

Zeitschrift: Bulletin de l'Association suisse des électriciens
Herausgeber: Association suisse des électriciens
Band: 41 (1950)
Heft: 22

Artikel: Die Schwingungen der Hohlleiter für Grosskraftübertragung
Autor: Dahl, M.F.
DOI: <https://doi.org/10.5169/seals-1058944>

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. [Siehe Rechtliche Hinweise.](#)

Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. [Voir Informations légales.](#)

Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. [See Legal notice.](#)

Download PDF: 25.12.2024

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>

Aperçu de l'utilisation des basses tensions d'après la puissance installée des transformateurs

Tableau VI

Tensions d'utilisation V	Puissance des transformateurs alimentant des réseaux de distribution					
	Fin 1936		Fin 1942		Fin 1948	
	kVA	%	kVA	%	kVA	%
2×110	14 000	1,2	12 000	0,8	3 000	0,1
2×125	57 600	5,4	19 700	1,3	15 000	0,7
3×125	3 800	—	4 000	0,3	1 000	—
2×145	6 000	0,5	8 000	0,6	3 500	0,2
3×110/190	12 200	1,1	22 300	1,5	3 500	0,2
3×200	500	—	800	—	500	—
2×220	13 400	1,2	17 000	1,2	33 000	1,4
3×220	26 000	2,3	32 200	2,2	22 900	1,0
3×125/220	107 000	9,4	79 000	5,3	81 000	3,6
3×135/235	5 400	0,5	5 800	0,4	16 000	0,7
3×250	23 100	2,0	23 000	1,5	16 000	0,7
3×145/250	104 000	9,1	94 700	6,4	104 500	4,6
2×125/3×250	21 000	1,8	10 000	0,7	5 600	0,3
3×325	7 000	0,6	1 000	—	11 000	0,5
3×200/350	5 500	0,5	9 300	0,6	1 000	—
3×220/380	476 000	41,8	809 000	54,7	1 513 000	67,3
3×125/220/380	6 000	0,5	7 000	0,5	6 500	0,3
3×250/435	1 900	0,2	1 700	0,1	2 500	0,1
2×140/3×280/480	4 600	0,4	5 000	0,4	14 200	0,6
3×500	190 000	16,7	231 300	15,6	257 800	11,5
3×290/500	3 800	0,3	4 200	0,3	32 000	1,4
3×145/250/500	22 800	2,0	6 000	0,4	—	—
3×220/380/500	21 400	1,9	60 000	4,1	81 500	3,6
3×550/950	7 000	0,6	17 000	1,1	26 000	1,2
Total	1 140 000	100	1 480 000	100	2 251 000	100

les plus fréquentes sont celles de 125/220 et 145/250 V, tandis que certaines tensions de distribution, telles que 2×110 V, 3×250/435 V ont maintenant presque complètement disparu. Par contre, dans les villes et les grandes installations industrielles, les réseaux à 500 V ont conservé leur importance; avec une puissance de 260 MVA aux transformateurs, ces réseaux constituent encore le 12 % des livraisons totales d'énergie. La transformation des installations à 500 V ne s'opère que très lente-

ment, car il en résulte une diminution de la capacité de transport des réseaux de distribution.

La nouvelle statistique comporte 164 pages. On peut l'obtenir auprès de l'Administration commune de l'ASE et de l'UCS, au prix de fr. 30.— (fr. 20.— pour les membres de l'ASE). Les entreprises électriques faisant partie de l'UCS en ont déjà reçu gratuitement un exemplaire.

Adresse de l'auteur:

Inspektorat des installations à courant fort, 301, Seefeldstrasse, Zurich 8.

Die Schwingungen der Hohlleiter für Grosskraftübertragung

Von M. F. Dahl, Baden

621.315.146.056.3

Es wird die durch Wind verursachte Schwingung von Freileitungsseilen rechnerisch untersucht, zunächst beim ungedämpften Faden, dann beim ungedämpften steifen Hohlseil. Dann werden die Schwingungen des gedämpften Seiles behandelt. Die Resultate erklären die eigentümlichen Erscheinungen, die in der Praxis festgestellt werden.

L'auteur examine, par le calcul, l'oscillation engendrée par le vent dans des conducteurs de lignes aériennes, tout d'abord dans le cas d'un fil massif et d'un conducteur câblé creux rigide, non amortis, puis dans celui d'un conducteur câblé amorti. Les résultats permettent d'expliquer certains phénomènes spéciaux constatés en pratique.

Einleitung

Der ständig wachsende Bedarf an elektrischer Energie, die Erschliessung immer neuer Elektrizitätsquellen, die die Erstellung grosser Kraftwerke in allen Teilen Europas zur Folge hat, verlangen nicht nur eine Verstärkung der bestehenden Verbundleitungen, sondern auch den Bau neuer Übertragungsleitungen, was sich in der Vergrösserung der Leiterquerschnitte und in der Erhöhung der Betriebsspannungen auswirkt. Die aus wirtschaftlichen Gründen bedingte Niederhaltung der Korona-verluste in erträglichen Grenzen hat nun zu zwei

verschiedenartig gestalteten Ausbildungsformen der Stromleiter geführt, nämlich dem Hohlleiter und dem Bündelleiter.

Für Hochgebirgsleitungen erscheint der Hohlleiter mit Rücksicht auf die Schnee- und Eislasten zweckmässiger zu sein. Es muss dabei der schwierigere Transport der schweren und umfangreichen Leiterseilbobinen und die gegenüber dem Bündelleiter schwierigere Montage in Kauf genommen werden.

