

Lehrgang der Geometrie für höhere Volksschulen und Schullehrer-Seminarien [Fortsetzung]

Autor(en): [s.n.]

Objektyp: **Article**

Zeitschrift: **Allgemeine schweizerische Schulblätter**

Band (Jahr): **7 (1841)**

Heft 3-4

PDF erstellt am: **21.07.2024**

Persistenter Link: <https://doi.org/10.5169/seals-865828>

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern. Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

Haftungsausschluss

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

aufgelöst 576. Was ich hinzugethan habe, muß ich natürlich wieder wegnehmen, wenn ich die Wurzel einer quadrirten zweitheiligen Zahl finden will: daher $a^2 + 2ab + b^2$ und ebenso leicht ergibt sich die Wahrheit des $a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$.

Noch ein Wort über die Menge Methoden, die in diesem Fache angewendet werden; wir glauben, daß die eine besser, die andere weniger gut ist, daß die eine leichter, die andere mit mehr Mühe zum Ziele führt. Aber man hüte sich ja 1. vor Pedanterie und Aengstlichkeit, 2. vor Verwirrung, indem man zu viel geben will. Viele Wege führen zum Ziel, aber der Wechselsprung vom einen zum andern fördert nicht. Und die praktische Richtung nur immer im Auge behalten.

Gerade in dieser Beziehung wird die Formenlehre als Uebungsstoff sehr wichtig. (Schluß folgt.)

Lehrgang der Geometrie für höhere Volksschulen und Schullehrer-Seminarien (Fortsetzung).

Dritter Abschnitt.

§. 35.

Ähnlichkeit der Figuren.

I. Es sei fig. 100 die Seite DE des Df. DEF in 3 gleiche Theile $DI = IG = GE$ getheilt; aus den Theilpunkten G und I gehen nach der Seite EF mit DF # die Geraden GH und IK: wie verhalten sich nun die Theile EH, HK, KF? Man ziehe GL und IM # EF. Die Dfe. DIM, GIL und EGH haben nun $DI = IG = GE$, dann W. D = W. m = W. n, und W. u = W. x = W. E (No. 4, a), sind also einerlei, mithin ist $IM = GL = EH$. Es ist aber $IM = KF$, und $GL = HK$ (No. 17, b), folglich ist auch $KF = HK = EH$.

U n m. Dies findet auch Statt, wenn man DE in mehr als 3 gleiche Theile theilt. Man erhält an diesen gleichen Theilen eben so viel einerlei Dfe., in denen alle mit EH gleichlaufenden Seiten (die Hilfslinien) gleich sind. Jede Hilfslinie liegt aber in einem

Parallelogramm und ist einem Theile von EF gleich; daher sind auch alle diese Theile von EF dem Theil EH und somit unter sich gleich.

II. Es sei umgekehrt $DI = IG = GE$, und $FK = KH = HE$; man ziehe GH und IK. Da nun die Theile von DE gleich sind, so kann die Gleichheit der Theile von EF nur eine Folge davon sein, daß GH und IK mit DF gleichlaufend sind.

III. Es sei fig. 101 die Seite AB des Df. ABC in eine beliebige Anzahl, z. B. in 100 gleiche Theile getheilt; man denke aus den Theilpunkten g. l. # zu CB nach AC gezogen, so theilen sie auch AC in 100 unter sich gleiche Theile. Eine solche Parallele sei DE; AD enthalte 40 und DB also 60 Theile, so muß auch AE in 40 und CE in 60 gleiche Theile zerlegt sein. Also hat man

$$AB : AD = 100 : 40 \text{ und } AC : AE = 100 : 40$$

$$AB : DB = 100 : 60 \text{ und } AC : EC = 100 : 60$$

$$AD : DB = 40 : 60 \text{ und } AE : EC = 40 : 60$$

folglich ist

$$AB : AD = AC : AE$$

$$AB : DB = AC : EC$$

$$AD : DB = AE : EC$$

Unm. Vertauscht man die innern Glieder dieser 3 Gleichungen, so erhält man $AB : AC = AD : AE = DB : EC$.

IV. Alle diese Gleichungen sind durch die Parallelität von DE zu BC bedingt und finden zugleich Statt. Ist eine derselben gegeben, so kann sie nur eine Folge davon sein, daß $DE \parallel BC$ ist.

V. Die Gerade DE schneidet von ABC das Df. ADE ab. In diesen Dfen. ist $AB : AD = AC : AE$, und $\mathfrak{W}. A = \mathfrak{W}. A$, $B = m$, $C = n$. Wie verhalten sich nun auch die Seiten BC und DE? — Man ziehe $DF \parallel AC$; dann ist $AB : AD = BC : FC$; weil aber $FC = DE$ (No. 17, b), so ist auch $AB : AD = BC : DE$. Da jedoch $AB : AD = AC : AE$, so ist auch $AC : AE = BC : DE$ also

$$AB : AD = AC : AE = BC : DE.$$

Die Dfe ABC und ADE haben somit alle Seitenpaare, welche den gleichen $\mathfrak{W}.$ entsprechen, proportional oder verhältnißmäßig (= groß). Gleichheit der

W. und Verhältnißmäßigkeit oder Proportionalität der ihnen entsprechenden Seiten begreift man unter dem Namen Ähnlichkeit, und zwar sowohl bei den Dfn., als auch bei den übrigen Figuren von gleicher Seitenzahl. — S. f.

- 31) a. Wenn man eine Dreiecksseite in eine Anzahl gleicher Theile theilt und aus den Theilpunkten auf die 2te Seite g. L. # mit der 3ten Seite zieht; so wird auch die 2te Seite in eben so viele unter sich gleiche Theile getheilt.
- b. Wenn zwei Dfsseiten in gleich viele je unter sich gleiche Theile getheilt und die gleichvielsten Theilpunkte durch g. L. verbunden werden; so sind Letztere unter sich und mit der 3ten Seite #.
- c. Wenn eine Gerade 2 Dfsseiten durchdringt und zur 3ten Seite # ist; so sind jene beiden Seiten mit ihren an einander liegenden Abschnitten, so wie mit ihren Abschnitten an der 3ten Seite, und jene Abschnitte mit diesen proportional.
- d. Wenn eine Gerade 2 Dfsseiten so theilt, daß Letztere mit ihren entsprechenden Abschnitten proportional sind; so ist sie # zur 3ten Seite.
- e. Wenn eine Gerade 2 Dfsseiten durchdringt und zur 3ten Seite # ist; so schneidet sie ein kleineres Df. ab, das dem größeren ähnlich ist.

U n m. Die Ähnlichkeit bezeichnet man durch das Zeichen \sim .

§. 36.

I. In den Dfen. ABC und abc fig. 101 und 102 sei $AB : ab = AC : ac = BC : bc$; sind dann auch die W. gleich, also die Dfe. ähnlich? — Im größern Df. ABC mache man $AD = ab$ und ziehe $DE \# BC$; dann ist Df. ADE \sim Df. ABC (No. 31, e), also $AB : AD = AC : AE = BC : DE$. Diese und die angenommene Proportion haben das erste Verhältniß gleich, folglich sind auch ihre übrigen Verhältnisse gleich, nämlich $AC : AE = AC : ac$ und $BC : DA = BC : bc$, und somit $AE = ac$

und $DE = bc$. Die Df. ADE und abc sind nun einerlei (No. 9, a), folglich ist auch Df. abc \sim Df. ABC.

II. In den nämlichen Dfen sei $AB : ab = AC : ac$, und $\mathbb{W}. A = \mathbb{W}. a$. — Man mache $AD = ab$, $AE = ac$, und ziehe CE; dann ist auch $AB : AD = AC : AE$, mithin $DE \# BC$, und daher Df. ADE \sim Df. ABC (No. 31 d und e). Die Dfe. ADE und abc sind aber einerlei (No. 9, b), also ist auch Df. abc \sim Df. ABC.

III. Es sei nun $\mathbb{W}. A = \mathbb{W}. a$, $\mathbb{W}. B = \mathbb{W}. b$, $\mathbb{W}. C = \mathbb{W}. c$. — Man mache $AD = ab$, und ziehe DE $\# BC$; dann ist Df. ADE \sim Df. ABD. Weil aber $AD = ab$, $\mathbb{W}. A = \mathbb{W}. a$, $\mathbb{W}. m = \mathbb{W}. B = \mathbb{W}. b$, so sind die Dfe. ADE und abc einerlei, daher ist auch Df. abc \sim Df. ABC.

IV. In den bei B und b rechtwinkligen Dfen GHL und ghl fig. 103 und 104 sei $GL : gl = GH : gh$. — Man mache $GM = gh$, $GN = gl$, und ziehe MN. Dann ist $GL : GN = GH : CM$, mithin $MN \# HL$, und daher Df. GMN \sim Df. GHL. Die Dfe. GMN und ghl sind aber einerlei (No. 9, d), folglich ist auch Df. ghl \sim Df. GHL.

