Zeitschrift: Bulletin de l'Association suisse des électriciens

Herausgeber: Association suisse des électriciens

Band: 48 (1957)

Heft: 15

Artikel: Einführung in die Theorie der verallgemeinerten Funktionen (Distributionen) als mathematisches Werkzeug zur Behandlung linearer Regelungen

Autor: Stiefel, E.

DOI: https://doi.org/10.5169/seals-1058687

48e année N° 15 Samedi, le 20 Juillet 1957

BULLETIN

DE L'ASSOCIATION SUISSE DES ELECTRICIENS

ORGANE COMMUN

DE L'ASSOCIATION SUISSE DES ELECTRICIENS (ASE) ET

DE L'UNION DES CENTRALES SUISSES D'ELECTRICITE (UCS)

A nos lecteurs

Des circonstances indépendantes de notre volonté nous obligent malheureusement à réduire sensiblement la matière de notre Bulletin. Jusqu'à présent, nous nous sommes toujours efforcés de tenir compte des différents vœux de nos lecteurs; ce sera difficile à présent que nous sommes contraints de recourir à une telle mesure qui, espérons-le, ne sera que provisoire. Nous prions donc nos lecteurs de faire preuve d'indulgence et de compréhension.

La rédaction

Einführung in die Theorie der verallgemeinerten Funktionen (Distributionen) als mathematisches Werkzeug zur Behandlung linearer Regelungen

Vortrag, gehalten am 7. Dezember 1956 an der ETH in Zürich in der Schweiz. Gesellschaft für Automatik,

von *E. Stiefel*, Zürich

621-52 : 517.1

In der Theorie der linearen Regelungen benützt man seit Heaviside *den Begriff des unendlich kurzen und unendlich starken Stosses, der mathematisch schwer exakt zu fassen ist. In den letzten Jahren wurde es möglich, durch die Einführung verallgemeinerter Funktionen (genannt Distributionen) in dieser Hinsicht eine strenge mathematische Theorie zu schaffen. Sie eignet sich vorzüglich zur Behandlung von Servo-Problemen und ersetzt grosse Teile der Theorie der Laplace-Transformationen durch physikalisch anschaulichere Begriffsbildungen. Zunächst werden die Grundlagen mit Hilfe des Werkzeugs der Zeitserien besprochen und dann Anwendungen geschildert.*

Depuis Heaviside, *la théorie des réglages linéaires était basée sur la notion du choc infiniment bref et infiniment puissant, notion qu'il est difficile d'exprimer mathématiquement avec précision. Au cours de ces dernières années, on est toutefois parvenu à élaborer une théorie strictement mathématique, par l'introduction de fonctions généralisées (distributions). Cette nouvelle théorie convient parfaitement pour l'étude de problèmes de servomécanismes et substitue à une grande partie de la théorie des transformations de Laplace des notions qui sont physiquement mieux concevables. L'auteur en expose tout d'abord les principes à l'aide des séries temporales, puis en décrit certaines applications.*

1. Der Begriff des linearen Elements

Der Grundbegriff jeder Servotechnik ist das Übertragungsglied (Fig. 1), also eine technische Einrichtung, welche auf eine gegebene Anregung (Eingang, input) eine gewisse Antwort als Ausgang (output) liefert. Sowohl Anregung wie Antwort seien als Funktionen der Zeit t vorausgesetzt. Als Beispiel denke man etwa an einen elektrischen Stromkreis, der auf eine äussere angelegte Spannung $f(t)$ als Anregung eine Stromstärke $g(t)$ als Antwort gibt. Selbstverständlich können auch mechanische oder hydraulische Apparate als Übertragungsglieder verwendet werden.

Wir beschränken uns grundsätzlich auf lineare Übertragungen. Dies heisst, dass das Superpositionsprinzip gelten soll, welches in exakter mathematischer Sprache folgendermassen formuliert werden kann: Wenn das Übertragungsglied auf die Anregung $f_1(t)$ die Antwort $g_1(t)$ erteilt und auf die Anregung $f_2(t)$ die Antwort $g_2(t)$, so soll es auf die Anregung

$$c_1 f_1(t) + c_2 f_2(t)$$

die Antwort

$$c_1 g_1(t) + c_2 g_2(t)$$

erteilen. Dabei sind c_1, c_2 irgendwelche Konstanten. In der ganzen Mathematik und ihren Anwendungen ist die Einteilung der Probleme in lineare und in nichtlineare von fundamentaler Bedeutung; allgemeine und umfassende Theorien existieren heute nur in den linearen Fällen.