Da die Verwendung dieser beiden Leitersysteme aktuell geworden ist, dürfte es im Interesse der

geplanten europäischen Verbundwirtschaft liegen, Einzelheiten über die Entwicklung, Untersuchungen, Erfahrungen und anderes in zusammenfassender Form bekannt zu geben. Hierbei ist an eine Aufsatzreihe gedacht, die aus dem umfangreichen Material die wichtigsten Punkte zur Kenntnis bringt, wie etwa die Eigenschaften der Hohlleiter und Bündelleiter und ihr Vergleich zueinander, der Einlagenhohlleiter, sein Entstehen, die anfänglichen Schwierigkeiten seiner Fabrikation, Werkzeuge, Ziehen und Verseilen, die Leitungsarmaturen (Tragklemmen, Abspannklemmen, Verbinder), Einwirkungen der atmosphärischen Einflüsse, beispielsweise Rauhreif, Kälte, Schnee, Wasser usw., ferner die Montage der Hohlleiter und Armaturen sowie ausgeführte Anlagen: RWE und Preussag in Deutschland, Boulder-Damm in Amerika und viele andere.

Chronologisch gesehen fand der Hohlleiter, im besonderen der Einlagenhohlleiter¹⁾ sowohl aus Kupfer als auch in geringerem Umfange aus Aluminiumlegierung, in vielen Übertragungsleitungen Verwendung.

Der Einlagenhohlleiter, Bauart Zagorski, wurde vielerseits eingebaut und hat sich in nun bald 23jährigem Betrieb — auch bei direkten Kriegseinwirkungen — ausgezeichnet bewährt. Er wird, ausser von den Vereinigten Metallwerken A.-G. in Deutschland, in Amerika von der General Cable Corp., in Kanada von der Canada Wire and Cable Comp., in Frankreich von der Compagnie Générale d'Electrometallurgie und anderen Werken fabriziert.

Hohlleiter geraten, ebenso wie Vollseile, bei bestimmter Windstärke in Schwingungen. Durch die jahrelang dauernde Einwirkung dieser Erschütterungen auf den Hohlleiter und auf die Armaturen werden beide in ihrer Haltbarkeit zusätzlich beansprucht, und es können schwere Betriebsstörungen verursacht werden. Hieraus erklärt sich das Bedürfnis nach genauer Kenntnis der Schwingungsfestigkeit, Dämpfungsmöglichkeit usw. der Seile und Armaturen. Es seien deshalb die wichtigsten Vorgänge auf rechnerischem Wege dargestellt, wobei den verwickelten Vorgängen entsprechend eine ganz elementare Behandlungsweise naturgemäss nicht immer möglich ist.

Für die Projektierung und den Bau von Leitungen mit derartigen Leiterkonstruktionen ist deren Verhalten bei den betriebsmässig auftretenden mechanischen Schwingungserscheinungen von Interesse, und wir veröffentlichen deshalb im folgenden eine Untersuchung über Schwingungserscheinungen von V. Blaess, Darmstadt.²⁾

1. Die Seilschwingungen des Hohlleiters bei bewegendem Winde

Die Schwingungen eines viele Hunderte von Kilometern über Land laufenden Seiles bestehen

¹⁾ Dahl, M. F.: Einlagenhohlleiter ohne Innenkonstruktion für höchste Spannungen. Bull. SEV Bd. 18(1927), Nr. 7, S. 409...419.

²⁾ Auf Wunsch der Redaktion hat, im Einverständnis mit dem Verfasser, Professor Dr. Marguerre, Darmstadt, die schon vor längerer Zeit niedergeschriebene Arbeit gekürzt.

im wesentlichen in stehenden Wellen, denen ab und zu fortlaufende Schwingungen von sturzwellenartigem Charakter überlagert sind. Die Wellen haben etwa die Form nach Fig. 1, d. h. im Zeit-Weg-Diagramm schwingt irgendein Punkt des Seiles derart, dass mehrere harmonische Schwingungen fast gleicher Frequenz überlagert sind. Die Amplituden sind im allgemeinen nicht sehr erheb-



Fig. 1
Beobachtete Seilschwingungen

lich (0,1...2 cm). Bemerkenswert ist die Tatsache, dass das Seil in der Frequenzskala den Bereich von etwa 400 bis etwa 1200 Schwingungen pro Minute bevorzugt. Diese Erscheinung ist zunächst etwas rätselhaft, weil nach der Theorie der Wirbelablösung die bewegende Kraft F proportional dem Quadrat der Windgeschwindigkeit v ist, nach der Formel

$$F' = 1,7 \rho_0 d v^2 \quad (\rho_0 \text{ Dichte der Luft}) \quad (1)$$

(d Durchmesser des Seiles)
(F' bewegende Kraft pro Längeneinheit)

bei einer Kreisfrequenz

$$\omega \approx 0,2 \frac{v}{d} \quad (2)$$

Um über diese Erscheinung einigen Aufschluss zu erhalten, ferner aber auch, um zu erkennen, wie überhaupt ein Seil im erregenden Winde mit wachsender Windgeschwindigkeit sich verhält, sei eine Berechnung angestellt. Der Einfachheit wegen soll die Voraussetzung gelten, dass der Wind das biegsame Seil von der Länge l gleichmässig erfasst und zunächst, dass die Dämpfung des Seiles, die ohnehin klein zu sein pflegt, vernachlässigt werden kann.