V. Da alle gleichseitigen Dfe. \mathbb{W} . von beständiger Größe, also gleiche \mathbb{W} . haben, so sind sie ähnlich.

Da alle gleichschenkelig-rechtwinkligen Dfe unveränderliche, somit wechselweise gleiche \mathbb{W} . haben, so sind auch sie ähnlich.

VI. Zieht man fig. 101 und 102 in den ähnlichen Dfen ABC und abc noch die Senkrechten AH und ah, so sind die Dfe ABH und abh wegen der Gleichheit der \mathbb{W} . ähnlich, eben so die Dfe ACH und ach, mithin ist $AH : ah = AB : ab = BH : bh$, und $AH : ah = AC : ac = CH : ch$. Es ist aber $AB : ab = BC : bc$, folglich auch $AH : ah = BC : bc$.

- 32) a. Dreiecke sind ähnlich, wenn ihre drei Seiten wechselweise proportional sind;
 b. wenn sie 2 Seitenpaare proportional und den eingeschlossenen \mathbb{W} . gleich haben.
 c. wenn sie alle 3 \mathbb{W} . wechselweise gleich haben.

- d. Rechtwinkliche Dke sind ähnlich, wenn sie die Hypotenusen und ein Paar der Katheten proportional haben.
- e. Alle gleichseitigen Dke sind ähnlich, eben so alle gleichschenkligen rechtwinkligen Dke.
- f) In ähnlichen Dkn sind die Höhen (aus gleichen W.), und die entsprechenden Seiten, so wie auch die entsprechenden Abschnitte der Grundlinien unter sich proportional.

VII. Die Fünfecke DEFGH und defgh fig. 105 und 106 seien durch Gehren aus D und d in Dke zerlegt, und es seien die Dke DEF und def, dann DFG und dfg, ferner DGH und dgh ähnlich; — so ist

$$\begin{aligned} DE : de &= EF : ef = DF : df \\ DF : df &= FG : fg = DG : dg \\ DG : dg &= GH : gh = DH : dh \end{aligned}$$

folglich $DE : de = EF : ef = FG : fg = GH : gh = DH : dh$.

Ferner ist W. E = W. e, und W. H = W. h; und da auch die übrigen entsprechenden W. der ähnlichen Dke gleich sind, so sind auch die aus ihnen bestehenden W. beider Fünfecke gleich, nämlich W. D = W. d, W. F = W. f, W. G = W. g. Da nun beide Vielecke alle entsprechenden Seiten proportional und alle entsprechenden W. wechselweise gleich haben, so sind sie ähnlich.

Anm. Der Beweis gilt ebenso für alle übrigen Vcke. von gleich vielen Seiten. Das 3te Verhältniß jeder Gleichung ist wieder das erste der folgenden Gleichung; daher bleibt die Schlussfolge stets die nämliche.

VIII. Es seien nun umgekehrt die beiden Vcke ähnlich. — Man ziehe aus D und d die Gehren. Die Aehnlichkeit beider Vcke kann nur eine Folge davon sein, daß sie aus ähnlichen Dken (wie oben) bestehen; folglich müssen die entsprechenden Dke, in welche die Gehren aus D und d beide Vcke zerlegen, ähnlich sein.

1. Anm. Dies läßt sich auch direkt beweisen. Wegen der Aehnlichkeit beider Figuren sind die entsprechenden Seitenpaare proportional und die entsprechenden W. gleich. — Da nun $DE : de =$

$EF : ef$, und $\mathbb{W}. E = \mathbb{W}. e$ ist, so ist $\mathcal{D}k. DEF \sim \mathcal{D}k. def$, also $DE : de = DF : df$, daher auch $DF : df = FG : fg$; auch ist $\mathbb{W}. DFE = \mathbb{W}. dfe$, mithin $\mathbb{W}. F = \mathbb{W}. f - \mathbb{W}. def$, oder $\mathbb{W}. DFG = \mathbb{W}. dfg$, demnach $\mathcal{D}k. DFG \sim \mathcal{D}k. dfg$ (No. 32, b), u. s. w.

2. Anm. Aus Obigem (VII und VIII) ergibt sich zugleich, daß die Seiten auch mit den entsprechenden Höhen proportional sind.

IX. Da alle Seiten und $\mathbb{W}.$ eines ordentlichen $\mathcal{V}lks.$ unter sich gleich sind, so ergeben sich in ordentlichen $\mathcal{V}lken$ von gleich vielen Seiten alle Seiten als proportional und alle $\mathbb{W}.$ als gleich, diese Figuren sind somit ähnlich. Es sind also auch alle Kreise ähnlich.

X. Es seien die $\mathcal{V}lke$ fig. 105 und 106 ähnlich; also ist

$DE : de = EF : ef = FG : fg = GH : gh = HD : hd$
und $(DE + EF + FG + GH + HD) : (de + ef + fg + gh + hd) = DE : de$ u. s. w.

oder Umfang $DEFGH : \text{Umfang } defgh = DE : de$.

XI. Ordentliche $\mathcal{V}lke.$ von gleicher Seitenzahl werden durch die Winkelhalbmesser in $\mathcal{D}ke.$ zerlegt, die wegen der Gleichheit ihrer $\mathbb{W}.$ ähnlich sind; deshalb stehen ihre Seiten mit diesen Winkelhalbmessern und dann (nach No. 32, f), auch mit den Seitenhalbmessern in gleichem Verhältniß, eben so auch mit den gleichnamigen Durchmesser, weil diese aus 2 Halbmessern bestehen. In dem gleichen Verhältniß stehen (nach X.) auch die Umfänge. S. f.

- 33) a. Wenn gleichnamige $\mathcal{V}lke.$ aus ähnlichen $\mathcal{D}ken.$ bestehen, die in gleicher Ordnung auf einander folgen, so sind sie ähnlich.
- b. Wenn ähnliche $\mathcal{V}lke.$ durch entsprechende Höhen in $\mathcal{D}ke.$ zerlegt werden, so sind die entsprechenden $\mathcal{D}ke.$ ähnlich.
- c. Gleichnamige ordentliche $\mathcal{V}lke.$, so wie die Kreise, sind unter sich ähnlich.
- d. Die Umfänge ähnlicher $\mathcal{V}lke.$ verhalten sich wie ihre entsprechenden Seiten.

- e. Die Umfänge gleichnamiger ordentlicher Bke. verhalten sich, wie ihre Seiten und wie ihre gleichnamigen Halb- oder Durchmesser.

§. 37.

Die Kreise als ordentliche Bke. verhalten sich ebenfalls wie ihre Halb- oder Durchmesser; es finden hier aber noch andere Verhältnisse Statt.

I. Es sei fig. 107 z. B. $\mathbb{W}. M = 40^\circ$, $\mathbb{W}. N = 120^\circ$, $\mathbb{W}. O = 70^\circ$, $\mathbb{W}. Q = 130^\circ$. Denkt man sich alle Halbmesser gezogen, welche jene \mathbb{W} . in die angegebene Anzahl von Graden zerlegen; so werden auch die Bogen AB, BC, CD, DA in eben so viele gleiche Theile getheilt (No. 22, d), daher ist

$$\text{Bog. AB} : \text{Bog. BC} = 40 : 120 = 40^\circ : 120^\circ = \mathbb{W}. M : \mathbb{W}. N$$

$$\text{Bog. AB} : \text{Bog. CD} = 40 : 70 = 40^\circ : 70^\circ = \mathbb{W}. M : \mathbb{W}. O$$

$$\text{Bog. AB} : \text{Bog. DA} = 40 : 130 = 40^\circ : 130^\circ = \mathbb{W}. M : \mathbb{W}. Q$$

$$\text{oder Bog. AB} : \text{Bog. BC} = \mathbb{W}. M : \mathbb{W}. N$$

$$\text{Bog. AB} : \text{Bog. CD} = \mathbb{W}. M : \mathbb{W}. O$$

$$\text{Bog. AB} : \text{Bog. DA} = \mathbb{W}. M : \mathbb{W}. Q$$

$$\text{oder Bog. AB} : \text{Bog. BC} : \text{Bog. CD} : \text{Bog. DA} = \mathbb{W}. M : \mathbb{W}. N : \mathbb{W}. O : \mathbb{W}. Q.$$

U n m. Die Zahlen in dem 2ten Verhältniß der 3 ersten Proportionen bedeuten, wie sich von selbst versteht, die Bogentheile, in welche die gedachten Halbmesser die ganzen Bogen zerlegen. — Zugleich ist klar, daß solche Verhältnisse auch bei jeder andern Annahme für die Größe der \mathbb{W} . bestehen.