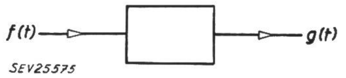

Fig. 1
Übertragungsglied
$f(t)$ Anregung; $g(t)$ Antwort

2. Zeitserien

Eine Funktion $f(t)$ der Zeit t kann mittels gleichförmiger Einteilung der Zeitachse (Schritt h) durch eine Treppenfunktion approximiert werden (Fig. 2). Sind

$$f_0, f_1, ..., f_n, ...$$

die Höhen der einzelnen Stufen, so nennen wir die Zahlenfolge

$$(f_0, f_1, f_2, ... , f_n, ...)$$

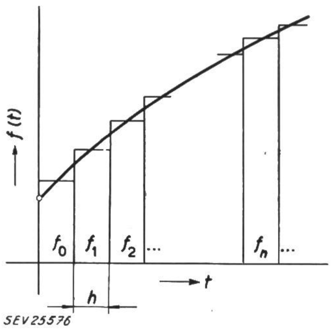

Fig. 2
Zeitserie
f_0, f_1 ... Höhen der Stufen

die zu $f(t)$ gehörige Zeitserie. Von besonderer Wichtigkeit ist die Serie

$$\left(\frac{1}{h}, 0, 0, ... , 0\right)$$

welche also nur aus einer ersten Stufe der Höhe $1/h$ besteht und sonst gleich Null ist (Fig. 3). Dies ist eine an der Stelle $t = h$ unstetige Funktion, welche anschaulich als Stoss bezeichnet werden kann.

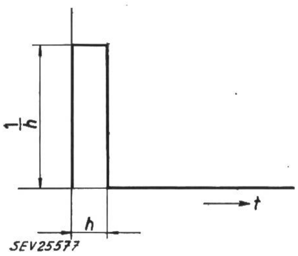

Fig. 3
Dirac-Serie

Wir nennen sie auch Dirac-Serie zu Ehren des Physikers *Dirac*, der zum ersten Mal in der Physik das mathematische Operieren mit Stössen in grösserem Umfang benützt hat. Wir wollen nun ein lineares Übertragungsglied durch diesen Stoss anregen und es möge darauf die Antwort $\varphi(t)$ erteilen, die man Stossantwortfunktion nennen kann und die wir uns ebenfalls (Fig. 4) durch eine Zeitserie

$$(\varphi_0, \varphi_1, ... \varphi_n)$$

approximiert denken. Welche Antwort gibt das Glied dann auf eine beliebige gegebene Anregung $f(t)$? Diese Frage lässt sich leicht rein auf Grund des Superpositionsprinzips beantworten. In der Tat

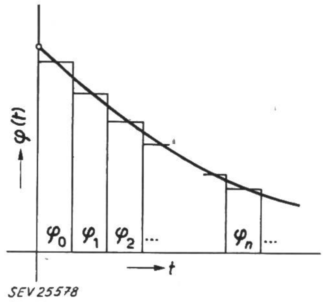

Fig. 4
Zeitserie der Stossantwort
φ_0, φ_1 ... Höhen der Stufen

kann man nach Fig. 2 die Zeitserie aus einzelnen Stössen zusammensetzen, von denen jeder mit dem Zeitverzug h auf den vorhergehenden folgt. Der erste Stoss von der Höhe f_0 liefert als Antwort die Zeitserie

$$hf_0\varphi_0,\ hf_0\varphi_1,\ hf_0\varphi_2,\ ... ,\ hf_0\varphi_n, ...$$

Beim zweiten Stoss von der Höhe f_1 ist zu beachten, dass die Antwort des Gliedes mit der Verzögerung h eintritt; wir erhalten also die Serie

$$0,\ hf_1\varphi_0,\ hf_1\varphi_1,\ ... ,\ hf_1\varphi_{n-1}, ...$$

Im ganzen erhalten wir also folgendes Schema

$$\begin{array}{lllll}
hf_0\varphi_0, & hf_0\varphi_1, & hf_0\varphi_2, & hf_0\varphi_3, ... , & hf_0\varphi_n\ , ... \\
 & hf_1\varphi_0, & hf_1\varphi_1, & hf_1\varphi_2, ... , & hf_1\varphi_{n-1}, ... \\
 & & hf_2\varphi_0, & hf_2\varphi_1, ... , & hf_2\varphi_{n-2}, ... \\
 & & & & ... \\
 & & & & hf_n\varphi_0,\ \ ...
\end{array}$$