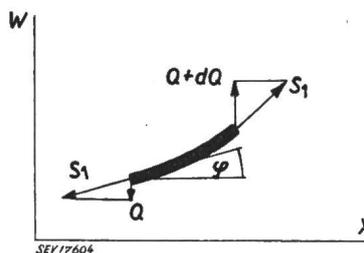


Fig. 2
Kräfte am Seilelement

In Fig. 2 ist ein Seilelement gezeichnet, an dessen Stirnflächen die Kraft S_1 angreift. Mit

$$Q = S_1 \sin \varphi \approx S_1 \frac{dw}{dx}$$

wird die Kraft dQ , die das Seilstück in die Ruhelage zurückzuführen sucht,

$$dQ = \frac{\partial}{\partial x} \left(S_1 \frac{dw}{dx} \right) dx = S_1 \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} dx$$

Ferner wirkt die infolge der Wirbelablösungen periodische Kraft des Windes F (F' pro Längeneinheit):

$$dF = F' \sin \omega t dx$$

Die Masse des bewegten Seilteilchens $\rho A dx$ (A ist der Seilquerschnitt, ρ die Dichte des Seilmaterials) bewegt sich also nach

$$\rho A dx \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = S_1 \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} dx + F' \sin \omega t dx$$

oder

$$\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = c_f^2 \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + F_0' \sin \omega t$$

mit $c_f = \sqrt{\frac{S_1}{\rho A}} = \sqrt{\frac{\sigma}{\rho}}$ und $F_0' = \frac{F'}{\rho A}$

Wir suchen für diese partielle Differentialgleichung zweiter Ordnung eine Lösung $w = f(x, t)$, die an den beiden fest gedachten Aufhängepunkten verschwindet. Legt man der Symmetrie wegen den Koordinatenanfangspunkt in die Mitte des Seiles, so ergibt sich für w als Dauerschwingung, also abgesehen von den (abklingenden) Eigenschwingungen,

$$w = \frac{F_0'}{\omega^2} \left(\frac{\cos \frac{\omega x}{c_f}}{\cos \frac{\omega l}{2 c_f}} - 1 \right) \sin \omega t \quad (3)$$

wie man sich durch Einsetzen leicht überzeugt. Trägt man bei bestimmter Erregerfrequenz die Amplituden der einzelnen Seilpunkte zu einer Kurve auf, so erhält man ein klares Bild des Schwingungsvorganges, das sich zur deutlichen Vorstellung erweitert, wenn man diese Kurven bei verschiedenen Erregerfrequenzen nebeneinanderreihet. In Fig. 3 ist dies ausgeführt.

Man erkennt den Übergang aus der Ruhe zur Grundschwingung (mit hier endlich gezeichneten Amplituden) und von da zur ersten, zweiten, dritten Oberschwingung. Resonanz tritt ein, wenn in (3) $w = \infty$ wird, d. h. wenn (Index f für Faden, Seil)

$$\cos \frac{\omega_f l}{2 c_f} = 0 \text{ d. h. } \frac{\omega_f l}{2 c_f} = \frac{\pi}{2} n \text{ ist } (n = 1, 3, 5, \dots)$$

Hiernach ist die Kreisfrequenz der Grundschwingung

$$\omega_f = \frac{\pi}{l} \sqrt{\frac{\sigma}{\rho}}$$

Ist τ die Periode der Erregung, so gilt $\tau \omega_f = 2 \pi$, und man findet nun leicht den physikalischen Sinn

von $c_f = \sqrt{\frac{\sigma}{\rho}}$: aus $\tau c_f = 2 l$ folgt, dass c_f die Fortpflanzungsgeschwindigkeit des Impulses ist. Nimmt man beispielsweise für $\sigma = 1600 \text{ kg/cm}^2$ und für $\rho = \gamma/g = 8,9 \cdot 10^{-6} \text{ kg} \cdot \text{s}^2/\text{cm}^4$, so tritt bei einem derart gespannten Seil eine Fortpflanzungsgeschwindigkeit transversaler Wellen auf:

$$c_f = \sqrt{\frac{\sigma}{\rho}} = \sqrt{\frac{1600}{8,9}} \cdot 10^3 \rightarrow 133 \text{ m/s}$$

Die Grundschwingung eines 200 m langen Seiles bei $\sigma = 1600 \text{ kg/cm}^2$ ist in der Minute

$$n_{f1} = \frac{60}{2\pi} \omega_f = 30 \frac{c_f}{l} = 20$$

Hierauf folgen die Oberschwingungen mit den entsprechenden Bauchlängen

$$n_{f2} = 60; \quad n_{f3} = 100; \quad n_{f4} = 140 \text{ usw.}$$

$$l_2 = \frac{200}{3}; \quad l_3 = \frac{200}{5}; \quad l_4 = \frac{200}{7} \text{ usw.}$$

Die Frequenzen eines derartig im Winde schwingenden Seiles liegen also um 40 pro Minute voneinander entfernt, sind also je nach der Wind-

