so führt die Zerlegung zu ebenso vielen Paaren entgegengesetzt drehender Vektoren. Unter der Voraussetzung, dass die gegebenen Flüsse dieselbe Periodendauer haben, weisen die gleichsinnig rotierenden Vektoren dieselbe Drehgeschwindigkeit auf. Sie lassen sich deshalb zu einem resultierenden Vektor vereinigen. Man erhält so zwei entgegengesetzt gleichschnell rotierende Vektoren $\bar{\Phi}_{L\text{res}t}$ und $\bar{\Phi}_{R\text{res}t}$, die nicht gleichlang zu sein brauchen. Ihre Summe ist der endgültig resultierende Vektor. Dieser genügt zufolge seiner Entstehung der Gleichung:

$$\bar{\Phi}_{\text{res}t} = \bar{\Phi}_{L\text{res}t} + \bar{\Phi}_{R\text{res}t}$$

Bezieht man die nach links und rechts drehenden Vektoren $\bar{\Phi}_{L\text{res}t}$ und $\bar{\Phi}_{R\text{res}t}$ auf einen beliebigen Bezugsvektor \mathfrak{A} , so kann man schreiben:

$$\bar{\Phi}_{L\text{res}t} = \dot{r} e^{j(\omega t + \varphi)} \mathfrak{A}$$

$$\bar{\Phi}_{R\text{res}t} = \dot{q} e^{-j(\omega t + \varphi)} \mathfrak{A}$$

Damit erhält man für den resultierenden Vektor $\bar{\Phi}_{\text{res}t}$ die Gleichung:

$$\bar{\Phi}_{\text{res}t} = (\dot{r} e^{j(\omega t + \varphi)} + \dot{q} e^{-j(\omega t + \varphi)}) \mathfrak{A} \tag{84}$$

Der Vergleich mit Gl. (67) zeigt, dass die gefundene Gl. (84) eine Ellipsengleichung darstellt, bei der der Mittelpunktoperator \dot{m} gleich Null ist. Der resultierende Flussvektor $\bar{\Phi}_{\text{res}t}$ beschreibt also eine Ellipse, deren Mittelpunkt in den Vektorfusspunkt fällt. Sind die beiden rotierenden Vektoren $\bar{\Phi}_{L\text{res}t}$ und $\bar{\Phi}_{R\text{res}t}$ gleichlang, so haben die beiden Operatoren \dot{r} und \dot{q} gleiche Beträge. Der resultierende Flussvektor $\bar{\Phi}_{\text{res}t}$ degeneriert dann zu einem pulsierenden Vektor, es entsteht ein Wechselfeld. Wird dagegen der eine der beiden drehenden Vektoren zu Null, so degeneriert der resultierende Flussvektor $\bar{\Phi}_{\text{res}t}$ zu einem kreisenden Vektor, es entsteht ein Drehfeld.

Beispiel:

Es soll gezeigt werden, dass drei durch die symmetrischen Zeitvektoren $\mathfrak{S}_1, \mathfrak{S}_2$ und \mathfrak{S}_3 dargestellte sinusförmige Wechselströme, die in der Statorwicklung einer Dreiphasenmaschine fliessen, ein Drehfeld hervorrufen können.

Die Wicklungen seien so angeordnet, dass die die Induktionsverteilung im Luftspalt darstellenden

Kurven mit genügender Annäherung als Sinuslinien betrachtet werden können. Ueberdies sei die Magnetisierungskurve der Maschine als geradlinig vorausgesetzt, so dass der resultierende Fluss durch Ueberlagerung der Flüsse der einzelnen Spulengruppen der Wicklungen gefunden werden kann.

Unter diesen Voraussetzungen rufen dann die drei Ströme drei längs des Luftspaltes sinusförmig verteilte, zeitlich mit den Strömen pulsierende Wechselflüsse hervor, deren Achsen durch die Spulengruppen-Mitten gehen. Die drei Flussachsen sind in Fig. 46 veranschaulicht.

Die drei Wechselflüsse sind durch Vektoren darstellbar. Da die Flussachsen um den dritten Teil der Wellenlänge der Flussverteilungskurve auseinanderliegen und da der Wellenlänge der Winkel 2π entspricht, müssen die drei Flussvektoren $\bar{\Phi}_{1t}$, $\bar{\Phi}_{2t}$ und $\bar{\Phi}_{3t}$ untereinander die Winkel $\frac{2\pi}{3}$ einschliessen. Die drei (nicht gleichzeitig auftretenden) Maximalwerte $\bar{\Phi}_1$, $\bar{\Phi}_2$ und $\bar{\Phi}_3$ der pulsierenden Vektoren sind in Fig. 47 dargestellt.

