Zeitschrift: Bulletin de l'Association suisse des électriciens

Herausgeber: Association suisse des électriciens

Band: 43 (1952)

Heft: 19

Artikel: Eine einfache graphische Methode zur Auflösung von drei Gleichungen ersten Grades mit drei Unbekannten

Autor: Degen, A.

DOI: https://doi.org/10.5169/seals-1057895

Eine einfache graphische Methode zur Auflösung von drei Gleichungen ersten Grades mit drei Unbekannten

Von *A. Degen*, Basel

518.42

Es wird ein graphisches Verfahren entwickelt, das ohne lange Berechnungen ermöglicht, in drei Gleichungen ersten Grades die Unbekannten zu bestimmen.

Développement d'une méthode graphique qui permet de résoudre, sans calculs trop longs, trois équations du premier degré à trois inconnues.

Bei drei Gleichungen ersten Grades werden die drei Unbekannten so bestimmt, dass man rechnerisch zwei davon nacheinander eliminiert, worauf die dritte sich auf einfache Art berechnen lässt. Auch ist es möglich, für jede der drei Unbekannten eine Formel aufzustellen, die es gestattet, ohne Substitution aus den bekannten Koeffizienten der drei Gleichungen die Unbekannten einzeln und unabhängig von einander zu ermitteln. Diese drei allgemeinen Formeln sind nicht sehr übersichtlich und eher etwas schwerfällig, so dass man ihnen in der Praxis kaum begegnet. Alle drei haben die Form eines Bruches mit gleichem Nenner. Dieser wie auch der Zähler setzen sich je aus einer Summe von sechs Gliedern zusammen. Jedes Glied ist seinerseits das Produkt von je drei bekannten Koeffizienten der drei Gleichungen.

Man kann die drei Unbekannten ausser durch Substitution auch noch mit Hilfe von Determinanten bestimmen. Dieses Verfahren setzt gewisse Spezialkenntnisse voraus, die oft fehlen. Wenn es sich darum handelt, drei Gleichungen mit drei Unbekannten nur in vereinzelten Fällen auflösen zu müssen, so lohnt sich die Einarbeitung in die Theorie der Determinanten kaum.

Das nachstehend angegebene Verfahren vermeidet die Nachteile des rechnerischen Verfahrens wie auch jene der Anwendung von Determinanten. Es gestattet, ohne grossen Aufwand und ohne spezielles Studium, die drei Unbekannten rasch und mit einer in vielen Fällen für die Praxis genügenden Genauigkeit zu finden. Sind die drei Unbekannten rechnerisch ermittelt worden, so kann diese Methode als unabhängige Kontrolle gute Dienste leisten.

Es seien die Unbekannten x, y und z in den folgenden drei Gleichungen zu bestimmen

$$A_1 x + B_1 y + C_1 z + D_1 = 0 \tag{1}$$
$$A_2 x + B_2 y + C_2 z + D_2 = 0 \tag{2}$$
$$A_3 x + B_3 y + C_3 z + D_3 = 0 \tag{3}$$

Die Grössen A, B, C und D sollen bekannte Zahlenwerte darstellen. Nun setze man in allen drei Gleichungen für z einen beliebigen Zahlenwert $z = z_1$ ein. Dann lassen sich die Gleichungen (1) bis (3) in die folgende Form bringen

$$y = n_1 x + b_1 \tag{4}$$
$$y = n_2 x + b_2 \tag{5}$$
$$y = n_3 x + b_3 \tag{6}$$

Für einen weiteren Zahlenwert $z = z_2$ erhält man nochmals drei Gleichungen

$$y = n_1 x + b_4 \tag{7}$$
$$y = n_2 x + b_5 \tag{8}$$
$$y = n_3 x + b_6 \tag{9}$$

In einem rechtwinkligen Koordinatensystem stellen n_1, n_2 und n_3 in den Gleichungen (4) bis (9) die Richtungskoeffizienten von Geraden und b_1 bis b_6 die Abschnitte auf der y-Achse dar. Da die Änderung von z in den Gleichungen (1) bis (3) keinen Einfluss auf die Glieder mit x und y hat, so besitzen je zwei Geraden den gleichen Richtungskoeffizienten, d. h. sie liegen parallel zueinander. Nun kann man die Geraden, wie sie durch die Gleichungen (4) bis (9) dargestellt werden, in ein rechtwinkliges Koordinatensystem eintragen (Fig. 1). Die Geraden nach den Gleichungen (4) bis (6) und diejenigen nach den Gleichungen (7) bis (9) schneiden sich dann je in drei Punkten. Man erhält so zwei ähnliche Dreiecke. Verbindet man die einander entsprechenden Ecken, so schneiden sich die Verbindungslinien in einem Punkt S_1. Die Koordinaten x und y des Punktes S_1 entsprechen dann den gleichnamigen Unbekannten in den Gleichungen (1) bis (3).