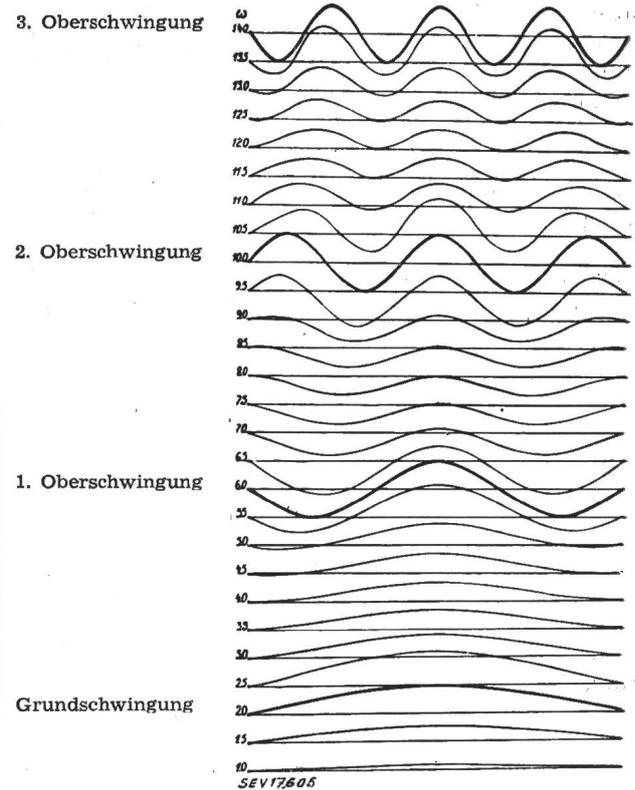


Fig. 3

Ideelle Erregung eines Hohlseiles durch Windkräfte

geschwindigkeit z. B. 420 ($l_{11} = 9,5 \text{ m}$); 460; 500 oder 620; 660 usw. Hieraus erklären sich dann bei der Übereinanderlagerung der Schwingungen die so häufig zu beobachtenden Schwebungen eines Seiles.

Zur Erklärung der Erscheinung, dass bei grösserer Luftgeschwindigkeit fast keine Seilschwingungen auftreten, hat man darauf hingewiesen, dass dem stärkeren Winde gewissermassen die Gleichmässigkeit des Kraftangriffes abgeht. Diese Erklärung ist sicher richtig — sie genügt aber offenbar nicht dem Umstand gegenüber, dass die Kraft nach Gleichung (1) mit dem Quadrat der Windgeschwindigkeit wächst. Beachtet man aber Gleichung (3)

$$w = \frac{F'}{\omega^2 \rho A} \left(\frac{\cos \frac{\omega x}{c_f}}{\cos \frac{\omega l}{2 c_f}} - 1 \right) \sin \omega t$$

die gerade unter der Annahme gleichmässig über das Seil verteilter Strömung gilt, so erkennt man, dass wegen der Gl. (1) und (2) der Faktor F'/ω^2 überhaupt nicht von der Windgeschwindigkeit abhängt, somit der Seilausschlag w unabhängig von v ist. Wohl schwingt das Seil bei grösserer Windgeschwindigkeit mit höheren Frequenzen nach Gleichung (3), das Seil ist aber zu diesen Frequenzen (vor allem wegen der sogleich zu besprechenden Biegesteifigkeit) wesentlich schwerer zu erregen. Hiermit wäre die merkwürdige Erscheinung einigermaßen erklärt, dass eine Leitung bei heftigen Stürmen lange nicht so der Gefahr ausgesetzt ist, zerstört zu werden, als bei leichterem, dem Beschauer kaum auffallender Luftbewegung.

2. Das steife Hohlseil

Für die Konstruktion mit Rücksicht auf die Dauerhaftigkeit eines Hohlseiles — auch für das Prüfverfahren — ist es von Wichtigkeit, zu wissen, wie ein solches Seil im schwingenden Zustand sich verhält: ob es völlig biegsam schwingt, oder ob seine Biegesteifigkeit den Schwingungsvorgang wesentlich beeinflusst.

Wir beginnen damit, festzustellen, wie sich ein Balken unter erzwungenen Schwingungen verhält. Der Balken sei an seinen beiden Enden gelenkig gelagert, und er sei gleichfalls auf der ganzen Länge durch eine periodisch wirkende Kraft von der Grösse F' für die Längeneinheit erregt. Bedeutet J das axiale Trägheitsmoment des Balkenquerschnitts, E den Elastizitätsmodul und M das Biegemoment, so ist bekanntlich, wenn w der Ausschlag ist,

$$- EJ \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = M$$

Aus der Beziehung $dM/dx = Q$ findet man die resultierende, auf ein Balkenelement von der Länge dx wirkende Querkraft

$$dQ = - EJ \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} dx$$

Diese Querkraft zusammen mit der periodisch wirkenden Windkraft $F' \sin \omega t dx$ bewegt das Massenelement $\rho A dx$ des Balkens vom Querschnitt A und der spezifischen Masse ρ nach dem Gesetz:

$$\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + \frac{EJ}{\rho A} \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} = \frac{F'}{\rho A} \sin \omega t$$

wenn wir durch $\rho A dx$ diesmal gleich dividieren. Setzt man, wie oben, abkürzungsweise $F'/\rho A = F'_0$,

ferner $\omega \sqrt{\frac{\rho A}{EJ}} = \gamma$ und integriert diese Gleichung unter Beachtung der Grenzbedingungen, wonach bei der früheren Lage des Koordinatensystems für

$$x = \pm l/2 \text{ die Bedingungen } w = 0 \text{ und } \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = 0$$

erfüllt sein müssen, so erhält man als Lösung für die Dauerschwingung:

$$w = \frac{F'_0}{2 \omega^2} \left(\frac{\cosh \sqrt{\gamma} x}{\cosh \sqrt{\gamma} l/2} + \frac{\cos \sqrt{\gamma} x}{\cos \sqrt{\gamma} l/2} - 2 \right) \sin \omega t$$