Nach dem Superpositionsprinzip ergibt sich die gesuchte Antwort $g(t)$ auf die Anregung $f(t)$ durch Addition aller Zeilen; der n-te Term in der zugehörigen Zeitserie $(g_0, g_1, g_2, ... , g_n, ...)$ ist also gegeben durch die Formel

$$g_n = h\,(f_0\varphi_n + f_1\varphi_{n-1} + f_2\varphi_{n-2} + ... + f_n\varphi_0) \quad (1)$$

Man bezeichnet die Serie $g(t)$ auch als Produkt oder Faltung der beiden Serien $f(t)$ und $\varphi(t)$.

Merken wir uns das *Prinzip von Duhamel:*

Die Antwort eines linearen Übertragungsgliedes ist das Faltungsprodukt aus Anregung und Stossantwortfunktion.

Dieses Prinzip ist charakteristisch für die Linearität.

Beispiel:

$$\begin{array}{rcl}
f(t) & = & (0,\ \ 1,\ \ 2,\ \ 3, ...) \\
\varphi(t) & = & (1,\ 1/2,\ 1/3,\ 1/4, ...) \\
\hline
g(t) & = & (0,\ \ 1,\ 5/2,\ 13/3, ...)
\end{array} \quad (2)$$

Die Multiplikation der Zeitserien gibt also die Möglichkeit, in grob approximativer Weise die Antwort eines linearen Gliedes zu berechnen, wenn dessen Stossantwortfunktion bekannt ist. Dieser Kalkül ist von *A. Tustin* [1] [1]) erfunden und in der Schweiz von *M. Cuénod* [2] weiterentwickelt und in zahlreichen Beispielen angewendet worden. Es ist festzuhalten, dass für diese Faltungsmultiplikation alle Rechenregeln der elementaren Algebra gelten; speziell existiert eine eindeutig ausführbare Division der Zeitserien, auf die wir im Anhang kurz eingehen.

Die Dirac-Serie ($1/h$, 0, 0, 0, ...) spielt bei der Multiplikation die Rolle der Einheit, denn setzt man sie in die Formel (1) für die Serie ($\varphi_0, \varphi_1, \varphi_2, \ldots$) ein, so ergibt sich $g_n = f_n$, d. h. eine Serie bleibt bei Multiplikation mit der Dirac-Serie unverändert.

3. Grenzübergang und Grundsätzliches

Das Rechnen mit Zeitserien wird natürlich umso genauer, je kleiner der Schritt h in der Zeiteinteilung gemacht wird, und man wird den Wunsch haben, zur Grenze $h \rightarrow 0$ überzugehen. Man kann z. B. Gl. (1) deutlicher so schreiben:

$$g(t) = h\,[f(0)\varphi(t) + f(h)\varphi(t-h) + f(2h)\varphi(t-2h) + \ldots \\ \ldots + f(t)\varphi(0)]$$

und in der Grenze $h \rightarrow 0$ ist

$$g(t) = \int_0^t f(\tau)\varphi(t-\tau)\,\mathrm{d}\tau \tag{3}$$

(Faltungsintegral). Ein solcher Grenzübergang ist jedoch mathematisch unzulässig, indem der Begriff des Stosses — der unseren Rechnungen im Wesentlichen zugrunde liegt — sich verflüchtigt. In der Tat wird für $h \rightarrow 0$ aus der Fig. 3 ein «unendlich» schmales aber «unendlich» hohes Rechteck, das den endlichen Flächeninhalt 1 hat; es wird als Dirac-Funktion bezeichnet, obwohl offensichtlich keiner der klassischen Funktionsbegriffe so etwas erlaubt. Die mathematischen Theorien sind — historisch gesehen — den Weg gegangen, dass zu Zeiten von *Heaviside* diese Schwierigkeit zunächst unberücksichtigt geblieben ist und dann durch Einführung der Laplace-Transformation umgangen wurde. Trotz ihrer vielen guten und auch in Zukunft unentbehrlichen Vorteile kann aber die Laplace-Transformation nichts zur Erklärung solcher verallgemeinerter Funktionen beitragen. Da jedes Laplace-Integral uneigentlich ist (d. h. unendliche Integrationsgrenzen hat), werden ausserdem zusätzliche Schwierigkeiten eingeschleppt. Der Ausweg ist offenbar der, dass eben der klassische Funktionsbegriff gehörig erweitert werden muss. Um 1950 führte *L. Schwartz* zum ersten Mal solche allgemeinere Funktionen ein, die er Distributionen nannte. Unsere folgende kurze Einführung in diese neueren Begriffsbildungen der Mathematik stützt sich auf eine Vorlesung von *A. Erdélyi* [3] über die bedeutend einfachere Theorie der Distributionen von *J. Mikusinski*.

