Zeitschrift: Bulletin de l'Association suisse des électriciens

Herausgeber: Association suisse des électriciens

Band: 38 (1947)

Heft: 6

Artikel: Mathematische Statistik und Tarifwesen. I

Autor: Morel, C.

DOI: https://doi.org/10.5169/seals-1056730

ASSOCIATION SUISSE DES ÉLECTRICIENS

BULLETIN

RÉDACTION:
Secrétariat de l'Association Suisse des Electriciens
Zurich 8, Seefeldstrasse 301

ADMINISTRATION:
Zurich, Stauffacherquai 36 ♦ Téléphone 23 77 44
Chèques postaux VIII 8481

Reproduction interdite sans l'assentiment de la rédaction et sans indication des sources

38e Année — No 6 — Samedi, 22 Mars 1947

Mathematische Statistik und Tarifwesen I

Von *Ch. Morel*, Feldmeilen

519.24 : 621.317.8

In diesem Aufsatz werden die Grundbegriffe der mathematischen Statistik, Mittelwerte, Streuung, Abhängigkeit und Verteilung, erläutert und ihre Zusammenhänge an Hand eines numerischen Beispiels aus dem Tarifwesen anschaulich und allgemein verständlich dargestellt. Diese Studie ist vor allem für diejenigen Leute aus dem Betriebe bestimmt, die ihre Kenntnisse über dieses Gebiet vertiefen möchten, ohne allzu sehr auf die rein mathematische Seite des Problems einzutreten. Die Mannigfaltigkeit der Anwendungen der mathematischen Statistik ist jedoch so gross, dass noch manch anderer an diesen Ausführungen Interesse finden dürfte.

L'auteur explique tout d'abord les notions fondamentales de la statistique mathématique: moyennes, dispersion, régression, corrélation et répartition, et en fait ressortir les relations à l'aide d'un exemple numérique du domaine des traifs d'électricité. Cette étude est destinée en premier lieu aux praticiens de l'exploitation qui désirent approfondir leurs connaissances en cette matière, sans trop faire appel aux mathématiques supérieures. Les possibilités d'application pratique de la statistique mathématique sont toutefois si nombreuses dans tous les domaines, que cette étude réveillera certainement l'intérêt d'un cercle plus étendu de lecteurs.

Einleitung

Wohl kaum eines der die Elektrizitätswerke interessierenden Gebiete bedarf zu seiner gründlichen Erfassung so sehr der modernen statistischen Methoden wie dasjenige des Tarifwesens.

Unter einer Statistik stellt man sich heute landläufig ein Aneinanderreihen von Zahlenreihen vor, z. B. die regelmässige Aufzeichnung der Energieerzeugung, des Energieverbrauches, der Einnahmen, der Abonnentenzahl, der angeschlossenen Apparate usw., und die Veranschaulichung der Ergebnisse durch graphische Darstellungen. Von diesen einfachen Anfängen hat sich aber die moderne Statistik zu einem wohl abgerundeten, selbständigen Zweig der mathematischen Wissenschaften entwickelt, dessen Methoden lehren, aus Reihen von oft scheinbar zusammenhanglosen Erfahrungszahlen eine Gesetzmässigkeit herauszufinden, diese Gesetzmässigkeit zu formulieren und sie für die praktischen Bedürfnisse nutzbringend zu deuten.

Allein, die Statistik darf niemals Selbstzweck werden. Sie ist ein unentbehrliches Hilfsmittel und muss es bleiben. Wie dieses wertvolle Hilfsmittel praktisch gehandhabt werden kann, soll das Folgende an Hand von aus der Praxis herausgegriffenen Beispielen zeigen.

Untersucht man z. B. den jährlichen Energieverbrauch einer grossen Wohnkolonie, bestehend aus lauter gleichen Einfamilienhäusern, deren Bewohner alle in den gleichen sozialen Verhältnissen leben, was z. B. bei der Wohnsiedlung eines grossen Industrieunternehmens vorkommen kann, so stellt man fest, dass selbst unter diesen Voraussetzungen der Verbrauch der einzelnen Abnehmer starke Schwankungen aufweist, die durch verschiedene Faktoren, z. B. die Lebensgewohnheiten, die Personenzahl, die Art, die Zahl und die Verwendungshäufigkeit der vorhandenen Kleinapparate usw., bedingt sein mögen. Diese Schwankungen sind eine natürliche Erscheinung, die auch bei andern Verbrauchsgütern, z. B. beim Wasser oder beim Heizmaterial, auftritt. Allein mit dieser Vielfalt von verschiedenen Einzelwerten lässt sich nicht viel anfangen. Es bedarf hier repräsentativer Werte, die sich aus den Einzelwerten ableiten lassen und mit denen man in einfacher Weise operieren kann.

Um die Entwicklung des Energieverbrauches einer bestimmten Abnehmergruppe im Laufe der Jahre zu verfolgen, genügen meistens die über ein Jahr sich erstreckenden *Summen* der Einzelverbrauche. Sollen dagegen verschiedene Gruppen miteinander verglichen werden, so müssen in der Regel *Mittelwerte* gebildet werden. Charakteristisch für die Schwankungen der Einzelwerte innerhalb einer Gruppe sind die *Streuungsmasse.*

Jede Gruppe von Einzelwerten heisst eine *Statistik*. Oft besteht eine Abhängigkeit zwischen zwei Statistiken, so z. B. zwischen dem Energieverbrauch für Beleuchtung und der Wohnungsgrösse; in solchen Fällen sind die gegenseitigen Beziehungen durch die *Abhängigkeitsmasse* gekennzeichnet. Bei Abhängigkeit pflegt man die Einzelwerte der einen Statistik als *Variable* und die Einzelwerte der anderen Statistik, auf die sich die erste bezieht, als *Parameter* zu bezeichnen. Im erwähnten Beispiel ist der Energieverbrauch für Beleuchtung die Variable und die Wohnungsgrösse der Parameter.

Mittelwerte, Streuungsmasse und Abhängigkeitsmasse bilden zusammen die *statistischen Masszahlen.*

Da in der Regel mit *Stichproben* operiert wird, weil die statistische Bearbeitung von Grundgesamtheiten sehr umständlich und zeitraubend ist, müssen die aus diesen Stichproben gewonnenen statistischen Masszahlen auf ihre Stichhaltigkeit geprüft werden. Die hier anzuwendenden *Prüfverfahren* und vor allem ihre mathematische Begründung sind sehr kompliziert. Näher auf diese Verfahren einzugehen, würde nicht in den Rahmen dieser einfachen Studie hineinpassen. Für die Praxis genügt es vorläufig, zu wissen, dass der Umfang der Stichproben im Verhältnis zur Grundgesamtheit nicht zu klein sein darf. Statistische Berechnungen müssen im Minimum einige hundert Abnehmer umfassen, wenn sie einigermassen allgemein gültige Schlussfolgerungen zulassen sollen.