Resonanz tritt, da $\cosh \sqrt{\gamma} l/2 \neq 0$ ist, für $\cos \sqrt{\gamma} l/2 = 0$ ein, d. h. für $\gamma l^2 = \pi^2 n^2$. Setzt man für γ seinen Wert ein, so erhält man die kritische Grundfrequenz des Balkens:

$$\omega_b = \frac{\pi^2}{l^2} \sqrt{\frac{EJ}{\rho A}}$$

$$\left(\text{gegen } \omega_f = \frac{\pi}{l} \sqrt{\frac{\sigma}{\rho}} \text{ für den Faden} \right).$$

Nun ist offenbar, dass ein Hohlseil Balken- und Fadeneigenschaften haben muss. Untersucht man unter dieser Voraussetzung wiederum ein Seil bei erregenden Windkräften, so hat man nur die beiden oben betrachteten Schwingungsgleichungen miteinander zu verbinden. Man erhält so

$$\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = - \frac{EJ}{\rho A} \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + \frac{S_1}{\rho A} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + F'_0 \sin \omega t$$

Unter der Bedingung, dass das Seil an den beiden Enden drehbar aufgehängt ist, erhält man für den Ausschlag w , wie man sich durch Differentiation usw. überzeugt:

$$w = \frac{F'_0}{\omega^2 (\alpha_1^2 + \alpha_2^2)} \left(\alpha_2^2 \frac{\cosh \alpha_1 x}{\cosh \alpha_1 l/2} + \alpha_1^2 \frac{\cos \alpha_2 x}{\cos \alpha_2 l/2} - \alpha_1^2 - \alpha_2^2 \right) \sin \omega t$$

wobei bedeuten:

$$\alpha_1^2 = \frac{\pi^2 \omega_f^2}{2 l^2 \omega_b^2} \left(\sqrt{1 + 4 \omega^2 \frac{\omega_b^2}{\omega_f^4}} + 1 \right)$$

$$\alpha_2^2 = \frac{\pi^2 \omega_f^2}{2 l^2 \omega_b^2} \left(\sqrt{1 + 4 \omega^2 \frac{\omega_b^2}{\omega_f^4}} - 1 \right)$$

Resonanz tritt wieder ein für $\cos \alpha_2 l/2 = 0$, d. h. für $\alpha_2 l = n\pi$. Ermittelt man hieraus die kritische Kreisfrequenz ω_k des biegeungssteifen Hohlseils, so erhält man die bemerkenswerte Beziehung:

$$\omega_k^2 = \omega_f^2 + \omega_b^2$$

oder auch, wenn man anstatt der Kreisfrequenzen die Schwingungszahlen n für die Minute nimmt:

$$n_k^2 = n_f^2 + n_b^2 \tag{4}$$

Diese Gleichung besagt, dass die Eigenschwingungszahl eines biegeungssteifen, gelenkig gelagerten Seiles gleich ist der Hypothenuse eines rechtwinkligen Dreiecks, dessen Katheten die kritischen Schwingungszahlen des biegeungsfreien Seiles und des spannungsfreien Balkens sind. In Fig. 4 ist diese Tatsache zum Ausdruck gebracht.

Das Gesetz gilt, wie immer die Erregung vorgenommen wird, ob z. B. durch Windkräfte oder künstlich, etwa durch die Erregung des einen Seilendes. Schwingungstheoretisch ist dieses Ergebnis

einleuchtend, denn in einem biegeunflexiblen Seil sind die rückführenden Kräfte von Fadencharakter und Balkencharakter wie Federrückführkräfte parallel-geschaltet.

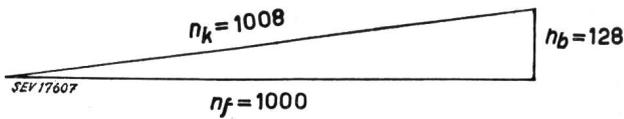


Fig. 4
Einfluss der Biegeunflexibilität auf die Frequenz
(bei 4 m Bauchlänge)

Nach (4) ist der Einfluss des Balkencharakters auf ein Hohlseil, das mit einer Knotenpunktentfernung (Bauchlänge) von z. B. 4 m schwingt, noch verhältnismässig gering. Denn man hat:

$$n_f = \frac{30}{l} \sqrt{\frac{\sigma}{\rho}} = \frac{30}{400} 13\,300 = 1000$$

während bei einem wirksamen Trägheitsradius $i = \sqrt{J/A} = 0,65 \text{ cm}$

$$n_b = \frac{30 \pi}{l^2} \sqrt{\frac{EJ}{\rho A}} = \frac{30 \pi}{400^2} i \sqrt{10^6 \frac{10^6}{8,9}} = 128$$

so dass $n_k = 1008$ die tatsächliche kritische Frequenz des Seiles ist. Es wird also die konstante Spannung σ des Seiles in diesem Falle die Biegeunflexibilität bei weitem überwiegen. Erst bei kürzeren Wellen, also bei den höheren Schwingungen, tritt der Balkencharakter eines Seiles deutlicher hervor und beeinflusst dann wesentlich die kritische Schwingungszahl und bei grösseren Seilausschlägen auch dessen Beanspruchung. In Fig. 5 sind die kritischen Schwingungszahlen dargestellt für dasselbe Seil, jedoch für eine Knotenpunktentfernung von $1\frac{1}{2} \text{ m}$. Hier ist die Balkenfrequenz bereits ein erheblicher Teil der Fadenfrequenz.