II. In fig. 108 ist ebenso

$$\text{Bog. ab} : \text{Bog. bc} = \mathbb{W}. m : \mathbb{W}. n$$

$$\text{Bog. ab} : \text{Bog. cd} = \mathbb{W}. m : \mathbb{W}. o$$

$$\text{Bog. ab} : \text{Bog. da} = \mathbb{W}. m : \mathbb{W}. q$$

Ist nun $M = m$, $N = n$, $O = o$, $Q = q$, so sind auch diese und die obigen Verhältnisse der \mathbb{W} . gleich, mithin sind auch die Verhältnisse der Bogen gleich; daher

$$\text{Bog. AB} : \text{Bog. BC} = \text{Bog. ab} : \text{Bog. bc}$$

$$\text{Bog. AB} : \text{Bog. CD} = \text{Bog. ab} : \text{Bog. cd}$$

$$\text{Bog. AB} : \text{Bog. DA} = \text{Bog. ab} : \text{Bog. da}$$

$$\begin{aligned} \text{oder Bog. } AB : \text{Bog. } ab &= \text{Bog. } BC : \text{Bog. } bc \\ &= \text{Bog. } CD : \text{Bog. } cd \\ &= \text{Bog. } DA : \text{Bog. } da \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{folglich } (\text{Bog. } AB + \text{Bog. } BC + \text{Bog. } CD + \text{Bog. } DA) : \\ (\text{Bog. } ab + \text{Bog. } bc + \text{Bog. } cd + \text{Bog. } da) &= \text{Bog. } \\ AB : \text{Bog. } ab &= \text{Bog. } BC : bc \text{ u. s. w.} \end{aligned}$$

Bezeichnet man durch P und p die größere und kleinere Kreislinie, durch R und r ihre Halbmesser, durch D und d ihre Durchmesser, und bemerkt zugleich, daß die Kreislinien sich wie ihre Halb- oder Durchmesser verhalten, so folgt:

$$\begin{aligned} P : p &= \text{Bog. } AB : \text{Bog. } ab = \text{Bog. } BC : bc \text{ u. s. w.} \\ &= R : r = D : d. \end{aligned}$$

Zieht man nun noch die Sehnen AB und ab , so sind die Dfe. ABO und abo ähnlich (No. 32, b), also ist $AB : ab = AO : ao = R : r$. Durch die Halbmesser sind aber diese Sehnen auch noch mit den Durchmessern, Kreislinien und den entsprechenden Bogen verhältnißmäßig. S. f.

- 34) a. Bogen eines Kreises verhalten sich, wie ihre zugehörigen Mittelpunktswinkel.
b. Kreislinien, ihre Halb- und Durchmesser, Bogen derselben von gleichen Mittelpunktswinkeln und eben solche Sehnen sind proportional.

§. 38.

I. Das Df. ABC fig. 109 sei bei B rechtwinklig und die Gerade BD senkrecht zur Hypotenuse AC . Dann haben die Dfe. ABC und ABD \mathfrak{W} . $A = \mathfrak{W}$. A , \mathfrak{W} . $B = \mathfrak{W}$. u , also \mathfrak{W} . $C = \mathfrak{W}$. m , sind somit ähnlich. Eben so sind die Dfe. ABC und BCD , also auch die Dfe. ABD und BCD ähnlich. — Nun ist

$$\begin{aligned} \text{in den beiden ersten Dfen.} & \quad \text{in den beiden andern Dfen.} \\ AC : AB &= AB : AD & AC : BC &= BC : DC \\ \text{also } AC \cdot AD &= AB \cdot AB = AB^2 & \text{also } AC \cdot DC &= BC \cdot BC \\ & & &= BC^2 \end{aligned}$$

II. Ferner ist in den Dfen. ABD und BCD
 $AD : BD = BD : DC$, also $AD \cdot DC = BD \cdot BD = BD^2$

III. Zählt man die beiden letzten Gleichungen unter I. zusammen, so erhält man

$$AB^2 + BC^2 = AC \cdot AD + AC \cdot DC = AC \cdot (AD + DC) = AC \cdot AC = AC^2. \quad \text{H. f.}$$

35) a. Wenn eine Senkrechte aus dem rechten W. auf die Hypotenuse geht, so ist jede Kathete die mittlere Proportionale zwischen der Hypotenuse und ihrem an jener liegenden Abschnitt; oder das Quadrat einer Kathete ist gleich dem Produkte aus der Hypotenuse in ihrem an jener liegenden Abschnitt.

b. Die Senkrechte ist die mittlere Proportionale zwischen den Abschnitten der Hypotenuse; oder das Quadrat der Senkrechten ist gleich dem Produkte aus den beiden Abschnitten der Hypotenuse.

c. Das Quadrat der Hypotenuse ist gleich der Summe beider Quadrate der Katheten. — Hieraus folgt weiter:

$$\begin{aligned} \text{d.} \quad AC &= \sqrt{AB^2 + BC^2}; \\ AB &= \sqrt{AC^2 - BC^2}; \\ BC &= \sqrt{AC^2 - AB^2}. \end{aligned}$$

U n m. Die eben genannten Produkte erscheinen hier nur in ihrem Zahlenwerthe, lassen sich aber nach No. 40 auch als Flächen — Quadrate und Rechtecke — erklären.

IV. An der Grundlinie AC des Dfs. ABC fig. 110 liegen spitze W.; fällt man die Höhe BD, und setzt $AB = c$, $AC = b$, $BC = a$, $BD = h$, $AD = u$, $DC = x$, so ist $c^2 = u^2 + h^2$

$$\text{aber } u^2 = (b - x)^2 = b^2 - 2 \cdot bx + x^2$$

$$h^2 = a^2 - x^2$$

$$\begin{aligned} \text{also } u^2 + h^2 &= b^2 - 2bx + x^2 + a^2 - x^2 \\ &= b^2 - 2bx + a^2 \end{aligned}$$

$$\text{folglich } c^2 = a^2 + b^2 - 2bx$$

V. Aus dieser letzten Gleichung erhält man ferner

$$2bx = a^2 + b^2 - c^2$$

$$x = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2b}$$

U n m. Diese beiden Endgleichungen (unter IV und V) sind für jede Seite, die einem spitzen W. gegenüber liegt, und für jeden Abschnitt der Grundlinie an einem spitzen W. ganz allgemein gültig. Der Schüler suche für a und u die entsprechenden Gleichungen.

VI. Liegt AB fig. 111 einem stumpfen W. gegenüber, fällt man die Höhe BD auf die verlängerte Grundlinie und setzt ebenfalls $AB = c$, $AC = b$, $BC = a$, $BD = h$, $AD = u$, $CD = x$, so ist

$$c^2 = u^2 + h^2$$

$$u^2 = (b + x)^2 = b^2 + 2 \cdot bx + x^2$$

$$h^2 = a^2 - x^2$$

also $u^2 + h^2 = b^2 + 2bx + x^2 + a^2 - x^2 = b^2 + 2bx + a^2$
folglich $c^2 = a^2 + b^2 + 2 \cdot bx$

VII. Aus dieser Gleichung findet man weiter:

$$2bx = c^2 - a^2 - b^2$$

$$x = \frac{c^2 - a^2 - b^2}{2b}$$

VIII. In fig. 110 findet man nun für BD

$$h^2 = a^2 - x^2$$

und setzt man hierin für x seinen Werth (aus V), so ist

$$\begin{aligned} h^2 &= a^2 - \left(\frac{a^2 + b^2 - c^2}{2b} \right)^2 \\ &= \left(a + \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2b} \right) \times \left(a - \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2b} \right) \\ &= \frac{2ab + a^2 + b^2 - c^2}{2b} \times \frac{2ab - a^2 - b^2 + c^2}{2b} \\ &= \frac{a^2 + 2ab + b^2 - c^2}{2b} \times \frac{c^2 - (a^2 - 2ab + b^2)}{2b} \\ &= \frac{(a + b)^2 - c^2}{2b} \times \frac{c^2 - (a - b)^2}{2b} \\ &= \frac{(a + b + c)(a + b - c)(a + c - b)(b + c - a)}{4 \cdot b^2} \end{aligned}$$

also

$$h = \frac{\sqrt{(a + b + c)(a + b - c)(a + c - b)(b + c - a)}}{2b}$$

U n m. Die nämliche Formel für h ergibt sich, wenn man fig. 110 h mit Hilfe von c und u, oder fig. 111 mit Hilfe von c und u

bestimmt. Der Schüler mag obige Formel auch auf diesem Wege auffuchen. —

IX. Im gleichseitigen Df. ist $a = b = c$, also wird

$$h = \frac{\sqrt{3 a \cdot a \cdot a \cdot a}}{2 a} = \frac{a \cdot a \times \sqrt{3}}{2 a} = \frac{1}{2} \times a \cdot \sqrt{3} .$$

X. Aus dieser letzten Gleichung erhält man ferner

$$a \cdot \sqrt{3} = 2 h$$

$$a = \frac{2 h}{\sqrt{3}} = \frac{2 h \cdot \sqrt{3}}{\sqrt{3} \times \sqrt{3}} = \frac{2}{3} \times h \cdot \sqrt{3}$$

Wir stellen nun obige Gleichungen zusammen :

$$36) \left. \begin{array}{l} a. \ c^2 = a^2 + b^2 - 2 bx \\ b. \ x = \frac{a + b^2 - c^2}{2 b} \end{array} \right\} \begin{array}{l} \text{wenn } c \text{ einem spitzen} \\ \text{W. gegenüberliegt.} \end{array}$$

$$\left. \begin{array}{l} c. \ c^2 = a^2 + b^2 + 2 bx \\ d. \ x = \frac{c^2 - a^2 - b^2}{2 b} \end{array} \right\} \begin{array}{l} \text{wenn } c \text{ einem stumpfen} \\ \text{W. gegenüberliegt.} \end{array}$$

$$e. \ h = \frac{\sqrt{(a+b+c)(a+b-c)(a-b+c)(-b+c-a)}}{2 b}$$

$$\left. \begin{array}{l} f. \ h = \frac{1}{2} \times a \cdot \sqrt{3} = \frac{1}{2} \times a \cdot 1,7320508 \dots \\ g. \ a = \frac{2}{3} \cdot h \cdot \sqrt{3} = \frac{2}{3} \times h \cdot 1,7320508 \dots \end{array} \right\} \begin{array}{l} \text{im gleich-} \\ \text{seitigen} \\ \text{Dreieck.} \end{array}$$

Uebungsaufgaben.