1. Summen und Mittelwerte

Bezeichnen wir den Jahresenergieverbrauch (z. B. für Beleuchtung) eines einzelnen Abnehmers mit v_i, so können wir für die Summe V der Einzelwerte v_i (Gesamtverbrauch) der zu untersuchenden, N Abnehmer umfassenden, Gruppe schreiben:

$$V = \sum_{i=1}^{N} v_i \text{ [1]} \tag{1}$$

Der einfachste und gebräuchlichste Mittelwert ist der *Durchschnitt* (oder das arithmetische Mittel). Er ergibt sich aus der Summe der Einzelwerte geteilt durch ihre Zahl

$$\bar{v} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N} v_i \tag{2}$$

In den Fällen, wo die Zahl N der Einzelwerte sehr gross ist, kann man die Rechnung mit sehr guter Annäherung vereinfachen. Man teilt die Einzelwerte in M Grössenklassen ein und ermittelt für jede Klasse die Häufigkeit n_j der Einzelwerte. Es ergibt sich dann

$$N = \sum_{j=1}^{M} n_j$$

Entspricht v_j der Klassenmitte, so wird

$$V = \sum_{j=1}^{M} v_j \, n_j \tag{1a}$$

und

$$\bar{v} = \frac{1}{N} \sum_{=1}^{M} v_j \, n_j \tag{3}$$

Beispiel:

Jahresenergieverbrauch für Beleuchtung und Kleinapparate in einer Stadt (Stichprobe, 225 Abnehmer umfassend)

Anzahl Abnehmer $N = 225$
Klassenbreite $w = 20$

Die tabellarische Zusammenstellung ergibt:

[1] Grundsätzlich werden hier die Summenwerte mit grossen, die Einzelwerte und Mittelwerte mit kleinen lateinischen Buchstaben geschrieben.

Tabelle I

Klassenbreite (20 kWh) kWh	Klassenmitte v_j kWh	Häufigkeit n_j	Verbrauch jeder Klasse (angenähert) $v_j\,n_j$ kWh
20 ... 39	30	6	180
40 ... 59	50	7	350
60 ... 79	70	4	280
80 ... 99	90	23	2070
100 ...119	110	14	1540
120 ...139	130	33	4290
140 ...159	150	25	3750
160 ...179	170	28	4760
180 ...199	190	31	5890
200 ...219	210	11	2310
220 ...239	230	16	3680
240 ...259	250	6	1500
260 ...279	270	7	1890
280 ...299	290	4	1160
300 ...312	310	2	620
320 ...339	330	2	660
340 ...359	350	3	1050
360 ...379	370	1	370
380 ...399	390	0	—
400 ...419	410	1	410
420 ...439	430	0	—
440 ...459	450	0	—
460 ...479	470	0	—
480 ...499	490	0	—
500 ...519	510	1	510
		$N = 225$	$V = \sum_{j=1}^{M} v\, n_j = 37270$

$$\bar{v} = \frac{1}{225} \cdot 37270 = \underline{165{,}64 \text{ kWh/Abnehmer}}$$

Es stellt sich nun die Frage, wie genau diese vereinfachte Durchschnittsbildung nach Formel (3) ist.

Um dies festzustellen, wurde dieses Zahlenbeispiel auch nach Formel (2) durchgerechnet. Es ergab sich dabei

$$V = \sum_{i=1}^{N} v_i = 37\,293 \text{ kWh}$$

und

$$\bar{v} = \frac{V}{N} = \frac{37\,293}{225} = 165{,}75 \text{ kWh/Abnehmer.}$$

Die Differenz der Summen beträgt 23 kWh oder 0,062 % des Sollwertes. Der angenäherte Durchschnitt nach Formel (3) ist somit für praktische Zwecke hinreichend genau.

Ist der Umfang der Statistik, bzw. der Stichprobe, gross, so kann ohne Einbusse der Genauigkeit die Klassenbreite noch vergrössert werden.

Sind die Daten jedes Abnehmers auf Karten eingetragen, so nimmt das Sortieren in Klassen, das Abzählen der Karten auf jedem Häuflein und das Ausrechnen nach Tabelle I wesentlich weniger Zeit in Anspruch, als das Zusammenzählen aller Einzelwerte, auch mit Hilfe einer Rechenmaschine.

Trägt man nun die Werte der Tabelle I graphisch auf (Fig. 1), den Verbrauch v als Abszisse und die Häufigkeit n als Ordinate, so erhält man ein Bild der *Verteilung* der Einzelwerte, bzw. ihrer Häufigkeit innerhalb der Statistik. Die sich ergebende Verteilungskurve ist als Treppenkurve gezeichnet, um zu dokumentieren, dass jede der eingetragenen Häufigkeiten jeweilen einer ganzen Klasse, nicht einem einzelnen Werte, zugeordnet ist. Vergleichshalber ist als stetige Kurve die für diese Statistik ausgerechnete Verteilung eingetragen, d. h. diejenige, die der *Gauß*schen Fehlerfunktion entspricht. Die normale Verteilung ist diejenige, die sich bei einer sehr

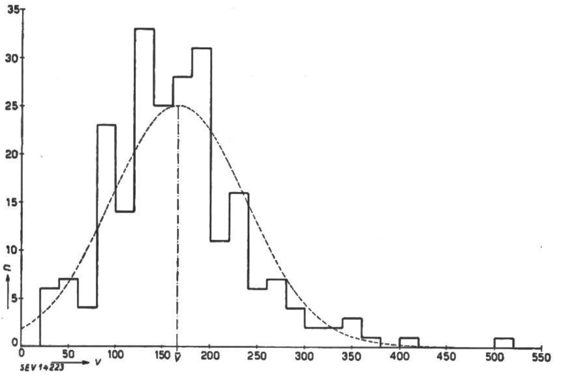

Fig. 1

grossen Zahl von rein zufälligen Einzelergebnissen einstellen würde. Wie die tatsächliche mit der normalen Verteilung verglichen werden kann, soll später gezeigt werden.

Man kann auch die Einzelwerte der Statistik der Grösse nach ordnen, den kleinsten zuvorderst, den grössten zuhinterst, oder umgekehrt. In der Mitte dieser Reihe wird es einen Wert geben, der gleich viele Einzelwerte vor, wie hinter sich hat. Dieser Mittelwert heisst mittelster Wert oder *Medianwert m.* In unserem Beispiel ist es der 113. in der Reihe, und sein Wert beträgt $m = 160$ kWh.

Man kann aber auch aus der Statistik denjenigen Wert herausgreifen, der die grösste Häufigkeit aufweist. Dieser Wert heisst *häufigster Wert.* Medianwert und häufigster Wert haben keine grosse praktische Bedeutung. In einer normalen Verteilung sind sie einander und dem Durchschnitt numerisch gleich.