4. Distributionen

Im folgenden seien Zeitfunktionen $f(t)$, $g(t)$, ... stets für $t \geqq 0$ definiert und stetig. Das durch die Gl. (3) definierte Faltungsprodukt

$$g(t) = \int_0^t f(\tau)\,\varphi(t-\tau)\,\mathrm{d}\tau \tag{4}$$

zweier beliebiger Zeitfunktionen $f(t)$, $\varphi(t)$ spielt offenbar eine grundlegende Rolle in der Servotechnik und wir werden es kurz mit

$$g = f\varphi \tag{5}$$

bezeichnen. Wir benützen also nicht den zwischen f und φ gestellten Stern als Bezeichnung der Faltung. Um aber Verwechslungen mit dem gewöhnlichen algebraischen Produkt zu vermeiden, müssen wir ein anderes Abkommen treffen. Wir unterscheiden streng zwischen einer Funktion f als Individuum (z. B. einer Kurve in graphischer Darstellung) und ihrem Wert $f(t)$ zur Zeit t (eine Ordinate in graphischer Darstellung). Es ist also $f\varphi$ das Faltungsprodukt, während $f(t)\ \varphi(t)$ das gewöhnliche Produkt der beiden Funktionswerte zur Zeit t ist.

Wie bereits bei den Zeitserien erwähnt, gilt auch hier, dass alle elementaren Rechenregeln auch für das Faltungsprodukt gültig bleiben, also z. B.

$$fg = gf,\ f(g+h) = fg + fh,\ (fg)h = f(gh)$$

Wie bei den Zeitserien kann man auch hier zeigen, dass die Umkehrung der Faltungsmultiplikation, nämlich die Division eindeutig ist, falls der Quotient als stetige Funktion existiert [2]).

Dies ist durchaus nicht immer der Fall, z. B. existiert der Quotient $f{:}f$ nicht als stetige Funktion g. Denn dies würde bedeuten, dass

$$fg = f$$

also

$$f(t) = \int_0^t f(\tau)g(t-\tau)\,\mathrm{d}\tau$$

Für $t = 0$ ergibt dies $f(0) = 0$, was ein Widerspruch ist, sobald $f(t)$ nicht zufällig den Anfangswert 0 hat.

Es gelten auch alle Regeln des Bruchrechnens, wie Erweitern, Kürzen usw. Wir definieren nun: *Eine Distribution ist der Faltungsquotient zweier stetiger Funktionen, falls die Division nicht «aufgeht», also keine stetige Funktion ergibt.* Distributionen sind also Faltungsbrüche.

Diese Erklärung mag im ersten Moment etwas abstrakt erscheinen; sie ist jedoch gar nicht abstrakter, als das, was die Schüler lernen müssen, wenn sie in der 5. Primarklasse zum Bruchrechnen kommen. Der Lehrer erklärt dann folgendes: «Eine rationale Zahl ist der Quotient zweier ganzer Zahlen, falls die Division nicht aufgeht.» Ausserdem versucht er, eine gewisse Vorstellung vom Bruch zu wecken, indem er etwa einen Kuchen in Stücke teilt. Auch wir haben hier eine solche anschauliche Vorstellung. Um $g{:}f$ zu veranschaulichen, approximieren wir $f(t)$ und $g(t)$ durch Zeitserien und bilden nach den Methoden des Anhangs durch Division eine neue Zeitserie. Diese veranschaulicht die Distribution $g{:}f$ umso besser, je kleiner der Schritt h für die Zeiteinteilung gewählt wurde.