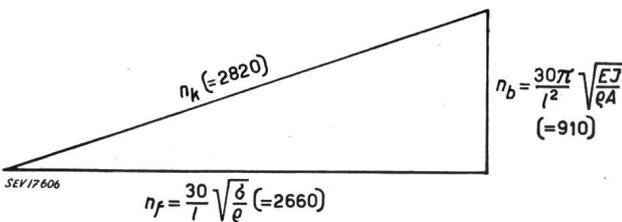


Fig. 5
Einfluss der Biegeunflexibilität auf die Frequenz
(bei 1,5 m Bauchlänge)

Bekanntlich werden solch kleine Bauchlängen auf der freien Strecke nur selten beobachtet, wie schon gesagt wegen der bedeutend schwereren Erregbarkeit, ferner wegen der grösseren Dämpfung und wegen der wohl nie genügend gleichmässigen Winderregung. Trotzdem ist es bei der Seilprüfung nötig, sowohl bei der relativen (Konstruktion gegen Konstruktion) wie bei der absoluten, die Biegeunflexibilität künstlich gross zu machen, nicht zuletzt wegen der manchmal im Seil auftretenden starken Inanspruchnahme durch fortschreitende Wellen grosser Amplituden nach Art der Sturzwellen.

3. Seilschwingungen mit Dämpfung

a) Die Seilcharakteristik

Bislang war angenommen, dass das Seil keinerlei Dämpfung besitzt. Die hieraus gezogenen Schlussfolgerungen sind, soweit es sich nicht um sehr grosse Amplituden handelt, trotzdem richtig. Aus dem Verhalten eines dämpfungsfreien Seiles kann man jedoch keine Folgerungen bezüglich der Beanspruchung, z. B. bei Biegung, ziehen. Es ist dazu nötig, an Stelle der ungedämpften die gedämpften Seilschwingungen zu untersuchen. Über die Dämpfung

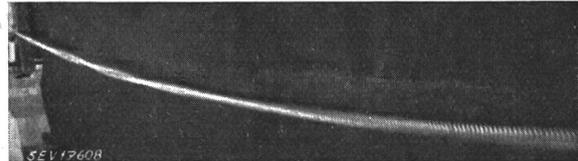


Fig. 6
Schwingung eines stärker gedämpften Seiles (Hanfseil)
Erregung rechts

fung ist zunächst zu bemerken, dass sie im Hohlseil nicht sehr gross ist: man sieht dies z. B. daran, dass ein Stoss sich auf Hunderte von Metern fast ungeschwächt fortpflanzt. Ferner kann man es an der Tatsache feststellen, dass bei erzwungenen Schwingungen sich auf lange Strecken hin nahezu ideale Knotenpunkte und Bäuche gleicher Amplitude ausbilden. Wesentlich grösser als bei Metallseilen ist z. B. die Dämpfung bei gewöhnlichen Hanfseilen. Hier zeigen sich bei Dauererregung durchaus nicht ausgesprochene Knotenpunkte, wie das Lichtbild Fig. 6 erkennen lässt.

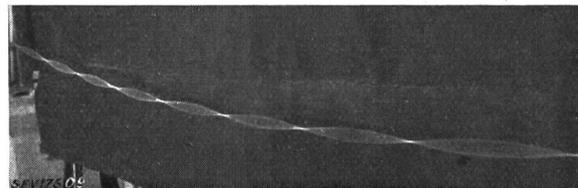


Fig. 7
Schwingung eines schwach gedämpften Seiles
(dünnes Stahlseil)
Erregung rechts

Im Gegensatz hierzu steht ein Metallseil, Fig. 7, welches durchgängig klar ausgeprägte Knotenpunkte besitzt. Wird allerdings diesem selben Seil an irgend einer Stelle Energie abgezapft, etwa dadurch, dass man es dort zwischen zwei leicht angepressten Backen schwingen lässt, so ändert sich sofort das Bild nach Fig. 8, worin vor der Bremse der nahezu vollkommene Energietransport durch das Seil, gekennzeichnet durch die grosse Verschwommenheit der Knotenpunkte, deutlich zu bemerken ist (vgl. Abschn. b), während nach der Bremse stehende Wellen wieder auftreten.

Wie gross die Dämpfung eines gespannten Seiles ist, ausgedrückt durch bestimmte Dämpfungsziffern, darüber dürfte wohl bis jetzt noch wenig Zuverlässiges bekannt sein, trotzdem gerade die Dämpfung z. B. beim Hohlseil eine nicht un-

wesentliche Rolle spielt, da seine Brauchbarkeit durch eine gute Dämpfung wesentlich gefördert würde. Man hat sich schon verschiedentlich bemüht, auf künstlichem Wege die Dämpfung von Hohlseilen zu erhöhen, z. B. dadurch, dass man deren Inneres mit einer schwingungsdämpfenden Masse ausfüllt, oder, dass man am äusseren Umfang der Leitung dämpfende Masse anbrachte. Ferner hat man auf dynamischem Wege versucht, die Dämpfung zu steigern, indem man nach dem Prinzip des Doppelpendels (Schwingungstilger) eine Feder an

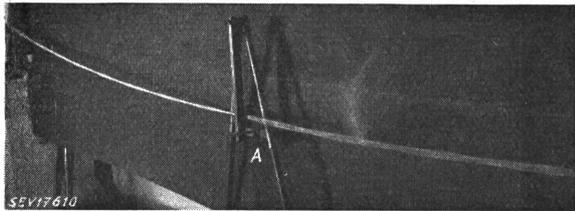


Fig. 8

Schwingung eines schwach gedämpften Seiles mit Energieentnahme an der Stelle A Erregung rechts

der Leitung angebracht hat, die auf die Seilschwingungen abgestimmt ist. Diese letzte Massnahme (zu welcher bis zu gewissem Grade auch der sogenannte amerikanische Schwingungsdämpfer gehört, bestehend aus einem ca. 1½ m langen, an den Enden beschwerten Stück Hohlseil, das am Hauptseil hängt), ist, wie eingehende Versuche dargetan haben, nicht befriedigend, da wohl eine bestimmte Frequenz sich restlos beseitigen lässt, alle übrigen aber nicht, und bei Anwendung mehrerer Federn eine Aufhebung dieser Wirkung eintritt.