2. Streuungsmasse

Im Abschnitt 1 wurde festgestellt, dass in einer Statistik (z. B. in einer Abnehmergruppe) die Einzelwerte (Energieverbrauchszahlen) nicht identisch sind, sondern mehr oder weniger von einem Mittelwert abweichen. Zur Erfassung dieser Abweichungen bedient man sich der *Streuungsmasse.*

Das einfachste Streuungsmass ist die *Variationsbreite,* d. i. der Unterschied zwischen dem grössten und dem kleinsten Einzelwert der Statistik. In unserem Beispiel beträgt der grösste Jahresenergieverbrauch 510 kWh und der kleinste 24 kWh. Die Variationsbreite beträgt demnach $510 - 24 = 486$ kWh oder, auf den Durchschnitt bezogen:

$$\frac{486}{165{,}75} = 3{,}54$$

d. h. sie ist rund dreieinhalbmal so gross wie der Durchschnitt. Die Variationsbreite ist aber grossen Zufälligkeiten unterworfen. Zuverlässiger als diese ist die *durchschnittliche Abweichung d.* Diese ist gleich dem arithmetischen Mittel aus den absoluten Werten der Differenzen zwischen den Einzelwerten und einem der Mittelwerte, in der Regel dem Durchschnitt. Ihre Formel lautet

$$d = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N} |v_i - \bar{v}| \tag{4}$$

Für die volle Charakterisierung der Abweichungen ist jedoch der *mittleren quadratischen Abweichung s* der Vorzug zu geben. Sie bietet den Vorteil, dass infolge der Quadrierung der Einzelabweichungen alle zu summierenden Werte positiv werden, die Vorzeichenfrage also wegfällt. Ferner spielt sie bei den Abhängigkeitsmassen, bei der normalen Verteilung und bei den Prüfverfahren eine so hervorragende Rolle, dass sich ihre Berechnung, wenn auch etwas kompliziert, immer lohnt. Die Formel schreibt sich

$$s = \sqrt{\frac{1}{N-1} \sum_{i=1}^{N} (v_i - \bar{v})^2} \tag{5}$$

Es ist hier nicht möglich, auf den Grund einzugehen, warum der Radikand durch $(N - 1)$ statt durch N geteilt werden muss. Es genügt, darauf hinzuweisen, dass dies der neueren Praxis entspricht.

Viel häufiger wird der Quadratwert von s, also s^2, verwendet, der kurzweg *Streuung* genannt wird.

$$s^2 = \frac{1}{N-1} \sum_{i=1}^{N} (v_i - \bar{v})^2 \tag{6}$$

Um das Ausrechnen zu erleichtern, kann man diese Formel in eine praktische Form überführen. Man rechnet den quadratischen Ausdruck aus

$$(v_i - \bar{v})^2 = v_i^2 - 2\, v_i \bar{v} + \bar{v}^2$$

und setzt die Entwicklung in Formel (6) ein.

$$s^2 = \frac{1}{N-1} \left(\sum_{i=1}^{N} v_i^2 - 2\,\bar{v} \sum_{i=1}^{N} v_i + N\bar{v}^2\right)$$

Nach Formel (2) ist aber

$$\bar{v} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N} v_i$$

somit

$$N\bar{v}^2 = N\bar{v}\, \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N} v_i = \bar{v} \sum_{i=1}^{N} v_i$$

und

$$s^2 = \frac{1}{N-1} \left(\sum_{i=1}^{N} v_i^2 - \bar{v} \sum_{i=1}^{N} v_i\right) \tag{7}$$

Wie beim Durchschnitt kann man hier die Rechnung wesentlich vereinfachen, indem man die Einzelwerte in M Klassen mit Klassenmitte v_j einreiht und für jede Klasse die Häufigkeit n_j ermittelt. Die Formel für die Streuung lautet alsdann

$$s^2 = \frac{1}{N-1} \sum_{j=1}^{M} n_j\, (v_j - \bar{v})^2 \tag{8}$$

In Anlehnung an die Ableitung von Formel (7) aus Formel (6) findet man leicht

$$s^2 = \frac{1}{N-1} \left(\sum_{j=1}^{M} n_j\, v_j^2 - \bar{v} \sum_{j=1}^{M} n_j\, v_j\right) \tag{9}$$

Für das gewählte praktische Beispiel ist die Ausrechnung in Tabelle II dargestellt.

Tabelle II

Klassenmitte v_j	Quadrat der Klassenmitte v_j^2	Häufigkeit n_j	Verbrauch jeder Klasse $n_j\,v_j$	Quadratverbrauch jeder Klasse $n_j\,v_j^2$
30	900	6	180	5 400
50	2 500	7	350	17 500
70	4 900	4	280	19 600
90	8 100	23	2 070	186 300
110	12 100	14	1 540	169 400
130	16 900	33	4 290	557 700
150	22 500	25	3 750	562 500
170	28 900	28	4 760	809 200
190	36 100	31	5 890	1 119 100
210	44 100	11	2 310	485 100
230	52 900	16	3 680	846 400
250	62 500	6	1 500	375 000
270	72 900	7	1 890	510 300
290	84 100	4	1 160	336 400
310	46 100	2	620	192 200
330	108 900	2	660	217 800
350	122 500	3	1 050	367 500
370	136 900	1	370	136 900
390	152 100	0	—	—
410	168 100	1	410	168 100
430	184 900	0	—	—
450	202 500	0	—	—
470	220 900	0	—	—
490	240 100	0	—	—
510	260 100	1	510	260 100
		N = 225	$\sum_{j=1}^{M} n_j\,v_j = 37270$	$\sum_{j=1}^{M} n_j\,v_j^2 = 7342500$

$$s^2 = \frac{1}{224}(7\,342\,500 - 6\,173\,403) = \frac{1\,169\,097}{224} = \underline{5\,219}$$

$$s = 5219 = \underline{72{,}2}$$

Zur Kontrolle wurde auch die Ausrechnung nach Formel (7) durchgeführt. Sie ergibt:

$$\sum_{i=1}^{N} v_i^2 = 7\,346\,243$$

$$\bar{v}\sum_{i=1}^{N} v_i = 165{,}75 \cdot 37\,293 = 6\,181\,315$$

$$s^2 = \frac{1}{224}(7\,346\,243 - 6\,181\,315) = 5201$$

$$s = \sqrt{5201} = \underline{72}$$

Für die Streuung nach Formel (9) beträgt der Fehler gegenüber Formel (7) 5219 — 5201 = 18 oder 0,346 % des Sollwertes, und für die mittlere quadratische Abweichung 72,2 — 72 = 0,2 oder 0,28 % des Sollwertes. Bezogen auf den Durchschnitt beträgt die mittlere quadratische Abweichung $\frac{72}{165{,}75} = 0{,}435\ \bar{v}$.

Je kleiner der Wert s ist, um so kleiner ist die Streuung, d. h. um so enger scharen sich die Einzelwerte um den Durchschnitt $\bar{v}$. Im Idealfalle der Streuung null würden alle Einzelwerte einander und dem Durchschnitt gleich sein, also mit diesem zusammenfallen.