[1]) Siehe Literatur am Schluss des Aufsatzes.

[2]) Diese Einschränkung muss bei den Zeitserien nicht gemacht werden. Wie im Anhang ausgeführt, ergibt die Division zweier Serien immer wieder eine Zeitserie.

Zwei Distributionen $f{:}g$ und $h{:}k$ heissen gleich

$$\frac{f}{g} = \frac{h}{k}$$

wenn

$$fk = gh$$

Die Operationen mit Distributionen werden durch die Regeln des Bruchrechnens definiert, nämlich:

Addition

$$\frac{f}{g} + \frac{h}{k} = \frac{fk + gh}{gk}$$

Faltungsmultiplikation

$$\frac{f}{g} \cdot \frac{h}{k} = \frac{fh}{gk}$$

5. Spezielle Distributionen

Ist f eine beliebige Funktion, so ist nach obiger Gleichheitsdefinition die Distribution $f{:}f = I$ unabhängig von der Auswahl von f. Wir bezeichnen sie mit I, weil sie bei der Multiplikation die Rolle der Einheit spielt. In der Tat ist

$$Ig = \frac{f}{f}\,g = \frac{fg}{f} = g$$

(Im letzten Schritt beachte man die Erlaubnis zum Kürzen bei Division stetiger Funktionen.) Was bedeutet die Distribution I anschaulich? Wir haben im Anhang erwähnt, dass die Division einer Serie durch sich selbst immer die Dirac-Serie von Fig. 3 ergibt. Die Distribution I ist also genau das unendlich schmale und unendlich hohe Rechteck, das wir früher als Dirac-Funktion bezeichnet haben. Man wird dies nun besser Dirac-Distribution nennen.

2. Wir bezeichnen die stetige Funktion, welche zu jeder Zeit den konstanten Wert 1 hat mit e. Es ist also

$$e(t) = 1 \tag{6}$$

Aus der grundlegenden Definition in den Gl. (4) und (5) des Faltungsprodukts folgt:

$$ef = fe = \int_0^t f(\tau)\,e(t-\tau)\,\mathrm{d}\tau = \int_0^t f(\tau)\,\mathrm{d}\tau \tag{7}$$

Die Multiplikation mit e bedeutet also (im Sinne des unbestimmten Integrals) *die Integration.*

Die wichtigste spezielle Distribution ist nun wohl

$$p = \frac{I}{e} \tag{8}$$

Sie wird durch Fig. 5 erklärt (vergl. den Schluss des Anhangs). Für eine stetig differenzierbare Funktion $f(t)$ gilt die Grundformel

$$pf = f' + f(0)\,I \tag{9}$$

wobei f' die zeitliche Ableitung von f ist. Wie in der gewöhnlichen Algebra vernachlässigen wir normalerweise den Faktor I beim Schreiben:

$$pf = f' + f(0) \tag{10}$$

Beweis: Aus der elementaren Gleichung zwischen Funktionswerten

$$f(t) = f(0) + \int_0^t f'(\tau)\,\mathrm{d}\tau$$

folgt wegen den Gl. (6) und (7) die Gleichung zwischen Funktionen

$$f = f(0) \cdot e + ef'$$

Die Division durch e ergibt

$$\frac{I}{e} f = f(0) + f'$$

und aus Gl. (8) folgt dann die Behauptung: Die Grundformel besagt, dass die Multiplikation mit p im wesentlichen eine Differentiation bedeutet.

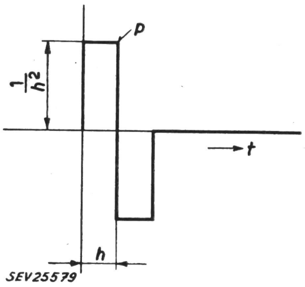

Fig. 5
Die p-Serie
(Differentiation)

3. Für eine Distribution, die keine stetige Funktion ist, existiert der Begriff «Funktionswert» nicht. Es hat also z. B. keinen Sinn, vom Wert der Dirac-Distribution zur Zeit $t = 0$ zu reden. Man kann höchstens anschaulich sagen, dass dort ein unendlich starker Stoss von unendlich kurzer Dauer vorliege.