1. In fig. 110 sei $a = 36'$, $b = 45'$, $x = 21'$; was beträgt c ?
2. Es sei $a = 42'$, $b = 48'$, $c = 32'$; was beträgt x und h ?
3. In fig. 110 sei $a = 56^0$, $b = 83^0$, $c = 48^0$; was ist h ?
4. In fig. 111 sei $b = 30'$, $a = 54'$, $x = 28'$; man sucht c .
5. Oder es sei $c = 60'$, $b = 45'$, $a = 32'$; man sucht x und h .
6. Oder $b = 16^0 4'$, $a = 18^0 2'$, $x = 7^0 6'$; man sucht c .
7. Oder es sei $c = 20^0 9'$, $b = 13^0 7'$, $a = 14^0 5'$; man sucht x und h .

§. 39.

I. Im Kreise fig. 112 durchschneiden sich die Sehnen AB und CD . — Man ziehe AD und BC ; dann sind die Dfe. ADE und BCE ähnlich (No. 32, c), also $AE : CE = DE : BE$, und somit $AE \cdot BE = CE \cdot DE$.

II. Ist fig. 113 die eine Sehne CD ein Durchmesser und die andere AB zu ihm senkrecht, so ist ebenfalls $AE \cdot BE = CE \cdot DE$; weil aber (No. 23 a) $AB = AE$, so wird $AE^2 = CE \cdot DE$.

Anm. Dies ergibt sich aus No. 35, b. Ist nämlich AE senkrecht zum Durchmesser CD , und zieht man die Hilfslinien AC und AD , so ist der $\angle CAD = 90^\circ$, also $AE^2 = CE \cdot DE$.

III. Aus dem Punkte A fig. 114 gehen 2 Sekanten AB und AC . — Man ziehe BE und DC ; dann ist in den Δ en. ABE und ACD $\angle A = \angle A$, $\angle B = \angle C$, also auch $\angle AEB = \angle ADC$; daher sind beide Δ e. ähnlich, mithin ist $AB : AC = AE : AD$, sonach $AB \cdot AD = AC \cdot AE$.

IV. Aus A fig. 114 gehen die Tangente AF und die Sekante AC . — Man ziehe noch FC und FE . Die Δ e. ACF und AEF haben dann $\angle CAF = \angle CAF$, $\angle AFE = \angle ECF$, also $\angle AEF = \angle AFC$, somit sind beide Δ e. ähnlich, und es ist $AC : AF = AF : AE$, also $AF^2 = AC \cdot AE$.

37) a. Wenn sich 2 Sehnen eines Kreises durchschneiden, so sind die Produkte aus den Abschnitten beider Sehnen gleich.

b. Wenn aus einem Punkte der Kreislinie eine Senkrechte auf den Durchmesser geht; so ist sie die mittlere Proportionale zwischen den beiden Abschnitten des Durchmessers.

c. Wenn 2 Sekanten aus einem Punkte außerhalb des Kreises gehen; so verhalten sie sich umgekehrt wie ihre äußern Abschnitte; oder die Produkte aus den Sekanten in ihre äußern Abschnitte sind gleich.

d. Wenn aus einem Punkte außerhalb des Kreises eine Tangente und Sekante gehen; so ist die Tangente die mittlere Proportionale zwischen der Sekante und ihrem äußeren Abschnitt.

V. Der zur Sehne AB fig. 115 gehörige Bogen sei in C halbt und AC sei die Sehne des halben Bogens. Zieht man aus C den Durchmesser CF , und dann die Linie AF , so ist er senkrecht zur Sehne AB und hal-

birt sie (No. 23, d), und $\angle CAF = 90^\circ$ (No. 25, c);
daher ist $AC^2 = CF \cdot CD$ (No. 35, a)

oder, wenn man den Halbmesser = r setzt,

$$AC^2 = 2r \cdot CD$$

Nun ist aber $CD = CE - DE = r - DE$, und wenn man AE zieht,

$$\begin{aligned} DE &= \sqrt{AE^2 - AD^2} = \sqrt{r^2 - \frac{1}{4} \cdot AB^2} \\ &= \sqrt{\frac{4r^2 - AB^2}{4}} = \frac{1}{2} \times \sqrt{4r^2 - AB^2} \end{aligned}$$

also $CD = r - \frac{1}{2} \times \sqrt{4r^2 - AB^2}$

$$\begin{aligned} \text{und folglich } AC^2 &= 2r \times \left[r - \frac{1}{2} \times \sqrt{4r^2 - AB^2} \right] \\ &= r \times \left[2r - \sqrt{4r^2 - AB^2} \right] \end{aligned}$$

Diese Gleichung zeigt, wie sich aus der Sehne eines Bogens die Sehne des halben Bogens berechnen läßt. Zur Vereinfachung des Ausdrucks nimmt man r als Einheit an; dadurch wird

$$AC = \sqrt{2 - \sqrt{4 - AB^2}}$$

Ist AB die Seite eines ordentlichen Vielecks im Kreise, so ist AC die Seite eines ordentlichen Blks. von doppelt so vielen Seiten im Kreise; und obige Gleichung zeigt, wie man aus jener Seite diese berechnen kann. Ist z. B. AB die Seite des ordentlichen Sechsecks, also $= r = 1$, so ist die Seite des ordentlichen Zwölfecks oder

$$\begin{aligned} s_{12e} &= \sqrt{2 - \sqrt{4 - 1}} = \sqrt{2 - \sqrt{3}} = \sqrt{2 - 1,7320508} \\ &= \sqrt{0,267949} = 0,5176380 \dots \end{aligned}$$

Wird nun die Seite mit 12 vervielfacht, so ist der Umfang des ordentlichen Zwölfecks im Kreise oder

$$u_{12e} = 12 \times 0,5176380 = 2 \times 3,1058285 \dots$$

Bermittelt der Seite des ordentlichen Zwölfecks findet man nach obiger Gleichung die Seite und dann aus dieser den Umfang des ordentlichen 24ecks u. s. w.

s 24 e = 0,2610523	u 24 e = 6,2652572 = 2 . 3,1326286
s 48 e = 0,1308062	u 48 e = 6,2787004 = 2 . 3,1393502
s 96 e = 0,0654381	u 96 e = 6,2820639 = 2 . 3,1410319
s 192 e = 0,0327234	u 192 e = 6,2829049 = 2 . 3,1414524
s 384 e = 0,0163622	u 384 e = 6,2831152 = 2 . 3,1415576

Fährt man in der Verdoppelung der Seitenzahl fort, so wird der Umfang jedes folgenden Blks. immer größer, und muß endlich mit der Kreislinie zusammenfallen, oder

der Unterschied zwischen Beiden so klein werden, daß er sich nicht mehr angeben läßt. Wie weit aber auch die Rechnung fortgesetzt werden mag, so bleibt doch schon die Größe $2 \cdot 3,1415$ beständig, und nur noch die folgenden Dezimalen sind veränderlich.

Auf gleiche Weise ist man von der Seite des Quadrats im Kreise ausgegangen, hat daraus die Seite des ordentl. Achtecks, aus diesem die des Sechzehnecks u. s. w. berechnet. — Die nämliche Rechnung ist auch mit den ordentlichen Figuren um den Kreis gemacht worden.

Vollständig genau hat man $2 \cdot 3,1415926 \dots$ erhalten. Wenn also der Halbmesser als Einheit des Längenmaßes gesetzt wird, so ist die Kreislinie $2 \cdot 3,1415926$; und betrachtet man den Durchmesser als Einheit, so beträgt die Kreislinie $3,1415926$ solcher Einheiten, d. h. es ist $p = 2 r \cdot 3,1415926 = d \times 3,1415926$.