3. Abhängigkeiten

Sehr oft kommt man in der Praxis dazu, sich zu fragen, ob zwischen zwei statistisch erfassbaren Grössen eine Abhängigkeit besteht. Ein Problem, das sich im Tarifwesen stellt, ist z. B., zu wissen, ob der Energieverbrauch der Haushaltungen für Beleuchtung und Kleinapparate zu irgendeiner für jeden Abonnenten charakteristischen Grösse in Beziehung steht, z. B. zu der durch die Zahl oder die Bodenfläche der Haupträume dargestellten Wohnungsgrösse.

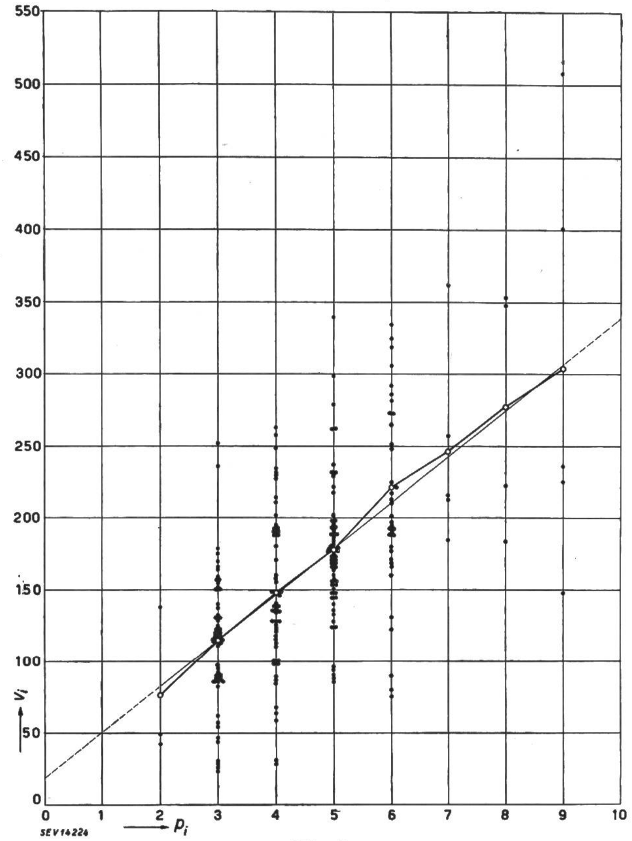

Fig. 2

Trägt man für die Abnehmergruppe des gewählten praktischen Beispiels den Energieverbrauch für Beleuchtung in Funktion der Anzahl Haupträume graphisch auf, so ergeben sich die in Fig. 2 dargestellten Punktschwärme, die zunächst keine strenge Gesetzmässigkeit erkennen lassen, ausser dass mit zunehmender Raumzahl die Schwerpunkte der Schwärme sich nach oben verschieben.

Um Ordnung in die Sache zu bringen, bildet man für jede Gruppe der die gleiche Raumzahl aufweisenden Abnehmer den Durchschnitt der zugehörigen einzelnen Verbrauchswerte, trägt die entsprechenden Punkte in Fig. 2 ein und verbindet sie miteinander durch gerade Striche. Der entstehende gebrochene Linienzug stört, denn er lässt noch keine strenge lineare Abhängigkeit erkennen. Immerhin verdeutlicht er schon die Tendenz des Energieverbrauches, mit der Raumzahl zuzunehmen. Um eine eindeutige und einfache Abhängigkeit zwischen dem Energieverbrauch v und der als Parameter dienenden Zahl p der Haupträume (Schlafräume, Wohnräume, Küche, Badzimmer) zu finden, sucht man nun in erster Annäherung nach der linearen Funktion (Geraden), die sich dem Punkteschwarm, bzw. dem gebrochenen Linienzug am besten anpasst. Genügt diese Gerade, so spricht man von *linearer Regression* (Abhängigkeit) zwischen den beiden erfassten Statistiken; genügt sie nicht, was nur durch ein kompliziertes Prüfverfahren festgestellt werden kann, muss irgend eine stetige Kurve gesucht werden — *nicht lineare Regression.* Erfahrungsgemäss genügt in den meisten Fällen die lineare Regression, so dass sie allein hier berücksichtigt sei.

Die Gleichung der *Regressionsgeraden* lautet:

$$v' = a + b\,(p - \overline{p}) \tag{10}$$

Nun bestimmt man die Konstanten a und b so, dass die die Einzelwerte darstellenden Punkte (Fig. 3) möglichst wenig um die Regressionsgerade herum streuen.

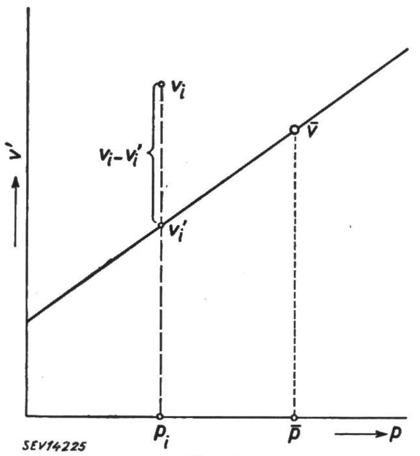

Fig. 3

Der Punkt mit den Koordinaten $\overline{p}$ und $\overline{v}$ ist der Schwerpunkt des Schwarmes; die Gerade muss folglich durch diesen Punkt gehen. Infolgedessen wird

$$a = \overline{v}$$

und die Gleichung (7)

$$v' = \overline{v} + b\,(p - \overline{p}) \tag{11}$$

Die Streuung ist am kleinsten, wenn die Summe der quadratischen Abweichungen von der Geraden ein Minimum ist.

Die Summe der quadratischen Abweichungen schreibt sich

$$\sum_{i=1}^{N} (v_i - v_i')^2$$

Nach Gleichung (11) ist aber

$$v_i' = \overline{v} + b\,(p_i - \overline{p})$$

So wird

$$\sum_{i=1}^{N} (v_i - v_i')^2 = \sum_{i=1}^{N} [(v_i - \overline{v}) - b\,(p_i - \overline{p})]^2$$

$$= \sum_{i=1}^{N} (v_i - \overline{v})^2 - 2b \sum_{i=1}^{N} (v_i - \overline{v})\,(p_i - \overline{p}) + b^2 \sum_{i=1}^{N} (p_i - \overline{p})^2$$

Um den Wert von b zu ermitteln, für welchen die Summe ein Minimum wird, setzt man ihre erste Ableitung nach b gleich Null.