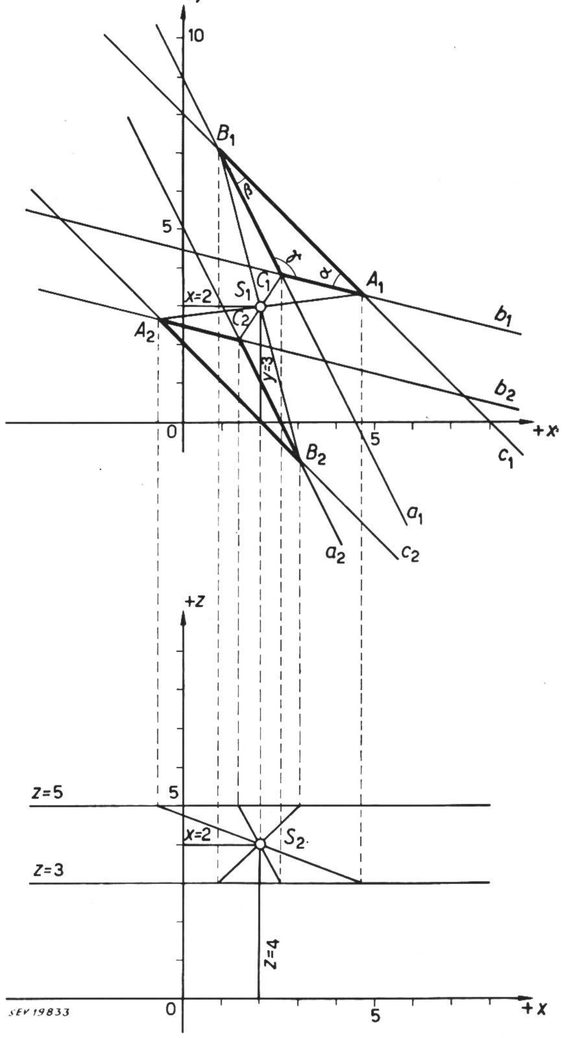

Fig. 1
Anwendungsbeispiel der graphischen Methode

Trägt man in einem weiteren rechtwinkligen Koordinatensystem auf der Abszisse die Werte für x und auf der Ordinate diejenigen für z auf, so kann man als Parallelen zur x-Achse die beiden Geraden $z = z_1$ und $z = z_2$ einzeichnen. Nun projiziert man die sechs Eckpunkte der beiden ähnlichen Dreiecke auf die Geraden $z = z_1$ und $z = z_2$, wobei auf jede Gerade drei Punkte entfallen. Verbindet man nun analog zur ersten Aufzeichnung im xy-Koordinatensystem die einander auf den Geraden $z = z_1$ und $z = z_2$ entsprechenden Punkte, so schneiden sich die Verbindungsgeraden wieder in einem Punkt S_2 mit den Koordinaten x und z, bzw. den gleichnamigen Unbekannten in den Gleichungen (1) bis (3).

Der Beweis für das angegebene Verfahren lässt sich mit Hilfe der analytischen Geometrie erbringen. Zunächst ermittelt man aus den Gleichungen (1) bis (3) die drei Unbekannten x, y und z. Wenn man nun das angegebene graphische Verfahren analytisch ebenfalls nachrechnet, so ergibt sich, dass die Koordinaten des Schnittpunktes der drei Verbindungslinien sowohl im xy- als auch im xz-System mit den drei Unbekannten x, y und z in den Gleichungen (1) bis (3) übereinstimmen. Die Wahl von z_1 und von z_2 hat keinen Einfluss auf das Resultat, da beide Grössen bei der Durchrechnung verschwinden.

Die Wurzeln x, y und z der drei Gleichungen (1) bis (3) lassen sich auch geometrisch deuten. Jede der drei linearen Beziehungen stellt in einem rechtwinkligen xyz-Koordinatensystem eine Ebene dar. Nun sei vorausgesetzt, dass die drei Ebenen zueinander nicht parallel liegen. Dann besitzen sie nur einen einzigen Schnittpunkt, dessen Koordinaten x, y und z die gesuchten Wurzeln der drei Gleichungen (1) bis (3) sind.

Wenn man aus drei Gleichungen ersten Grades die drei Unbekannten x, y und z zu bestimmen hat, so ist es wichtig, schon am Anfang zu wissen, ob zwei oder vielleicht gar alle drei Ebenen zueinander parallel sind. Ist dies tatsächlich der Fall, so gibt es weder eine analytische noch eine graphische Lösungsmöglichkeit. Nach den Regeln der analytischen Geometrie sind nun zwei Ebenen zueinander parallel, wenn sie, in Anlehnung an die in den Gleichungen (1) bis (3) gewählten Buchstabensymbole, folgenden Aufbau besitzen

$$A_1 x + B_1 y + C_1 z + D_1 = 0 \tag{10}$$

$$A_1 x + B_1 y + C_1 z + D_2 = 0 \tag{11}$$

d. h. die beiden Gleichungen unterscheiden sich nur im konstanten Gliede. Sind jedoch die Beziehungen in ihrer Form entsprechend den Gleichungen (1) und (2) gegeben, so gilt folgende Relation zwischen den Koeffizienten A_1, A_2, B_1, B_2, C_1 und C_2 für parallele Ebenen

$$\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{C_1}{C_2} \tag{12}$$

Die Gleichungen (10) bis (12) haben keine Gültigkeit für sich schneidende Ebenen.