1. *U n m.* Wie früher bezeichnet p die Peripherie, r den Halb- und d den Durchmesser. Diese Bezeichnung wird auch in der Folge beibehalten.

2. *U n m.* Von ihrem Berechner, Rudolf von Cölln, gest. 1610, heißt $3,1415926$ die Ludolfische Zahl. — Man drückt die Abhängigkeit der Kreislinie vom Halb- oder Durchmesser auch durch folgende Proportion aus: $d : p = 1 : 3,1415926$ und $r : p = 1 : 2 \cdot 3,1415926$. — Archimedes, ein griechischer Mathematiker, geb. auf Samos im Jahre 287 und gest. 208 vor Chr., fand das Verhältniß $d : p = 7 : 22 = 1 : 3\frac{1}{7} = 1 : 3,42857$ (Periode), welches die Kreislinie zu groß angibt. — Adrian Metius fand das Verhältniß $d : p = 113 : 355 = 1 : 3,1415929$.

3. *U n m.* Statt $3,1415926$ genügt in der Anwendung meistens schon $3,14$ oder doch $3,1415$, wofür man aber lieber $3,1416$ nimmt. Das Ergebnis ist dann zwar etwas zu groß; aber dieser Fehler ist doch viel geringer, als das Zuwenig bei $3,1415$.

VI. Aus obiger Gleichung für p läßt sich nun auch umgekehrt d und r bestimmen, nämlich

$$d = \frac{p}{3,1416} = \frac{1}{3,1416} \times p = 0,31831 \cdot p$$

$$r = \frac{p}{2 \cdot 3,1416} = \frac{1}{2} \times \frac{1}{3,1416} \times p = \frac{1}{2} \times 0,31831 \cdot p$$

VII. Nun läßt sich auch die Länge eines Kreisbogens für einen bestimmten Mittelpunktsw. berechnen. — Der Bogen muß so viele Theile der Kreislinie haben, als der Mittelpunktsw. Theile von 360° enthält. Bezeichnet also b den Bogen und n die Anzahl der Grade des ihm zugehörigen Mittelpunktsw., so ist

$$b : p = n : 360$$

$$\text{also } b = \frac{n \cdot p}{360} = \frac{n \cdot d \cdot 3,1416}{360}$$

$$\text{und } u = \frac{b \cdot 360}{p} = \frac{b \cdot 360}{d \cdot 3,1416} = \frac{b \times 360 \cdot 0,31831}{d}$$

Wir haben demnach folgende Bestimmungsgleichungen:

38) a. $p = d \times 3,1416 = 2 r \times 3,1416$, d. h. die Kreislinie ist gleich dem Produkte aus dem Durchmesser (oder aus dem doppelten Halbmesser) in die Ludolfsche Zahl.

$$b. \quad d = \frac{p}{3,1416} = 0,31831 \cdot p$$

$$c. \quad r = \frac{p}{2 \cdot 3,1416} = \frac{1}{2} \times 0,31831 \cdot p$$

$$d. \quad b = \frac{n \cdot p}{360} = \frac{n \cdot d \cdot 3,1416}{360}$$

$$e. \quad n = \frac{b \cdot 360}{p} = \frac{b \cdot 360 \cdot 0,31831}{d}$$

Uebungsaufgaben.

1. Was ist p , wenn der Halbmesser $3'$, $4\frac{1}{2}'$, $5' 4''$, oder der Durchmesser $9'$, $12'$, $15' 8''$, $30'$, $100'$ beträgt?

2. Der Umfang der Erde beträgt 5400 Meilen; wie groß ist sein Durchmesser?

3. Welcher Durchmesser gehört zu einer Kreislinie von $40'$, $50'$, $64'$, $100'$, $216'$, $520'$, $2800'$?

4. Welcher Bogen gehört zu einem Mittelpunktsw. von 25° , wenn der Durchmesser $8'$ ist?

5. Wie groß ist der Bogen, wenn $n = 36^{\circ}$, $d = 12'$, oder $n = 43^{\circ} 20'$, $d = 6'$, und wie lang ist auf der Erde ein Bogen

des Aequators, der zu 1 Minute gehört? — Anm. Zu der letzten Aufgabe gehört $p = 5400$ Meilen.

6. Welcher W. gehört zu einem Bogen von $18'$, wenn $d = 40'$ ist, und welcher entspricht einem Bogen auf unserer Erde von 15 oder $24\frac{1}{2}$ Meilen?

7. Der Durchmesser eines Rades ist $5'$; wie viel Umläufe macht es auf einem Wege von einer neuen Schweizerstunde?

8. Welchen Weg hat ein Rad durchlaufen, wenn sein Durchmesser $4\frac{1}{2}$ Fuß beträgt und es 5640 Umläufe gemacht hat?

Vierter Abschnitt.

Flächeninhalt.

§. 40.

Geradlinige Figuren.

Gleiche Figuren sind Figuren von gleich großem Flächeninhalte. Während die Einerleiheit gleiche Form und gleiche Größe in sich begreift, so schließt die Gleichheit der Figuren jede Bedingung hinsichtlich ihrer Form aus. Es können z. B. Dfe. und Bfe. gleich, aber nie einerlei sein.

I. Es seien ABCD und abcd fig. 116 und 117 zwei Parallelogramme von gleicher Grundlinie und gleicher Höhe. — Wegen der Gleichheit der Grundlinien AB und ab läßt sich über AB ein Parallelogramm ABEF errichten, das mit dem Prllgrm. abcd einerlei ist, und dessen Grundlinie in AB fällt; wegen der Gleichheit der Höhen muß dann die Seite FE in die Richtung von DC fallen. Die Dfe. ADF und BCE haben nun $AD = BC$, $AF = BE$ (No. 17, b), $\sphericalangle DAF = \sphericalangle CBE$ (No. 4, f), sind also einerlei, und somit auch gleich groß; demnach ist $Df. ADF + \text{Trapez } ABCF = \text{Trapez } ABCF + Df. BCE$, oder $\text{Prllgrm. } ABCD = \text{Prllgrm. } ABEF$; weil aber $\text{Prllgrm. } ABEF = \text{Prllgrm. } abcd$, so ist auch $\text{Prllgrm. } ABCD = \text{Prllgrm. } abcd$.

Anm. Man kann daher auch ein schiefwinkliges Prllgrm. in ein Rechteck verwandeln und umgekehrt.

II. Jedes Df. ist die Hälfte eines Parallelogr., mit dem es gleiche Grundlinie und Höhe hat. Dreiecke mit gleicher Grundlinie und Höhe sind also Hälften von Parallelogr. mit gleicher Grundlinie und Höhe, d. h. Hälften von gleichen Parallelogr., sind folglich selbst gleich.

III. Es sei ABCD fig. 118 ein Trapez. Man ziehe die Sehren AC und BD. Die Dfe. ABD und ACD haben die nämliche Grundlinie AD und, weil sie zwischen den beiden Parallelen AD und BC liegen, auch gleiche Höhe, sind demnach gleich. Nimmt man von diesen beiden Dfen, das ihnen gemeinsame Df. ADE weg, so bleiben als gleiche Reste die Dfe. ABE und DEC.

IV. Das Df. ABC fig. 119 sei bei A rechtwinklig. Man errichte über BC das Quadrat BCDE, und über den Katheten AB und AC die Quadrate ABHL und ACFG. — Aus A ziehe man die Gerade AM senkrecht zu BC (oder \perp BE und CD), dann die Geraden AD und BF.

Das Rechteck CDMN und das Df. CDA haben die gleiche Grundlinie CD und die gleiche Höhe CN (oder liegen zwischen den Parallelen CD und MN), daher ist $\frac{1}{2}$ Rechteck CDMN = Df. CDA.

Die Dfe. CDA und CBF haben $CD = CB$, $CA = CF$, und $\sphericalangle ACD = \sphericalangle BCF$, weil jeder dieser beiden $\sphericalangle = 90^\circ + \sphericalangle ACB$ ist; beide Dfe. sind somit einerlei, also auch Df. CDA = Df. CBF.

Das Df. CBF und das Quadrat CAGF haben die gemeinschaftliche Grundlinie CF und die gleiche Höhe CA, mithin ist Df. CBF = $\frac{1}{2}$ Quadr. CAGF.

Da nun $\frac{1}{2}$ Rechteck CDMN = Df. CDA, aber Df. CDA = Df. CBF, und Df. CBF = $\frac{1}{2}$ Quadr. CAGF; so ist auch $\frac{1}{2}$ Rechteck CDMN = $\frac{1}{2}$ Quadr. CAGF, folglich auch Rechteck CDMN = Quadr. CAGF.

Zieht man nun die Geraden AE und CH, so läßt sich ebenso beweisen, daß das Rechteck BEMN = Quadr. ABHL ist.

Es sind demnach die Rechtecke CDMN und BEMN zusammen so groß als die beiden Quadrate ACFG und ABHL, oder da jene Beiden das Quadr. BCDE aus-

machen, so ist $\text{Quadr. BCDE} = \text{Quadr. ACFG} + \text{Quadr. ABHL}$.