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}b}\,[\sum_{i=1}^{N} (v_i - \overline{v})^2] = 0$$

oder

$$-2 \sum_{i=1}^{N} (v_i - \overline{v})\,(p_i - \overline{p}) + 2b \sum_{i=1}^{N} (p_i - \overline{p})^2 = 0$$

so dass

$$b = \frac{\sum_{i=1}^{N} (p_i - \overline{p})\,(v_i - \overline{v})}{\sum_{i=1}^{N} (p_i - \overline{p})^2} \tag{12}$$

In Anlehnung an die Transformation von Formel (6) in Formel (7) kann man für die Formel (12) schreiben

$$b = \frac{\sum_{i=1}^{N} p_i v_i - \overline{p} \sum_{i=1}^{N} v_i}{\sum_{i=1}^{N} p_i^2 - \overline{p} \sum_{i=1}^{N} p_i} = \frac{\sum_{i=1}^{N} p_i v_i - \overline{v} \sum_{i=1}^{N} p_i}{\sum_{i=1}^{N} p_i^2 - \overline{p} \sum_{i=1}^{N} p_i} \tag{13}$$

Der Richtungskoeffizient oder das Steigungsmass b der durch Gleichung (11) charakterisierten Geraden heisst *Regressionskoeffizient.*

Der Regressionskoeffizient gibt an, um wieviel v' im Mittel zunimmt, wenn p um eine Einheit wächst.

Wenn man die Formel (12) mit $\frac{1}{N-1}$ erweitert, so erhält man

$$b = \frac{\frac{1}{N-1} \sum_{i=1}^{N} (p_i - \overline{p})\,(v_i - \overline{v})}{\frac{1}{N-1} \sum_{i=1}^{N} (p_i - \overline{p})^2} \tag{12a}$$

Der Nenner ist nichts anderes als die Streuung s_p^2 der Parameterwerte. In Analogie bezeichnet man den Zähler mit s_{pv}, so dass

$$s_{pv} = \frac{1}{N-1} \sum_{i=1}^{N} (p_i - \overline{p})\,(v_i - \overline{v}) \tag{14}$$

Man kann aber auch schreiben

$$s_{pv} = \frac{1}{N-1} \sum_{i=1}^{N} p_i\,(v_i - \overline{v}) = \frac{1}{N-1} \sum_{i=1}^{N} v_i\,(p_i - \overline{p}) \tag{14a}$$

oder noch

$$s_{pv} = \frac{1}{N-1} (\sum_{i=1}^{N} p_i v_i - \overline{v} \sum_{i=1}^{N} p_i)$$

$$= \frac{1}{N-1} (\sum_{i=1}^{N} p_i v_i - \overline{p} \sum_{i=1}^{N} v_i) \tag{14b}$$

Für den Regressionskoeffizienten b ergibt sich die einfache Formel

$$b = \frac{s_{pv}}{s_p^2} \tag{15}$$

Hätten wir die Variabeln vertauscht, d. h. die Variationen des Parameters p in Funktion der Variabeln v untersucht, so hätten wir für die Regressionsgerade folgende Gleichung erhalten:

$$p' = \bar{p} + b_p\,(v - \bar{v})$$

und für b_p in der erweiterten Form von (12a)

$$b_p = \frac{\frac{1}{N-1}\sum_{i=1}^{N}(p_i - \bar{p})\,(v_i - \bar{v})}{\frac{1}{N-1}\sum_{i=1}^{N}(v_i - \bar{v})^2}$$

oder, in der vereinfachten Schreibweise von (15),

$$b_p = \frac{s_{pv}}{s_v^2} \tag{16}$$

Mit dem Index p soll hier präzisiert werden, dass die Rollen vertauscht wurden, so dass p zur Variabeln wurde. Dementsprechend müsste man für den Normalfall b_v schreiben. Wenn keine Verwechslung möglich ist, lässt man jedoch den Index v weg.

Nachdem die Gleichung der Regressionsgeraden feststeht, interessiert es, zu wissen, wie stark die Einzelwerte von dieser Geraden streuen, d. h. in welchem Masse diese Gerade im Verhältnis zum Punkteschwarm bestimmt ist. Als *Bestimmtheitsmass* definiert man das Verhältnis der Streuung $s_{v'}^2$ der einzelnen Punkte v'_i der Regressionsgeraden zur Gesamtstreuung s_v^2 der einzelnen Verbrauchswerte v_i. Dieses Verhältnis gibt an, welchen Anteil die Veränderung des Parameters p (Raumzahl) an der Veränderung der Variabeln v (Energieverbrauch) hat.

Nach Formel (6) schreibt sich die Streuung der Punkte der Regressionsgeraden

$$s_{v'}^2 = \frac{1}{N-1}\sum_{i=1}^{N}(v_i' - \bar{v})^2$$

und diejenige der Einzelwerte

$$s_v^2 = \frac{1}{N-1}\sum_{i=1}^{N}(v_i - \bar{v})^2$$

So wird das Bestimmtheitsmass

$$B = \frac{s_{v'}^2}{s_v^2} = \frac{\frac{1}{N-1}\sum_{i=1}^{N}(v_i' - \bar{v})^2}{\frac{1}{N-1}\sum_{i=1}^{N}(v_i - \bar{v})^2} \tag{17}$$

Nach Gleichung (11) ist aber

$$v_i' - \bar{v} = b\,(p_i - \bar{p})$$

so dass sich für B ergibt:

$$B = b^2\,\frac{\frac{1}{N-1}\sum_{i=1}^{N}(p_i - \bar{p})^2}{\frac{1}{N-1}\sum_{i=1}^{N}(v_i - \bar{v})^2} = b^2\,\frac{s_p^2}{s_v^2} \tag{17a}$$

Setzt man hier den Wert von b aus Formel (12) ein, erhält man

$$B = \frac{\left[\frac{1}{N-1}\sum_{i=1}^{N}(p_i - \bar{p})\,(v_i - \bar{v})\right]^2}{\frac{1}{N-1}\sum_{i=1}^{N}(p_i - \bar{p})^2\cdot\frac{1}{N-1}\sum_{i=1}^{N}(v_i - \bar{v})^2} \tag{18}$$

oder nach Vereinfachung in Anlehnung an den Uebergang von Formel (6) auf Formel (7)

$$B = \frac{[\sum_{i=1}^{N} p_i v_i - \bar{p}\sum_{i=1}^{N} v_i]^2}{(\sum_{i=1}^{N} p_i^2 - \bar{p}\sum_{i=1}^{N} p_i)(\sum_{i=1}^{N} v_i^2 - \bar{v}\sum_{i=1}^{N} v_i)} \tag{19}$$

In Formel (18) ist der Nenner gleich dem Produkt der Streuungen von p und v und der Zähler gleich dem Quadrat von s_{pv} [Formel (14)]

$$B = \frac{s_{pv}^2}{s_p^2\,s_v^2} \tag{20}$$

Nach den Formeln (15) und (16) kann man auch schreiben

$$B = b_v\;b_p \tag{21}$$

Das Bestimmtheitsmass B ist also gleich dem Produkte aus den beiden Regressionskoeffizienten b_v und b_p.