Die angegebene graphische Methode liefert ferner keine genauen Werte für x, y und z, wenn der Zwischenwinkel zweier sich schneidender Geraden klein wird. Dieser lässt sich ganz allgemein nach bekannten Formeln der Trigonometrie berechnen zu

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{n_1 - n_2}{1 + n_1 \, n_2} \tag{13}$$

Nun schneiden sich die drei Geraden aber unter drei Winkeln, die mit α, β und γ bezeichnet seien (Fig. 1). Um die Wurzeln x, y und z möglichst genau bestimmen zu können, sollen die drei Winkel in der Fig. so gross sein, dass kein schleifender Schnittpunkt entsteht. Deshalb sollte aus rein praktischen Überlegungen heraus folgende Bedingung eingehalten werden

$$10^\circ \leqq \alpha, \beta$$

oder (14)

$$\gamma \leqq 160^\circ$$

Führt man an Stelle des Winkels den Tangens ein, so erhält man

$$\operatorname{tg} \alpha, \operatorname{tg} \beta \text{ oder } \operatorname{tg} \gamma \geqq +0{,}1763 \tag{15}$$

$$\operatorname{tg} \alpha, \operatorname{tg} \beta \text{ oder } \operatorname{tg} \gamma \leqq -0{,}364 \tag{16}$$

Zu Kontrollzwecken lassen sich die folgenden beiden Gleichungen gut verwenden

$$\alpha + \beta + \gamma = 180^\circ \tag{17}$$

$$\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{tg} \beta + \operatorname{tg} \gamma = \operatorname{tg} \alpha \cdot \operatorname{tg} \beta \cdot \operatorname{tg} \gamma \tag{18}$$

Beispiel

Zum Schluss soll noch an einem Beispiel gezeigt werden, wie das Verfahren angewendet werden kann. Es seien die folgenden drei Gleichungen gegeben

$$2x + y + 2z - 15 = 0$$
$$x + 4y + 4z - 30 = 0$$
$$x + y + 3z - 17 = 0$$

Da die drei Gleichungen (10) bis (12) nicht erfüllt sind, so liegen die drei Ebenen nicht parallel zueinander; sie schneiden sich in einem Punkt. Mit $z = 3$ und $z = 5$ erhält man

Gerade	$z = 3$	Gerade	$z = 5$
a_1	$y = n_1 x + b_1$ $= -2x + 9$	a_2	$y = n_1 x + b_4$ $= -2x + 5$
b_1	$y = n_2 x + b_2$ $= -\frac{x}{4} + 4{,}5$	b_2	$y = n_2 x + b_5$ $= -\frac{x}{4} + 2{,}5$
c_1	$y = n_3 x + b_3$ $= -x + 8$	c_2	$y = n_3 x + b_6$ $= -x + 2$

Mit Hilfe der Schnittpunkte S_1 und S_2 findet man für die drei Unbekannten in Fig. 1

$$\underline{x = 2} \qquad \underline{y = 3} \qquad \underline{z = 4}$$

Diese drei Werte erfüllen die obigen drei Gleichungen, wie man durch Einsetzen feststellen kann. Zur Erzielung eines möglichst exakten Resultates müssen die sechs Geraden a_1, a_2, b_1, b_2, c_1 und c_2 sorgfältig aufgezeichnet werden.

Die Kontrolle mit Hilfe der Gleichungen (14) bis (18) ergibt folgende Werte

Geraden $b_1\, c_1$: $\operatorname{tg} \alpha = \dfrac{-0{,}25 + 1}{1 + 0{,}25} = \dfrac{3}{5}$ $\quad \alpha = 30^\circ 57' 50''$

Geraden $c_1\, a_1$: $\operatorname{tg} \beta = \dfrac{-1 + 2}{1 + 2} = \dfrac{1}{3}$ $\quad \beta = 18^\circ 26' \, 5''$

Geraden $a_1\, b_1$: $\operatorname{tg} \gamma = \dfrac{-2 + 0{,}25}{1 + 2 \cdot 0{,}25} = -\dfrac{7}{6}$ $\quad \gamma = 130^\circ 36' \, 5''$

total 180°

$$\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{tg} \beta + \operatorname{tg} \gamma = \operatorname{tg} \alpha \cdot \operatorname{tg} \beta \cdot \operatorname{tg} \gamma = -\frac{7}{30}.$$

Adresse des Autors:
Alfred Degen, dipl. Ing. ETH, Colmarerstr. 85, Basel.