- 39) a. Parallelogramme von gleicher Grundlinie und gleicher Höhe sind gleich.
 b. Dreiecke von gleicher Grundlinie und Höhe sind gleich.
 c. Im Trapeze sind die zwei Dk. zwischen den Nichtparallelen und den Abschnitten der Gehren gleich.
 d. Das Quadrat der Hypotenuse ist der Summe von den Quadraten der beiden Katheten gleich.

U n m. Der Satz vom Quadrat der Hypotenuse (lit. d) heißt nach seinem Erfinder Pythagoras auch der Pythagoräische Lehrsatz.

V. In dem Rechtecke ABCD fig. 120 sei die Seite AD in 5 und die Seite AB in 3 gleiche Theile getheilt, und es seien zugleich die Theile von AB und AD auch unter sich gleich. Aus den Theilpunkten von AD gehen Linien $\#$ AB, und sind daher senkrecht zu AD und BC; aus den Theilpunkten von AB gehen Linien $\#$ AD, und sind daher senkrecht zu AB und deren Parallelen. — Weil die 5 Theile von AD gleich sind, so sind alle Theile der darüber liegenden Parallelen ihnen und deshalb auch unter sich gleich (No. 17, b). Weil ferner die 3 Theile von AB gleich sind, so sind alle Theile der aufstehenden Parallelen ihnen und deshalb unter sich gleich. Weil endlich die 3 Theile von AB den 5 Theilen von AD einzeln gleich sind, so sind auch alle Theile der sich durchschneidenden Linien gleich. Die dadurch entstandenen kleinen Vierecke sind demnach lauter Quadrate, die sämtlich einerlei sind.

Weil AD aus 5 Theilen besteht, so liegen für die erste Längeneinheit der Höhe AB über AD auch 5 Quadrate; aus dem gleichen Grunde liegen neben der 2ten und 3ten Längeneinheit von AB je 5 Quadrate; das Rechteck enthält also $3 \cdot 5 = 15$ Quadrate oder Flächeneinheiten (vergl. S. 12). Statt der 3 Theile von AB und der 5 Theile von AD kann man die Linien AB und

AD selber setzen, somit ist der Inhalt des Rechtecks $ABCD = AB \times AD$.

U n m. Hieraus erhellt zugleich: Linien mit einander vervielfachen heißt, die Zahl der Längeneinheiten der einen mit der Zahl der Längeneinheiten der andern (oder ihre Längenzahlen mit einander) vervielfachen.

VI. Jedes schiefw. Parallelogramm gleicht einem Rechtecke von gleicher Höhe; also findet man auch seinen Inhalt wie den eines solchen Rechtecks, indem man die Grundlinie und Höhe desselben mit einander vervielfacht. So ist z. B. fig. 117 der Inhalt von $abcd = ab \times de$.

VII. Das Quadrat ist ein Rechteck mit 2 gleichen Abmessungen; also findet man seinen Inhalt, wenn man eine Abmessung mit sich selbst vervielfacht. Dadurch entsteht die Quadratzahl seiner Seitenlänge.

VIII. Jedes Dk. beträgt die Hälfte eines Parallelogramms, das gleiche Grundlinie und gleiche Höhe mit ihm hat; demnach muß das Produkt aus der Grundlinie in die Höhe (welches dem Parallelogramm gleicht) halbiert werden, um den Inhalt des Dks. zu erhalten. Es ist z. B. fig. 48 das Dk. $DEF = \frac{1}{2} \times DE \cdot FH$.

40) a. Der Flächeninhalt eines Rechtecks und eines schiefwinkligen Parallelogramms ist gleich dem Produkte aus der Grundlinie in die Höhe.

b. Der Flächeninhalt eines Quadrats ist gleich der Quadratzahl seiner Seitenlänge.

c. Der Flächeninhalt eines Dks. ist gleich dem halben Produkte aus der Grundlinie in die Höhe.

1. *U n m.* Da die Höhe des Dks. aus seinen 3 Seiten bestimmt werden kann; so läßt sich auch der ganze Inhalt aus denselben berechnen. (No. 36, e.)

2. *U n m.* Alle übrigen Figuren müssen nun zum Behuf ihrer Inhaltsberechnung auf die ebengenannten zurückgeführt werden, und zwar wegen der schiefen W. zunächst auf das Dk., weil sich jede Figur am leichtesten in Dks. zerlegen läßt.

IX. In der Raute fig. 68 kann man die Gehrung EG als Grundlinie der Dks. EDG und EFG , hingegen DH

und FH als ihre Höhe betrachten (No. 18, b). Darum ist $DEFG = \text{Df. EDG} + \text{Df. EFG} = \frac{1}{2} \times EG \cdot DH + \frac{1}{2} \times EG \cdot FH = \frac{1}{2} \times EG \cdot (DH + FH) = \frac{1}{2} \times EG \cdot DF$.

Ebenso ist in den Halbrauten fig. 70 und 71 die Gehre AC als Grundlinie den Dfn. ABC und ACD gemeinsam; die Höhen derselben sind BG und DG (No. 19, c). Also ist $ABCD = \text{Df. ABC} + \text{Df. ACD} = \frac{1}{2} \times AC \cdot BG + \frac{1}{2} \times AC \cdot DG = \frac{1}{2} \times AC \cdot (BG + DG) = \frac{1}{2} \times AC \cdot BD$.

X. In dem Trapez fig. 121 ziehe man die Gehre AC und die Senkrechte CE. — Man kann nun AD als Grundlinie des Dfs. ACD und BC als Grundlinie des Dfs. ABC betrachten, so daß CE als Höhe beider Dfe. erscheint. Demnach ist das Trapez $ABCD = \text{Df. ACD} + \text{Df. ABC} = \frac{1}{2} \times CE \cdot AD + \frac{1}{2} \times CE \cdot BC = \frac{1}{2} \times CE \cdot (AD + BC)$.

U n m. Natürlich kann man die beiden Dfe. auch einzeln berechnen. Aber vorstehende Berechnungsformel zeigt ein kürzeres Verfahren; warum? — Das Nämliche gilt auch im Folgenden vom Trapezoid.

XI. In dem Trapezoid fig. 122 ziehe man die Gehre AC nebst dem Senkrechten BE und DF; dann ist $ABCD = \text{Df. ABC} + \text{Df. ACD} = \frac{1}{2} \times AC \cdot EB + \frac{1}{2} \times AC \cdot DF = \frac{1}{2} \times AC \cdot (BE + DF)$.

XII. Ordentliche Vielecke werden durch ihre Winkelhalbmesser in einerlei Dfe. zerlegt; jedes dieser Dfe. hat eine Seite des Vks. zur Grundlinie und den Seitenhalbmesser zur Höhe. Ist s die Seite des ordentlichen Vks., also die Grundlinie eines jeden der Dfe., und h der Seitenhalbmesser des Vks. oder die Höhe eines jeden der Dfe., so ist der Inhalt eines solchen Dfs. = $\frac{1}{2} \cdot h \cdot s$; und dieses Produkt muß noch mit der Seitenzahl des Vks. vervielfacht werden, um den Inhalt des Letzteren zu finden. Bezeichnet n diese Seitenzahl, so ist der Inhalt des Vks. = $\frac{1}{2} \times h \cdot s \cdot n$; ab s . n ist der Umfang des Vks., und bezeichnet man ihn durch u, so ist der Flächeninhalt eines ordentlichen Vks. = $\frac{1}{2} \times h \cdot u$.

U n m. Daraus folgt zugleich, daß jedes ordentliche Wk. einem Dk. gleich ist, das den Umfang des ord. Wks. zur Grundlinie und seinen Seitenhalbmesser zur Höhe hat. Wie und warum?

- 41) a. Der Inhalt einer Raute oder Halbraute ist gleich dem halben Produkte aus ihren beiden Gehren.
- b. Der Inhalt eines Trapezes ist gleich dem halben Produkte aus der Summe seiner beiden Parallelen in ihren senkrechten Abstand von einander.
- c. Der Inhalt eines Trapezoides ist gleich dem halben Produkte aus einer Gehre in die Summe ihrer beiden senkrechten Abstände von den ihr gegenüberliegenden Winkelspitzen.
- d. Der Inhalt eines ordentlichen Vielecks gleicht dem halben Produkte aus seinem Umfang in seinen Seitenhalbmesser.

XIII. Das Trapezoid kann auch noch auf folgende Weise berechnet werden:

α. Man verlängert fig. 123 zwei Gegenseiten AD und BC, bis sie in E sich treffen. Nun zieht man vom Dk. ABE das Dk. DCE ab. Fällt man nämlich die Senkrechten BF und CG, so ist Trapezoid ABCD = $\frac{1}{2} \cdot BF \cdot AE - \frac{1}{2} \cdot CG \cdot DE$.