Wenn alle Einzelwerte v_i des Punkteschwarmes auf der Regressionsgeraden liegen, so wird ihre Streuung s_v^2 gleich der Streuung $s_{v'}^2$ der Punkte v_i' der Regressionslinie. Man hat dann

$$s_v^2 = s_{v'}^2$$

und

$$B = \frac{s_{v'}^2}{s_v^2} = 1$$

Ist also die Linearität zwischen v und p streng, so wird das Bestimmtheitsmass gleich 1.

Sind dagegen alle Werte von v untereinander gleich, also auch gleich ihrem Durchschnitt $\bar{v}$, so besteht keine Abhängigkeit zwischen v und p. Die Einzelwerte liegen alle auf einer Geraden, die parallel zur p-Axe im Abstand $\bar{v}$ von dieser verläuft, und deren Richtungskoeffizient b gleich 0 ist. Aus Formel (17a) sieht man, dass in diesem Falle auch B gleich 0 ist.

Das Bestimmtheitsmass kann also nur zwischen 0 und 1 variieren. Ist es gleich 0, so besteht keine Abhängigkeit; ist es gleich 1, so ist die Abhängigkeit streng linear.

Bekannter als das Bestimmtheitsmass, obwohl nicht so praktisch deutbar, ist der *Korrelationskoeffizient* r, dessen Beziehung zu B durch die einfache Formel

$$r = \sqrt{B} \tag{22}$$

gegeben ist. Nach Formel (20) kann man schreiben

$$r = \frac{s_{pv}}{s_p\;s_v} \tag{22a}$$

oder nach Formel (17)

$$r = \frac{s_{v'}}{s_v} \tag{22b}$$

Demnach ist der Korrelationskoeffizient r gleich dem Verhältnis der mittleren quadratischen Abweichung $s_{v'}$ der Punkte der Regressionsgeraden zur mittleren quadratischen Abweichung s_v der Einzelwerte.

Für das gewählte praktische Beispiel lässt sich nun die Berechnung der Abhängigkeitsmasse vornehmen.

Die Streuung s_v^2 der Variabeln v (Energieverbrauch) und deren mittlerer quadratischen Abweichung s_v sind bereits berechnet worden:

$$s_v^2 = 5201 \; ; \qquad s_v = 72$$

Es müssen also noch die Ausdrücke s_p^2, s_p und s_{pv} ausgerechnet werden, um alsdann b, B und r ermitteln zu können.

Für s_p^2 wendet man Formel (9) an, da die Werte von p sich leicht in Klassen mit der Mitte p_j einteilen lassen.

$$s_p^2 = \frac{1}{N-1} \left(\sum_{i=1}^{M} n_j p_j^2 - \bar{p} \sum_{i=1}^{M} n_j p_j \right)$$

Für s_{pv} geht man von der Formel (14b) aus, die in diesem Falle lautet:

$$s_{pv} = \frac{1}{N-1} \left(\sum_{i=1}^{N} p_i v - \bar{p} \sum_{i=1}^{N} v_i \right)$$

Ist n_j die Häufigkeit der Klasse mit Mitte p_j, so rechnet sich der erste Ausdruck in der Klammer zu

$$\sum_{i=1}^{N} p_i v_i = \sum_{j=1}^{M} \sum_{n_j=1}^{n_j} p_j v_j = \sum_{j=1}^{M} p_j \sum_{n_j=1}^{n_j} v_i$$

Die Verbrauchssummen pro Klasse können dabei nach Formel (1) oder (1a) ermittelt werden.

In Tabelle III sind die für die Berechnung nötigen Angaben zusammengestellt.

Tabelle III

Klassenmitte p_j	Häufigkeit n_j	$n_j p_j$	p_j^2	$n_j p_j^2$	$\sum_{n_j=1}^{n_j} v_i$	$p_j \sum_{n_j=1}^{n_j} v_i$
2	3	6	4	12	230	460
3	53	159	9	477	6 097	18 291
4	56	224	16	896	8 290	33 160
5	63	315	25	1 575	11 200	56 000
6	36	216	36	1 296	7 615	45 690
7	5	35	49	245	1 233	8 631
8	4	32	64	256	1 108	8 864
9	5	45	81	405	1 520	13 680
	N=225	$\sum_{j=1}^{M} n_j p_j$ = 1032		$\sum_{j=1}^{M} n_j p_j^2$ = 5162	$\sum_{i=1}^{N} v_i$ =37 293	$\sum_{i=1}^{N} p_i v_i$ =184 776

$$\bar{p} = \frac{1032}{225} = \underline{4{,}587}$$

$$s_p^2 = \frac{1}{224} (5162 - 1032 \cdot 4{,}587) = \underline{1{,}911}$$

$$s_p = \sqrt{1{,}911} = \underline{1{,}38}$$

$$s_{pv} = \frac{1}{224} (184\,776 - 37\,293 \cdot 4{,}587) = \underline{61{,}22}$$

$$b_v = \frac{61{,}22}{1{,}911} = \underline{32{,}04}; \qquad b_p = \frac{61{,}22}{5201} = \underline{0{,}01177}$$

$$B = \frac{61{,}22^2}{1{,}911 \cdot 5201} = 32{,}04 \cdot 0{,}01177 = \underline{0{,}377}$$

$$r = \sqrt{0{,}377} = \underline{0{,}613}$$

Nun kann man die Gleichung der Regressionsgeraden aufstellen. Sie lautet in aufgerundeten Zahlen

$$v' = 165{,}8 + 32 \, (p - 4{,}6)$$

oder

$$\underline{v' = 32\, p + 18{,}6}$$

Sie besagt, dass jeder Abnehmer im Mittel einen vom Parameter unabhängigen Grundverbrauch von 18,6 kWh aufweist, wozu im Mittel noch 32 kWh pro Hauptraum seiner Wohnung hinzugezählt werden müssen. In Fig. 2 ist die Regressionsgerade fein eingezeichnet.

Mit welcher Bestimmtheit diese Gesetzmässigkeit gilt, sagt das Bestimmtheitsmass B aus. Dieses beträgt 0,377, was soviel heisst, dass die Variation des Energieverbrauches sich zu 37,7 % durch die Variation der Zahl der Haupträume erklären lässt. Für die restlichen 62,3 % sind andere Faktoren verantwortlich, deren Untersuchung aber aus dem Rahmen der vorliegenden Studie fällt.

Die hier abgeleiteten Werte und Gesetze gelten nur für das untersuchte Intervall $p = 2$ bis $p = 9$ und $v = 24$ bis $v = 510$. Sie dürfen nicht auf kleinere oder grössere Werte von p oder v extrapoliert werden.

4. Verteilungen

Im Abschnitt 1 wurde bereits angedeutet, dass auch die Verteilung der Einzelwerte innerhalb einer Statistik gewissen Gesetzen folgt, und dass die normale Verteilung auf der *Gaußschen* Fehlerfunktion aufgebaut ist.