Es erhebt sich also die Frage, wie schwingt überhaupt ein gedämpftes Seil, wie ist insbesondere dessen Dämpfung zahlenmässig zu ermitteln?

Um hiervon ein Bild zu bekommen, sei zunächst von der Biegesteifigkeit des Seiles abgesehen, und es sei das eine Ende fest, das andere im Abstand l davon harmonisch bewegt nach dem Gesetz $w = \alpha \sin \omega t$. Wird die Reibung berücksichtigt und sei diese zunächst proportional der ersten Potenz der Geschwindigkeit, also

$$2f \frac{\partial w}{\partial t}$$

so lautet die Bewegungsgleichung des Seilelements offenbar (f ist die Reibungsziffer):

$$\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = cf^2 \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} - 2f \frac{\partial w}{\partial t}$$

Als Lösung dieser Bewegungsgleichung mit den Grenzbedingungen, dass für $x = 0$, $w = 0$ und für $x = l$, $w = \alpha \sin \omega t$ sein soll, erhält man:

$$w = A e^{sx} [\cos(\alpha + qx) \sin \omega t + \sin(\alpha + qx) \cos \omega t] - A e^{-sx} [\cos(\alpha - qx) \sin \omega t + \sin(\alpha - qx) \cos \omega t]$$

Hierbei ist, wie man sich überzeugt:

$$1) \quad q^2 - s^2 = \frac{\omega^2}{cf^2}$$

$$2) \quad qs = f \frac{\omega}{cf^2}$$

$$3) \quad \text{ctg } \alpha = -\text{ctg } ql \cdot \text{tgh } sl$$

$$4) \quad A^2 [\cosh 2sl - \cos 2ql] = \frac{1}{2} \alpha^2$$

Der Ausschlag w im Abstand x_0 vom Seilanfang zur Zeit t kann nun auf die folgende Weise dargestellt werden: Von der Horizontalen durch O , Fig. 9, trage man den Winkel ωt auf und von dessen Schenkel OT ferner den Winkel $\alpha + qx$, worauf $OZ = A e^{sx}$ zu nehmen ist. Hierdurch ist im Abstand des Punktes Z von der Horizontalen bereits der erste Anteil von w gegeben. Zieht man weiter von der Horizontalen durch Z die Winkel ωt und $\alpha - qx$ und trägt von Z bis X_0 den Betrag $-A e^{-sx}$ auf, so stellt, wie leicht einzusehen, die Projektion von OX_0 auf die Vertikale, nämlich OC_0 , den gesuchten Wert w für die Zeit t dar. Für eine andere Zeit dreht sich entsprechend dieser der Schenkel OT und mit diesem fest verbunden $w_0 = OX_0$, so dass also allgemein die Projektion von OX_0 auf die w -Achse den harmonisch verlaufenden Ausschlag w an der Seilstelle im Abstand x_0 vom Seilanfang kennzeichnet. Jedem

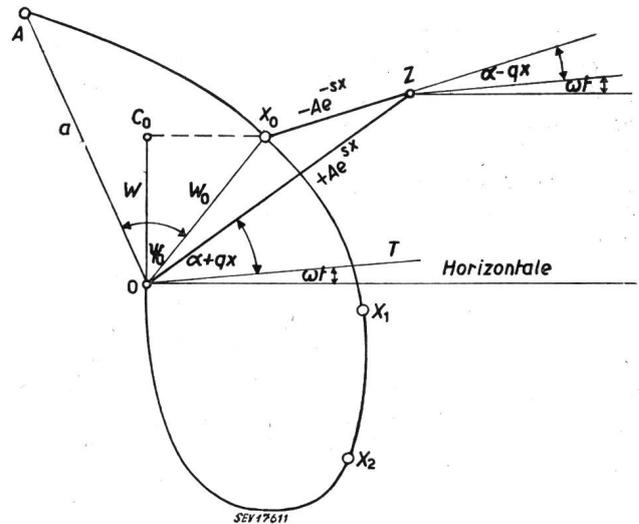


Fig. 9

Projektion der Seilcharakteristik

weiteren Punkte x_1 des Seiles entspricht offenbar ein weiterer Strahl OX_1 , und man erhält somit eine bestimmte Kurve, welche «Projektion der Seilcharakteristik» (auf die Stirnebene) genannt werden soll. Die Seilcharakteristik selbst ergibt sich durch Auftragen des Vektors $\overline{OX_0}$ an der Stelle x_0 als Raumkurve und sie hat die Eigenschaft, dass durch ihre Projektion auf die Seilschwingungsebene die Seilkurve zur Zeit t gemäss der obigen Gleichung wiedergegeben wird. Denkt man sich diese Charakteristik mit der konstanten Winkelgeschwindigkeit ω um die Gleichgewichtslage des Seiles OO

gedreht und dabei stets diese Projektion vorgenommen, so erhält man ein vollkommenes Bild des Schwingungsvorganges im Seil. In Fig. 10 ist die Lage einer Charakteristik und ihre Projektion auf