Das Grundproblem der Distributionstheorie ist es nun, festzustellen, ob eine gegebene Distribution eine stetige Zeitfunktion ist, also Funktionswerte hat. Ausserdem soll dann bejahendenfalls diese Funktion berechnet werden. Zur Erläuterung nehmen wir etwa als Beispiel die Distribution

$$y = \frac{I}{p - a} \tag{11}$$

worin a eine numerische Konstante ist. Durch Beseitigen des Nenners folgt

$$py - ay = I$$

Die Division mit p ergibt wegen Gl. (8)

$$y = a\,(ey) + e$$

Soll nun y eine stetige Funktion sein, so bedeutet dies wegen Gl. (7) folgende Gleichung zwischen Funktionswerten.

$$y(t) = a \int_0^t y(\tau)\,\mathrm{d}\tau + 1$$

Für $t = 0$ folgt daraus zunächst:

$$y(0) = 1 \tag{12}$$

anderseits durch Differentiation

$$y'(t) = ay(t) \tag{13}$$

Die einzige Lösung der Differentialgleichung (13) unter der Anfangsbedingung in Gl. (12) ist aber

$$y = \varepsilon^{at}$$

somit

$$\frac{/}{p - a} = \varepsilon^{at}$$

$$(\varepsilon = 2{,}71828\ldots) \tag{14}$$

Man kann sich leicht überzeugen, dass auf Grund dieses Teilresultats jeder rationale Ausdruck in p als zeitliche Funktion geschrieben werden kann, falls der Grad des Zählers kleiner als derjenige des Nenners ist. Man wende einfach Partialbruchzerlegung an.

Zur Übung bestätige man z. B.

$$\frac{/}{p^2 + a^2} = \frac{1}{a} \sin at \tag{15}$$

Zur Lösung des Grundproblems existierten Tabellen, lange schon bevor die Distributionen erfunden wurden. Wie die Gl. (14) und (15) ahnen lassen, kann man einfach eine Tabelle von inversen Laplace-Transformationen benützen, um den Wert einer gegebenen Distribution zur Zeit t zu berechnen, (falls sie eine Funktion ist) [3]).

6. Übertragungen der Elektrotechnik

Der Stromkreis von Fig. 6 bestehend aus dem Widerstand R und der Selbstinduktion L werde durch eine zeitlich veränderliche Spannung $u(t)$ gespeist. Fasst man $u(t)$ als Anregung und die Stromstärke $i(t)$ als Antwort auf, so entsteht im Sinne der Servotechnik das Übertragungsglied von Fig. 7. Bekanntlich genügt $i(t)$ der Differentialgleichung

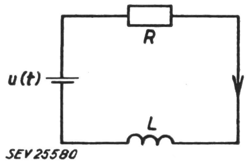

Fig. 6
Einfacher RL-Stromkreis

$$L \frac{di}{dt} + R\, i(t) = u(t)$$

Falls zur Zeit $t = 0$ kein Strom vorhanden ist, können wir dies mit Hilfe der Grundgleichung (10) schreiben:

$$Lpi + Ri = u$$

also

$$i = \frac{u}{R + Lp} = \frac{/}{R + Lp}\, u \tag{16}$$

i ist also das Faltungsprodukt aus der Anregung u und der Distribution $/ : (R + Lp)$. Unter Bezugnahme auf das Duhamelsche Prinzip wird man daher

$$\frac{/}{R + Lp} = \frac{1}{L} \cdot \frac{/}{p + \frac{R}{L}} \tag{17}$$

als Stossantwortfunktion oder besser als Stossantwort-Distribution des gegebenen elektrischen Gliedes bezeichnen (Fig. 7). Im vorliegenden Spezialfall ist wegen Gl. (14) dies tatsächlich eine Funktion, nämlich

$$\frac{1}{L} \varepsilon^{-\frac{R}{L} t}$$

Gl. (16) liefert also das Faltungsintegral

$$i(t) = \frac{1}{L} \int_0^t u(t - \tau)\, \varepsilon^{-\frac{R}{L}\tau}\, d\tau \tag{18}$$

als Lösung des vorgelegten elektrischen Problems.