β. Man zerlegt fig. 124 das Wk. ABCD durch die Senkrechten BE und CF in zwei Dke. und ein Trapez.

γ. Auf ähnliche Weise verfährt man fig. 125 und 126, wo D ein stumpfer W. ist. Es muß hier das Dk. CDE abgezählt werden.

XIV. Jedes unregelmäßige Wk. läßt sich durch Gehren oder durch Linien, die aus einem Punkte in demselben nach den Winkelspitzen gehen, in Dke. zerlegen, welche einzeln berechnet werden, z. B. fig. 43, 44, 45, 46.

XV. Ist eine Figur ganz unregelmäßig von krummen Linien begrenzt, wie fig. 57; so verfährt man auf eine ähnliche Weise, wie bei der Bestimmung derselben S. 29, XX. Man berechnet zuerst das Fünfeck, dann das Dk. A a 1, das Trapez a 12 b u. s. w.

Uebungsaufgaben.

1. Die Rennbahn in Kassel ist ein Rechteck von 440' Länge und 204' Breite; wie viel \square' enthält sie?
2. Berechne den Inhalt eines Ackers, der 342' 6'' lang und 113' 4'' breit ist.
3. Ein Stück Tuch hält in die Länge $45\frac{1}{2}$ Elle und ist $\frac{3}{4}$ breit; ein anderes ist $52\frac{3}{8}$ Ellen lang und $\frac{6}{4}$ Ellen breit; wie viel \square Ellen beträgt ihr Unterschied?
4. Eine Kirche ist inwendig 126' lang und 78' breit; ihr Fußboden soll mit quadratförmigen Steinplatten belegt werden, deren jede in beiden Dimensionen $1\frac{1}{2}$ Fuß mißt; wie viel Platten sind dazu erforderlich?
5. A hat einen gevierten Acker gekauft, dessen Seite 40⁰ beträgt, und dafür 2510 Fr. bezahlt. Er gibt davon Jemanden mit 8% Gewinn ein Stück von 108' Länge und 86' Breite; wie viel Land bleibt ihm noch, und was muß der Andere bezahlen?
6. Ein Feld ist 60⁰ lang; durch dasselbe soll der Länge nach ein 15' breiter Weg, zu beiden Seiten ein 3' breiter Graben und daneben ein 2' breiter Hag angelegt werden; wie viel Land geht dadurch für den Anbau verloren?
7. Ein Haus soll mit Schieferplatten gedeckt werden. Jede der beiden Dachflächen ist 60' lang und 20' breit, und auf 4 \square' gehen 9 Schieferplatten; wie viele Platten sind erforderlich?
8. Ein Feld enthält 684 \square^0 und ist 36' 9'' breit; wie lang ist es?
9. Ein Land ist 120 Meilen lang und enthält 10800 \square Meilen; wie breit ist es?
10. Ein neuer Schweizerjuchart enthält 40000 \square' ; wie breit muß er sein, wenn er 800' oder 640' oder 2500' lang ist?
11. Ein Feld, 165⁰ lang und 100⁰ 5' breit, soll in der Breite 22⁰ verlieren; um wie viel muß es verlängert werden, wenn sein Inhalt gleich groß bleiben soll?
12. Eine neue Schweizer = Quadratmeile enthält wie viel neue schweiz. \square' , oder \square^0 ?
13. Die Grundlinie eines Dfs. ist 33' 6'', seine Höhe 22' 4''; berechne den Inhalt.
14. Welches ist der Inhalt eines Df., dessen Grundlinie 24⁰ 6' und dessen Höhe 15⁰ 8' beträgt?
15. Der Inhalt eines Dfs. ist 1000 \square'' ; seine Höhe 80''; suche die Grundlinie.

16. Ein Dk. enthält $1200 \square'$; seine Grundlinie ist $75'$; was beträgt die Höhe?

17. Die beiden Katheten eines rechth. Dks. betragen $35'$ und $22'$; suche seinen Quadratinhalt.

18. Die erste Seite eines Dks. sei $= 60'$, die zweite $= 40'$, die 3te $= 50'$; was beträgt die Höhe und der Flächeninhalt?

19. Es sei die Seite eines gleichseitigen Dks. $= 16'$; suche dessen Höhe und Flächeninhalt.

20. Wenn die Höhe eines gleichseitigen Dks. $18'$ beträgt; wie groß ist seine Grundlinie und sein Inhalt?

21. Der Flächenraum eines rechth. Dks. sei $= 210 \square''$, eine Kathete $= 20''$; was beträgt die andere Kathete und die Hypotenuse?

22. Die beiden Gehren einer Raute betragen $8''$ und $11''$, oder $9''$ und $12''$, die Gehren einer Halbraute $5''$ und $10''$, oder $12''$ und $22''$; wie groß ist jedes Mal der Inhalt?

Unm. Wenn eine Raute und eine Halbraute ihre beiden Gehren wechselweise gleich haben; wie groß ist dann ihr Flächeninhalt? Worin liegt bloß ihr Unterschied?

23. Ein Garten ist $62' 5''$ lang, oben $43' 4''$ und unten $51' 6''$ breit; man soll seinen Flächenraum berechnen.

24. Ein Fluß ist bei seinem Ursprung $3' 2''$ und bei seinem Ausfluß $250'$ breit, und 60 Stunden lang; wie viel \square' oder \square^0 , oder \square Stunden nimmt sein Bett ein?

25. Eine abgestumpfte Pyramide wird von gleich großen Trapezen begrenzt; jedes ist $8' 6''$ hoch, unten $4' 2''$, oben $2' 6''$ breit; was betragen die 4 Seitenflächen?

26. Welchen Flächenraum faßt der Durchschnitt eines Grabens, welcher $7'$ tief, oben $8' 6''$ unten $5' 8''$ breit ist?

27. Die Gehre eines Trapezoides sei $= 136^0$, ihre Abstände von den entgegenstehenden Winkelspitzen seien $40^0 6'$ und $73^0 2'$; wie viel neue schweiz. Suchart enthält dasselbe?

28. In fig. 122 sei $AC = 315'$, $BE = 112' 3''$, $DF = 98' 5''$; suche den Flächeninhalt.

29. In fig. 124 sei $AE = 32'$, $BE = 175'$, $EF = 192'$, $CF = 142'$, $FD = 64'$; berechne den Flächenraum von ABCD.

30. Die Seite eines regelmäßigen Sechsecks betrage $8''$ oder $10''$; berechne seinen Seitenhalbmesser und seinen Inhalt.

31. Fig. 44 sei $AC = 300'$, $aB = 162'$, $AD = 381'$, $bC = 180'$, $AE = 396'$, $cD = 152'$, $dF = 140'$; wie viel Flächenraum faßt die ganze Figur?

Ann. Auf gleiche Weise können bei fig. 57 die Angaben gestellt werden.

§. 41.

K r e i s.

I. Der Kreis ist das letzte ordentliche Blk., der Inhalt der Kreisebene wird daher auch wie der eines ordentlichen Blk. berechnet, nämlich als das halbe Produkt aus dem Umfang in den Halbmesser (§. 40, XII.) — Oder man kann die Kreisebene in ein Dk. verwandelt denken, dessen Grundlinie der Kreisumfang und dessen Höhe der Kreishalbmesser ist. Bezeichnet daher q den Inhalt der Kreisebene, so ist

$$q = \frac{1}{2} \times r \cdot p = \frac{1}{4} \times d \cdot p$$

II. Setzt man hier für p seine Werthe aus No. 38, so entsteht

$$q = \frac{1}{2} r \times 2 r \cdot 3,1416 = r^2 \times 3,1416$$

$$\text{oder} = \frac{1}{4} d \times d \cdot 3,1416 = \frac{1}{4} \cdot d^2 \cdot 3,1416$$

III. Setzt man aber in der obigen Gleichung (unter I.) für d seinen Werth aus No. 38, b; so wird

$$q = \frac{1}{4} \times \frac{p}{3,1416} \cdot p = \frac{p^2}{4 \cdot 3,1416}$$

$$\text{oder } q = \frac{1}{4} \cdot p \times p \cdot 0,31831 = \frac{1}{4} \times 0,31831 \cdot p^2$$

$$= 0,0795775 \cdot p^2$$

IV. Aus der Gleichung unter II. erhält man ferner:

$$d^2 = \frac{4 q}{3,1416} = 4 q \times 0,31831$$

$$d = \sqrt{4 q \times 0,31831} = 2 \cdot 0,5641896 \times \sqrt{q} = 1,1283712 \times \sqrt{q}$$

V. Aus der Gleichung unter III. erhält man endlich:

$$p^2 = 4 \cdot 3,1416 \times q$$

$$p = \sqrt{4 \cdot 3,1416 \times q} = 2 \cdot 1,77245 \times \sqrt{q} = 3,54490 \times \sqrt{q}$$

Wir haben demnach in Bezug auf die Kreisebene folgende Bestimmungsgleichungen:

- 42) a. $q = \frac{1}{2} \times r \cdot p = \frac{1}{4} \times d \cdot p$
 b. $q = r^2 \times 3,1416 = \frac{1}{4} \times d^2 \cdot 3,1416$
 c. $q = \frac{1}{4} \times 0,31831 \cdot p^2 = 0,0795775 \times p^2$

$$d. \quad d = 1,1283712 \times \sqrt{q}$$

$$e. \quad p = 3,54490 \times \sqrt{q}$$

VI. Der Kreisabschnitt ist wie die Kreisebene einem Df. gleich. So ist z. B. der Kreisabschnitt AMBD fig. 76 einem Df. gleich, das den Bogen ADB zur Grundlinie und den Halbmesser MD zur Höhe hat. Bezeichnet daher a den Abschnitt und b dessen Bogen, so ist $a = \frac{1}{2} \times r \cdot b$.