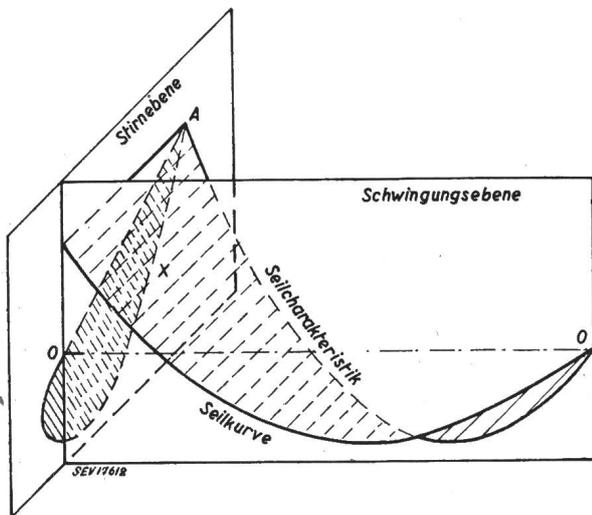


Fig. 10
Seilkurve und die Projektion der Seilcharakteristik

die Stirnebene zur Zeit t durch schiefe Projektion dargestellt, ferner ist die durch deren Projektion auf die Schwingungsebene sich ergebende Seilkurve angegeben.

b) Die Ermittlung der Dämpfungsziffern

Jedes mit Dämpfung schwingende Seil hat natürlich eine besondere Seilcharakteristik, und wenn es gelingt, diese versuchsmässig darzustellen, so ist es möglich, die Reibungsziffer f dadurch zu gewinnen, dass aus einer Schar von Charakteristiken mit dem Parameter f gerade diejenige gewählt wird, welche sich mit der durch den Versuch aufgenommenen deckt oder nahezu deckt. Gelingt diese Deckung nicht befriedigend, so ist dies ein Zeichen dafür, dass das Seil noch von anderen Dämpfungskräften beeinflusst wird als von der proportional der Geschwindigkeit vorausgesetzten Reibung. Nimmt man an, dass wie bei der Zähigkeit die Relativgeschwindigkeit eine Rolle spielt, so kommt man zu der Bewegungsgleichung:

$$\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} - 2f \frac{\partial w}{\partial t} + 2g \frac{\partial^3 w}{\partial x^2 \partial t}$$

deren Lösung wiederum zu einer Seilcharakteristik führt. Bei dieser hat man jetzt zwei Parameter f und g zur Hand, um die versuchsmässig gefundene Kurve mit der rechnermässigen zur Deckung zu bringen, wodurch die beiden Reibungsziffern f und g ermittelt werden können.

Zur Bestimmung der Versuchscharakteristik ist es zweckmässig, das Seil kinematographisch aufzunehmen. Bei z. B. 200 Aufnahmen pro Sekunde gelingt es, für jeden Punkt x_0 des Seiles den Winkel ψ_0 (Fig. 9), den seine Amplitude w_0 mit dem Erregerfahrstrahl $OA = a$ bildet, aus der bei dem nacheinander erfolgenden Durchgang durch die Gleichgewichtslage verliessenden Zeit τ_0 nach der Gleichung $\psi_0 = \omega \tau_0$ zu ermitteln. Auf diese Weise ergibt sich dann die gesuchte Charakteristik als Polardiagramm, und sie vermag somit die gesuchten dynamischen Reibungsziffern zu liefern. Hiernach kann jedes Seil (wichtig bei Neukonstruktionen) auf seinen Dämpfungswert hin untersucht und festgelegt werden.

Zu bemerken ist, dass der Gedanke nahe liegt, die Dämpfung eines Seiles aus dem Abklingen seiner Eigenschwingungen zu ermitteln. Da indessen nicht zu erwarten ist, dass die so gewonnenen Reibungswerte denen gleichkommen, die in Wirklichkeit bei der erzwungenen Bewegung auftreten, ist hier ein Ermittlungsverfahren bei erzwungener Schwingung des Seiles angegeben worden, auch auf die Gefahr, dass dieses durchaus nicht einfach durchzuführen ist.

c) Die Beanspruchung durch Biegung

Die Berechnung eines Seiles auf Biegung sei hier nur noch kurz angedeutet. Durch Auflösung der Differentialgleichung des biegesteifen Seiles mit Dämpfung:

$$\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = c_f^2 \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} - \kappa^2 \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} - 2f \frac{\partial w}{\partial t} + 2g \frac{\partial^3 w}{\partial x^2 \partial t}$$

unter Berücksichtigung der Grenzbedingungen erhält man w als Funktion von x und t . Das Biegemoment ist gegeben durch

$$EJ(1 + S_1/EA) \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = -M$$

(mit dem Klammerwert deshalb, weil das Seil kein reiner, sondern ein mit S_1 vorgespannter Balken ist). Aus dem so gefundenen maximalen M ist dann in bekannter Weise die Biegebeanspruchung σ_b festzustellen.

Die Ermittlung der Biegespannung bietet also prinzipiell keine Schwierigkeiten, wenn sie auch zweifelsohne grössere Rechenarbeit erfordert. Nach den Ergebnissen in Ziff. 2 kann jedoch gesagt werden, dass bei längeren Wellenbäuchen und nicht zu grossen Ausschlägen die Biegebeanspruchung gegenüber der Zugbeanspruchung des Seiles kaum ins Gewicht fällt.

Adresse der Autoren:

Dr. M. F. Dahl, Fluhmattstrasse 4, Baden (AG).
Prof. Dr. V. Blaess, Technische Hochschule, Darmstadt (Deutschland).