Die Grundform dieser Funktion lautet

$$f = \frac{1}{s \sqrt{2\,\pi}} \, e^{-\frac{(v-\bar{v})^2}{2\,s^2}}$$

Sie gibt, bei einer bestimmten Streuung s^2, für jeden Wert der streuenden Variablen v die normal zu erwartende Häufigkeit f an. Für den Wert $v = \bar{v}$ ist die Exponentialfunktion am grössten, was einem Scheitelpunkt entspricht. Ferner ist die Funktion symmetrisch in bezug auf den Wert $\bar{v}$, da der Exponent quadratisch ist. Diese Formel abzuleiten, würde hier zu weit führen. Die Ableitung findet sich in jedem Mathematiklehrbuch.

Mit Hilfe der Formel (23) lässt sich für jede Statistik die ihrer Streuung entsprechende normale Verteilung ausrechnen und graphisch darstellen. Auf diese Art wurde die stetige Kurve von Fig. 1 ermittelt.

Nun ist eine solche Berechnung lang und kompliziert. Zudem stehen nicht immer die nötigen Hilfstafeln zur Verfügung. Es ist deshalb vorzuziehen, durch Einführen neuer Koordinaten die Funktion so zu transformieren, dass eine von s und $\bar{v}$ unabhängige Funktion und damit eine universell brauchbare Normalkurve entsteht. Man setzt zu diesem Zweck:

$$y = 2 \sqrt{2\pi}\, s f \quad \text{und} \quad x = \frac{v - \bar{v}}{s} \qquad (24)$$

Damit wird die Gleichung der normalen Fehlerkurve zu

$$y = 2\,e^{-\frac{x^2}{2}} \tag{25}$$

und man kann sie als Standardkurve konstruieren (Fig. 4). Mit Hilfe der gleichen einfachen Transformationen kann man die Verteilung einer beliebigen zu prüfenden Statistik auf den Maßstab der Standardkurve bringen, und sie alsdann mit dieser vergleichen.

Für diese Prüfung sei die Statistik in gewohnter Weise in M Klassen von der Breite w mit der Klassenmitte v_j eingeteilt und für jede Klasse die Häufigkeit n_j ermittelt. Zu diesem Zwecke wird vorteilhaft als Klassenbreite ein runder Teil des gleich 1 oder gleich 100 % gesetzten Durchschnittes verwendet. Somit werden auch die Klassengrenzen runde Teile vom Durchschnitt. Die Klassenmitte wird so gewählt, dass eine davon auf $\overline{v} = 100$ % oder 1 fällt. Ist z. B. die Klassenbreite 20 % oder $0{,}2\,\overline{v}$, so liegen die Klassengrenzen bei 10 %, 30 %, 50 % usw., bzw. $0{,}1\,\overline{v}$, $0{,}3\,\overline{v}$, $0{,}5\,\overline{v}$ . . . und die Klassenmitten bei 20 %, 40 %, 60 % . . ., bzw. $0{,}2\,\overline{v}$, $0{,}4\,\overline{v}$, $0{,}6\,\overline{v}$ . . .

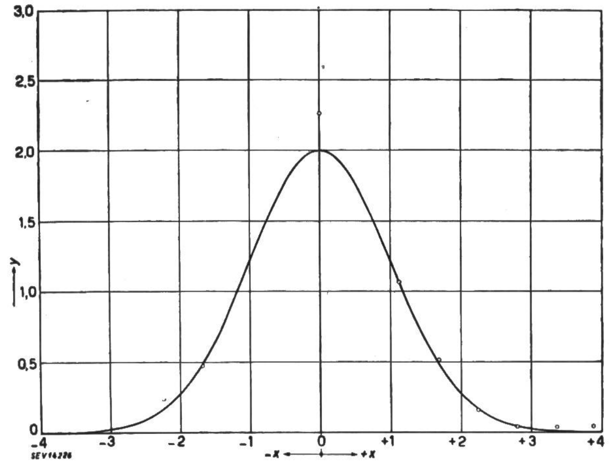

Fig. 4

Die Koordinaten der auf diese Weise entstehenden Einzelpunkte der tatsächlichen Verteilungskurve muss man nun transformieren, um ihren Maßstab auf denjenigen der Normalkurve Fig. 4 zu bringen.

Der Scheitelpunkt der Kurve liegt beim Durchschnitt $\overline{v}$. Indem man von der Variabeln v den Wert $\overline{v}$ abzieht, verschiebt man den Ursprung nach dem Fusspunkt $\overline{v}$, so dass die y-Axe nun durch den Scheitel geht. Mit der Division durch s passt man die v-Werte dem Maßstab der Normalkurve an. (In der Exponentialfunktion ist auch die Variable $[v - \overline{v}]$ durch s geteilt!)

Die neue Abszisse wird also für jede Klassenmitte v_j

$$x_j = \frac{v_j - \overline{v}}{s}$$

Für den Vergleich mit der Normalkurve kann nicht die absolute Häufigkeit einer Klasse, sondern nur die relative Häufigkeit im Vergleich zur Gesamtzahl der Einzelwerte N, also $\frac{n_j}{N}$, in Frage kommen.

Ausserdem gilt diese relative Häufigkeit für die ganze Klassenbreite. Um die jedem Einzelwert von v_j zustehende Ordinate zu erhalten, muss man noch die relative Häufigkeit durch die Klassenbreite w dividieren. Man erhält somit für jeden Wert von n_j den Ausdruck

$$f = \frac{n}{w\,N}$$

Durch Multiplikation mit dem Faktor $2\sqrt{2\,\pi}\,s$ nimmt man noch eine Maßstabanpassung vor, so daß man schliesslich erhält:

$$y_j = \frac{2\sqrt{2\,\pi}\,s}{w\,N}\,n_j$$

Da aber $2\sqrt{2\,\pi}$ sehr angenähert gleich 5 ist, kann man schreiben

$$y_j = \frac{5\,s}{w\,N}\,n_j$$

Jeder Klassenmitte v_j mit der Häufigkeit n_j entspricht somit im neuen Koordinatensystem der Normalkurve ein Punkt mit den Koordinaten x_j und y_j, der mit dem entsprechenden Punkte der Normalkurve verglichen werden kann.

Als numerisches Beispiel nehmen wir die bereits aus den vorangehenden Abschnitten bekannten Zahlen. Nach Abschnitt 3 besteht zwischen v und p eine gewisse Abhängigkeit. Um sich von dieser Abhängigkeit frei zu machen, betrachtet man diesmal nicht den absoluten Energieverbrauch v_i, sondern den spezifischen Verbrauch pro Parametereinheit $\frac{v_i}{p_i} = q_i$. Da aber die Abhängigkeit zwischen v und p nicht streng linear ist ($B = 0{,}377$), so streuen die einzelnen Werte von q_i.