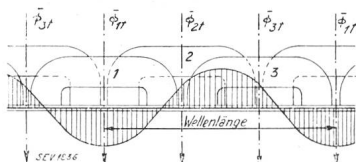


Fig. 46.

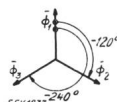


Fig. 47.

Die Momentanwerte der Flussvektoren, die sich im Takte und mit der Phasenverschiebung der erregenden Ströme verändern, genügen den Gleichungen:

$$\begin{aligned} \bar{\Phi}_{1t} &= \cos \omega t \bar{\Phi}_1 \\ \bar{\Phi}_{2t} &= \cos (\omega t - 120^\circ) \bar{\Phi}_2 \\ \bar{\Phi}_{3t} &= \cos (\omega t - 240^\circ) \bar{\Phi}_3. \end{aligned}$$

Ersetzt man hierin die Maximalvektoren $\bar{\Phi}_2$, und $\bar{\Phi}_3$ unter Verwendung von Versoren durch den Maximalvektor $\bar{\Phi}_1$, so findet man für die Momentanvektoren die Gleichungen:

$$\begin{aligned} \bar{\Phi}_{1t} &= \cos \omega t \bar{\Phi}_1 \\ \bar{\Phi}_{2t} &= \cos (\omega t - 120^\circ) e^{-j 120^\circ} \bar{\Phi}_1 \\ \bar{\Phi}_{3t} &= \cos (\omega t - 240^\circ) e^{-j 240^\circ} \bar{\Phi}_1. \end{aligned}$$

Zerlegt man diese drei pulsierenden Vektoren in ihre nach links und rechts rotierenden Ferraris-Komponenten, so erhält man die sechs Gleichungen:

$$\begin{aligned} \bar{\Phi}_{L1t} &= e^{j \omega t} \frac{\bar{\Phi}_1}{2} \\ \bar{\Phi}_{R1t} &= e^{-j \omega t} \frac{\bar{\Phi}_1}{2} \\ \bar{\Phi}_{L2t} &= e^{j (\omega t - 120^\circ)} e^{-j 120^\circ} \frac{\bar{\Phi}_1}{2} \\ \bar{\Phi}_{R2t} &= e^{-j (\omega t - 120^\circ)} e^{-j 120^\circ} \frac{\bar{\Phi}_1}{2} \\ \bar{\Phi}_{L3t} &= e^{j (\omega t - 240^\circ)} e^{-j 240^\circ} \frac{\bar{\Phi}_1}{2} \\ \bar{\Phi}_{R3t} &= e^{-j (\omega t - 240^\circ)} e^{-j 240^\circ} \frac{\bar{\Phi}_1}{2} \end{aligned}$$

Durch Addition findet man die resultierenden Ferraris-Komponenten. Die linksrotierende wird:

$$\bar{\Phi}_{L \text{ res } t} = (1 + e^{-j 240^\circ} + e^{-j 480^\circ}) e^{j \omega t} \frac{\bar{\Phi}_1}{2}.$$

Zerlegt man die in der Klammer stehenden e-Potenzen in ihre Sinus- und Cosinus-Glieder, so findet man:

$$(1 + e^{-j 240^\circ} + e^{-j 480^\circ}) = 1 + \cos (-240^\circ) + j \sin (-240^\circ) + \cos (-480^\circ) + j \sin (-480^\circ).$$

Durch Einsetzen der Zahlenwerte findet man, dass der Klammerausdruck zum Wert Null führt. Die Resultierende der linksrotierenden Ferraris-Komponenten wird damit ebenfalls Null. Berechnet man analog die Summe der rechtsrotierenden Ferraris-Komponenten, so ergibt sich die Resultierende zu:

$$\bar{\Phi}_{R \text{ res } t} = \frac{3}{2} e^{j \omega t} \bar{\Phi}_1.$$

Man findet so als Resultat für den resultierenden Flussvektor einen gleichmässig rechtsherum kreisenden Vektor, der unveränderlich seine Grösse beibehält. Er ist um die Hälfte grösser als der Fluss einer einzelnen Spulengruppe und hat im Zeitmoment Null die Richtung des Teilflusses der ersten Spulengruppe.