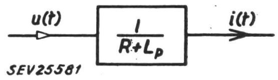

Fig. 7
Ersatzschema für den RL-Stromkreis

In der Elektrotechnik interpretiert man Gl. (16) noch etwas anders. Diese Formel erinnert stark an das Ohmsche Gesetz und man wird daher $R + Lp$ als verallgemeinerten Widerstand (Impedanz) bezeichnen und speziell der Selbstinduktion die Impedanz Lp zuweisen. Definiert man noch die Impedanz einer Kapazität C mit $\frac{/}{Cp}$, so gelten für Wechselstromnetze ausser dem Ohmschen Gesetz auch die Kirchhoffschen Verzweigungsgesetze, genau gleich, wie für Gleichstromnetze.

Beispiel: Gleichstrom-Kompoundmaschine.

Im Blockschema von Fig. 8 ist links der Erregerstromkreis (Impedanz $R_0 + L_0 p$). Der Ausgang i_0 wird durch Multiplikation mit der Konstanten k in eine Spannung u verwandelt, welche über den Belastungs-Stromkreis (Impedanz $R + Lp$) zum Strom i führt. Zu Steuerungszwecken ist eine Rückkopplung eingebaut, welche einen Teil $-\varrho i$ dieses Stromes bei A wieder einspeist. Wenn also i wächst, wird die resultierende Erregung der Maschine herabgesetzt. Wegen

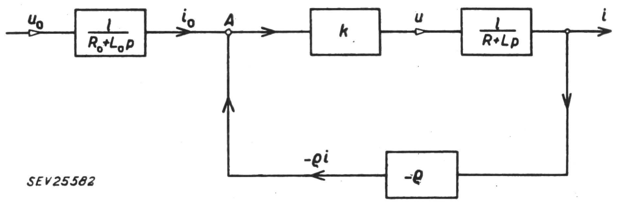

Fig. 8
Ersatzschema einer Gleichstrom-Kompoundmaschine

$$i_0 = \frac{u_0}{R_0 + L_0 p}$$

ist die unmittelbar hinter dem Punkt A vorhandene Stromstärke

$$\frac{u_0}{R_0 + L_0 p} - \varrho i$$

somit

$$u = k \left[\frac{u_0}{R_0 + L_0 p} - \varrho i \right]$$

und

$$i = \frac{k}{R + Lp} \left[\frac{u_0}{R_0 + L_0 p} - \varrho i \right]$$

[3]) Eine ausführliche Tabelle ist enthalten in [4].

Die Auflösung dieser Gleichung nach i liefert

$$i = \frac{k}{(R_0 + L_0 p)(R + \varrho k + Lp)} u_0 \tag{19}$$

Hierin ist der Faktor von u_0 die Übertragungsfunktion φ der ganzen Servosteuerung:

$$\varphi = \frac{k}{(R_0 + L_0 p)(R + \varrho k + Lp)}$$

Führt man zur Abkürzung ein:

$$a = \frac{R_0}{L_0} \quad , \quad b = \frac{R + \varrho k}{L}$$

so ergibt ein Laplace-Lexikon

$$\varphi(t) = \frac{k}{L_0 L} \cdot \frac{\varepsilon^{-bt} - \varepsilon^{-at}}{a - b} \tag{20}$$

Das ist also die Antwort der ganzen Schaltung auf einen Dirac-Stoss. Da diese mit der Zeit abklingt, ist die Steuerung unter allen Umständen stabil.

Ist z. B. die Erregungsspannung $u_0(t)$ konstant $= U$, so folgt nach dem Duhamelschen Prinzip oder direkt aus Gl. (19):

$$i(t) = U \int_0^t \varphi(\tau)\, \mathrm{d}\tau$$

Durch Auswertung dieses Integrals findet man

$$i(t) = \frac{kU}{L_0 L} \left[\frac{1}{ab} - \frac{\frac{1}{b}\varepsilon^{-bt} - \frac{1}{a}\varepsilon^{-at}}{a - b} \right]$$

Nach langer Zeit stellt sich also die Stromstärke ein auf:

$$i(t) \approx \frac{kU}{L_0 L} \cdot \frac{1}{ab} = \frac{kU}{R_0 (R + \varrho k)} \tag{21}$$

Man kann zum Schluss mit Genugtuung feststellen, dass diese Theorie genau auf dieselben Rechnungen führt, wie sie der Ingenieur seit Heavisides Zeiten gewohnt ist. Der Unterschied liegt nur in der Begründung, die nun — genau wie die Laplace-Transformation — mathematisch einwandfrei ist, sich aber doch mehr auf physikalische Anschauungen stützt.