Da der Einfluss vom Parameter p nun ausgeschaltet ist, darf erwartet werden, dass die Streuung kleiner sein, und dass die Verteilung sich stärker der Normalverteilung annähern wird. Man berechnet zunächst die Streuung und nimmt als Klassenbreite den Wert $0{,}2\,\overline{q}$. Die Werte $\overline{v}$ und $\overline{p}$ sind uns aus den früheren Berechnungen bekannt:

$$\overline{v} = 167{,}75 \qquad \overline{p} = 4{,}587$$

Somit wird $$\overline{q} = \frac{167{,}75}{4{,}587} = 36{,}5$$

und $$w = 0{,}2 \cdot 36{,}5 = 7{,}3$$

Das Ergebnis der Auszählung der Karten in jeder Klasse ist in Tabelle IV zusammengefasst. Für die Ausrechnung wurde hier Formel (8) angewendet, da die entsprechenden Summen bereits vorlagen. Die

Formel (9) hätte praktisch zu den gleichen Ergebnissen geführt.

Tabelle IV

Klassenmitte q_j	Häufigkeit n_j	Summe der q_j	Summe der q_j^2
7,3	6	50,1	423,43
14,6	12	188,5	2 991,89
21,9	20	447,5	10 119,59
29,2	53	1577,8	47 150,80
36,5	57	2061,7	74 780,29
43,8	30	1296,8	56 207,48
51,1	27	1358,1	68 859,07
58,4	13	744,1	42 620,27
65,7	4	260,6	16 995,18
73,0	1	69,0	4 761,00
80,3	1	78,7	6 193,69
87,6	1	84,0	7 056,00
	$N = 225$	8216,9	338 158,69

$$\bar{q} = \frac{8216{,}9}{225} = \underline{36{,}5}$$

$$s^2 = \frac{1}{224}(338\,158{,}69 - 36{,}5 \cdot 8\,216{,}9) = \underline{169{,}99}$$

$$s = \sqrt{169{,}99} = \underline{13{,}03}$$

oder, bezogen auf den Durchschnitt

$$\frac{s}{\bar{q}} = \frac{13{,}03}{36{,}5} = \underline{0{,}357}$$

Nun kann man die Transformation vornehmen

$$x_j = \frac{q_j - 36{,}5}{13{,}03}; \quad y_j = \frac{5 \cdot 13{,}03}{7{,}3 \cdot 225} n_j = 0{,}0396\, n_j$$

Die Rechnung erfolgt nach Tabelle V.

Tabelle V

q_j	$q_j - \bar{q}$	$x_j = \frac{q_j - \bar{q}}{s}$	n_j	$y_j = 0{,}0396\, n_j$
7,3	— 29,2	— 2,24	6	0,24
14,6	— 21,9	— 1,68	12	0,48
21,9	— 14,6	— 1,12	20	0,79
29,2	— 7,3	— 0,56	53	2,10
36,5	0	0	57	2,26
43,8	+ 7,3	+ 0,56	30	1,19
51,1	+ 14,6	+ 1,12	27	1,07
58,4	+ 21,9	+ 1,68	13	0,52
65,7	+ 29,2	+ 2,24	4	0,16
73,0	+ 36,5	+ 2,80	1	0,04
80,3	+ 43,8	+ 3,36	1	0,04
87,6	+ 51,1	+ 3,92	1	0,04

Zum Vergleich wurden die einzelnen y-Werte von Tabelle V als Kreise in Fig. 4 eingetragen. Sie streuen noch erheblich, was darauf hinweist, dass die untersuchte Statistik den Gesetzen der Wahrscheinlichkeitsrechnung nicht restlos folgt. Die Verteilung ist keine rein zufällige, sondern untersteht gewissen Einflüssen, deren Untersuchung jedoch nicht hieher gehört. Sie ist immerhin wesentlich besser als diejenige des absoluten Energieverbrauches (Fig. 1). Für unsere praktischen Zwecke darf sie als gut bezeichnet werden.

Die Streuung ist, wie zu erwarten war, kleiner als beim Energieverbrauch, da einer der die Variationen verursachenden Faktoren, die Raumzahl, durch Bildung des spezifischen Verbrauches eliminiert wurde.

In einem weiteren Aufsatz soll die hier nur skizzierte Normalverteilung näher untersucht und ihre praktische Anwendung dargelegt werden.

Adresse des Autors:
Ch. Morel, dipl. Ingenieur, Deyenstrasse, Feldmeilen.

Beitrag zur Frage der Stoßspannungsprüfung an Transformatoren

Von *M. Wellauer*, Zürich

621.317.333.8 : 621.314.21

Beldi hat in einer Arbeit «Versuche mit Stoßspannungen an Transformatoren» [1] [1]) Messungen an einigen Transformatoren älterer Konstruktion beschrieben, die er gemeinsam mit Berger auf Wunsch der Elektrizitätswerke des Kantons Zürich und der Forces Motrices des Lacs de Joux et de l'Orbe durchgeführt hat. Der vorliegende Artikel diskutiert einige mit der Stoßspannungsprüfung der Transformatoren zusammenhängende Fragen, die in der Arbeit von Beldi aufgeworfen wurden, und es soll vor allem auf eine neuere Arbeit von Hagenguth [2] hingewiesen werden, in der eine neue Schaltung zur Fehlerindizierung bei der Stoßspannungsprüfung angegeben wird.

Dans son rapport sur les essais de transformateurs sous tensions de choc [1] [1]), Beldi a décrit les mesures qu'il a effectuées avec Berger sur quelques transformateurs d'ancienne construction, à la demande des Entreprises électriques du Canton de Zurich et des Forces Motrices des Lacs de Joux et de l'Orbe. Le présent article traite de différentes questions mentionnées dans le rapport de Beldi et qui sont en relation, avec les essais de transformateurs sous tensions de choc. L'auteur attire notamment l'attention sur un nouveau travail de Hagenguth [2], qui présente un nouveau couplage permettant d'indiquer les défauts lors des essais sous tensions de choc.

Die Einführung einer Stoßspannungsprüfung für Transformatoren ist erwünscht, wenn die folgenden zwei Fragen bejaht werden können:

a) Kann aus der Stoßspannungsprüfung erkannt werden, ob bei der Stoßspannungsbeanspruchung ein Fehler in der Wicklung auftritt? (Fehlerindizierung)

b) Kann gesagt werden, wo sich dieser Fehler befindet? (Fehlerlokalisierung)

Zur Fehlerindizierung geben die American Standards C 57.2 aus dem Jahre 1942 folgende Methoden an: Geräusch abhören, Beobachtung von Gas- oder Rauchblasen, übermässiger Strom oder Spannungsabfall im Erregerstromkreis, festgestellt durch Messungen mit dem Schleifenoszillographen, Zusammenbruch einer Funkenstrecke oder einer Durchführung, Auftreten von Schwingungen oder eine andere Aenderung des Kathodenstrahl-*Spannungs*oszillogrammes. Von diesen Methoden, deren Wert auch von den amerikanischen Fachleuten z. T. bezweifelt wird, sagt *Beldi* mit Recht, dass sie als nicht genügend sicher und einwandfrei betrachtet werden können, um ihre Einführung zu rechtfertigen.

[1]) siehe Literaturverzeichnis am Schluss.