Anhang

Operieren mit Zeitserien mit Hilfe einer erzeugenden Funktion

Es ist bequem, einer Zeitserie $f(t) = (f_0, f_1, f_2, \dots, f_n, \dots)$ in rein formaler Weise eine Potenzreihe in einer Variabeln x zuzuordnen:

$$f_0 + f_1 x + f_2 x^2 + \dots + f_n x^n + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} f_n x^n$$

welche man erzeugende Funktion der Serie nennt. Ist

$$\varphi(t) = (\varphi_0, \varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n, \dots)$$

eine zweite Serie und

$$\varphi_0 + \varphi_1 x + \varphi_2 x^2 + \dots + \varphi_n x^n + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} \varphi_n x^n$$

ihre erzeugende Funktion, so liefert die gewöhnliche Ausmultiplikation der beiden Reihen die neue Reihe:

$$(f_0\varphi_0) + (f_0\varphi_1 + f_1\varphi_0)x + (f_0\varphi_2 + f_1\varphi_1 + f_2\varphi_0)x^2 + \dots$$

Hierin ist nach Gl. (1) der Koeffizient von x^n (abgesehen vom Faktor h) der n-te Term im Faltungsprodukt der beiden Serien. Mit anderen Worten:

Die erzeugende Funktion des Faltungsprodukts zweier Serien ist das gewöhnliche Produkt der erzeugenden Funktionen der einzelnen Serien (multipliziert mit h). Um also den Faltungsquotient der Serien $f(t)$ und $\varphi(t)$ zu bilden, muss man einfach die zugehörigen erzeugenden Funktionen ausdividieren nach den Regeln des Rechnens mit Potenzreihen.

Beispiel:
$$f(t) = (1, 7, 21, 35, \dots)$$
$$\varphi(t) = (1, 4, 6, 4, \dots)$$

$$\begin{array}{l}
(1 + 7x + 21x^2 + 35x^3 + \dots) : \\
:(1 + 4x + 6x^2 + 4x^3 + \dots) = 1 + 3x + 3x^2 + x^3 + \dots \\
\underline{1 + 4x + 6x^2 + 4x^3} \\
\quad 3x + 15x^2 + 31x^3 \\
\quad \underline{3x + 12x^2 + 18x^3} \\
\qquad 3x^2 + 13x^3 \\
\qquad \underline{3x^2 + 12x^3} \\
\qquad\qquad x^3
\end{array}$$

$$\frac{f}{\varphi} = \left(\frac{1}{h}, \frac{3}{h}, \frac{3}{h}, \frac{1}{h}, \dots\right)$$

Übungen

a) Zeige, dass bei Division einer Serie durch sich selbst immer die Dirac-Serie entsteht:

$$(f_0, f_1, \dots, f_n, \dots) : (f_0, f_1, \dots, f_n, \dots) = \left(\frac{1}{h}, 0, 0, \dots\right)$$

b) Zur Funktion e der Formel (6) gehört natürlich die Serie $(1, 1, \dots, 1, \dots)$. Man verifiziere, dass bei Division der Dirac-Serie durch diese e-Serie das Resultat die Serie von Fig. 5 ist, welche also die Distribution p approximiert:

$$\left(\frac{1}{h}, 0, 0, \dots\right) : (1, 1, 1, \dots) = \left(\frac{1}{h^2}, -\frac{1}{h^2}, 0, 0, 0, \dots\right)$$

Literatur

[1] *Tustin, A.:* A Method of Analysing the Behaviour of Linear Systems in Terms of Time Series. Proc. IEE Bd. 94(1947), Part IIA, Nr. 1, S. 130...142.

[2] *Cuénod, M.:* Contribution à l'étude de phénomènes transitoires à l'aide de suites de temps. Bull. techn. Suisse rom. Bd. 75(1949), Nr. 16, S. 201...209.
Cuénod, M.: Méthode de calcul à l'aide des suites. Lausanne: Impr. La Concorde 1955.

[3] *Erdély, A.:* Operational Calculus. (Ausarbeitung zu beziehen beim California Institute of Technology, Math. Department.)

[4] *Batement Project:* Tables of Integral Transforms. Bd. 1. New York: McGraw-Hill: 1954.

Adresse des Autors:

Prof. Dr. E. *Stiefel*, Vorstand des Institutes für angewandte Mathematik der ETH, Drusbergstrasse 15, Zürich 7/53.