VII. Der Bogen kann gegeben sein, er kann aber auch erst bestimmt werden müssen. Setzt man daher für b seinen Werth aus No. 38, d; so entsteht

$$a = \frac{1}{2} r \times \frac{n \cdot p}{360} = \frac{r \cdot n \cdot p}{720}$$

$$\text{oder} = \frac{1}{2} r \times \frac{n \cdot 2 r \cdot 3,1416}{360} = \frac{r^2 \cdot n \cdot 3,1416}{360} \\ = r^2 \cdot n \times 0,0087266 \dots$$

Unm. Da sich im letzten Ausdruck auf allen folgenden Dezimalstellen 6 wiederholt, so kann man zur Abkürzung auch 0,008727 sehen.

VIII. Aus der Gleichung unter VI. erhält man ferner:

$$b = \frac{2 a}{r}$$

so daß der Bogen aus dem Abschnitt und dem Halbmesser berechnet werden kann.

IX. Aus der Gleichung unter VII. entspringt weiter:

$$n = \frac{720 \cdot a}{r \cdot p}$$

$$\text{oder} = \frac{360 \cdot a}{r^2 \cdot 3,1416} = \frac{360 \times 0,31831 \times a}{r^2}$$

X. Endlich ergibt sich aus den Gleichungen unter VI. und VII.:

$$r = \frac{2 a}{b}$$

$$\text{und } r^2 = \frac{360 \cdot a}{n \cdot 3,1416} = \frac{360 \times 0,31831 \times a}{n} = 114,5916 \times \frac{a}{n}$$

$$\text{also } r = 10,70475 \times \sqrt{\frac{a}{n}}$$

XI. Um fig. 76 den Abschnitt ACBD zu finden, muß man vom Auschnitt AMBD das Df. ABM abziehen. Setzt man nun den Abschnitt = α , die Sehne AB = s , die Höhe MC = h , so ist

$$\alpha = a - \frac{1}{2} \times s \cdot h$$

Wir haben hienach für den Auschnitt u. s. w. folgende Bestimmungsgleichungen:

$$43) \ a. \quad a = \frac{1}{2} rb = \frac{r \cdot n \cdot p}{720} = \frac{r^2 \cdot n \times 3,1416}{360} \\ = r^2 \cdot n \times 0,008727$$

$$b. \quad b = \frac{2a}{r}$$

$$c. \quad n = \frac{720 \cdot a}{r \cdot p} = \frac{360 \times 0,31831 \times a}{r^2}$$

$$d. \quad r = \frac{2a}{b} = 10,70475 \times \sqrt{\frac{a}{n}}$$

$$e. \quad \alpha = a - \frac{1}{2} \times s \cdot h$$

XII. Zur Berechnung von a ist neben r besonders n erforderlich, dazu dann für α noch s und h . Es kann aber h entbehrlich gemacht werden; denn in dem gleichschenkligen Df. ABM ist nach No. 36, e

$$h = \frac{1}{2 \cdot s} \times \sqrt{s^2 \cdot (2r + s)(2r - s)} = \frac{1}{2} \times \sqrt{(2r + s)(2r - s)}$$

$$\text{dadurch wird } \alpha = \frac{r^2 \cdot n \times 3,1416}{360} - \frac{s}{4} \times \sqrt{(2r + s)(2r - s)}$$

Anm. Wenn r und n bestimmt sind, so sind auch h und s bestimmt, also nicht mehr willkürlich anzunehmen. Wie aber h und s aus r und n berechnet werden, läßt sich auf dieser Stufe nicht nachweisen.

XIII. Auch r kann entbehrlich gemacht werden. Es ist nämlich nach No. 43, a und e, wenn man $CD = c$ setzt

$$\alpha = \frac{1}{2} \cdot rb - \frac{1}{2} \cdot sh = \frac{1}{2} \cdot rb - \frac{1}{2} \cdot s \cdot (r - c) = \\ = \frac{1}{2} \cdot rb - \frac{1}{2} \cdot rs + \frac{1}{2} \cdot sc = \frac{1}{2} \cdot r \cdot (b - s) + \frac{1}{2} \cdot sb$$

$$\text{Es ist aber } AM^2 \text{ oder } r^2 = AC^2 + CM^2 = \left(\frac{s}{2}\right)^2 + (r - c)^2$$

$$\text{oder } r^2 = \frac{1}{4} \cdot s^2 + r^2 - 2 \cdot r \cdot c + c^2$$

$$\text{also } 2 \cdot r \cdot c = \frac{1}{4} \cdot s^2 + c^2 = \frac{s^2 + 4c^2}{4}$$

$$r = \frac{s^2 + 4c^2}{8c}$$

Dadurch wird

$$\begin{aligned} \alpha &= \frac{1}{2} \times \frac{s^2 + 4c^2}{8c} \times (b - s) + \frac{1}{2} \cdot sc \\ &= \frac{s^2 - 4c^2}{16 \cdot c} \times (b - s) + \frac{sc}{2} \end{aligned}$$

U n m. Auch auf folgende Weise kann r aus s und c bestimmt werden. Nach No. 38, b ist nämlich $CD \cdot CE = AC^2$ oder $c \cdot (2r - c) = (\frac{1}{2}s)^2$, oder $2c \cdot r - c^2 = \frac{1}{4} \cdot s^2$ also $2cr = \frac{1}{4} \cdot s^2 + c^2 = \frac{s^2 + 4c^2}{4}$ und somit $r = \frac{s^2 + 4c^2}{8c}$

XIV. Es sei fig. 127 der Kreisring = F , dann der größere Halbmesser = R , der kleinere = r , so ist:

$$F = R^2 \cdot \mathfrak{z}_{1416} - r^2 \cdot \mathfrak{z}_{1416} = (R^2 - r^2) \cdot \mathfrak{z}_{1416}$$

XV. Aus dieser Gleichung erhält man ferner,

$$\begin{aligned} F &= (R - r)(R + r) \cdot \mathfrak{z}_{1416} = AB \times (R \cdot \mathfrak{z}_{1416} + r \cdot \mathfrak{z}_{1416}) \\ &= AB \times \frac{2R \cdot \mathfrak{z}_{1416} + 2r \cdot \mathfrak{z}_{1416}}{2} \end{aligned}$$

Setzt man nun die Breite AB des Kreisrings = W , und die größere und kleinere Kreislinie = P und p , so wird

$$F = W \times \frac{(P + p)}{2}$$

U n m. Diese Gleichung ergibt sich auch auf folgende doppelte Weise:

a. Die Kreisebene ist einem Dk. gleich, das den Kreisumfang zur Grundlinie und den Halbmesser zur Höhe hat. Denkt man sich nun ein Dk. mit einer Grundlinie = P und einer Höhe = R ; so wird sich darin und zwar vom Scheitelpunkt her ein anderes Dk. gestalten, dessen Grundlinie = p und Höhe = r ist, und beide Grundlinien P und p werden # sein. Somit ist die Figur zwischen den beiden Grundlinien ein Trapez, das dem Kreisring gleich kommt, und dessen Höhe = $R - r = w$ ist; folglich ist

$$F = \frac{1}{2} \times w \cdot (P + p).$$

$$\begin{aligned} \text{b. Oder } F &= \frac{1}{2} \cdot R \cdot P - \frac{1}{2} r \cdot p \\ &= \frac{1}{2} \times [(w+r) \cdot P - rp] = \frac{1}{2} \cdot [w \cdot P + r \cdot P - rp] \\ &= \frac{1}{2} \times [w \cdot P + r \cdot (P - p)] \end{aligned}$$

Es ist aber $P : p = R : r$, daher $(P - p) : p = (R - r) : r = w : 1$
mithin $(P - p) \cdot r = p \cdot w$

$$\text{folglich } F = \frac{1}{2} \cdot (w \cdot P + w \cdot p) = \frac{1}{2} \times w \cdot (P + p)$$

XVI. Endlich sei ein Theil des Kreisringes zwischen zwei Halbmessern MA und MD zu berechnen. Setzt man diese Ebene $ABCD = f$, so ist

$$f = \text{Auschnitt } MAD - \text{Auschnitt } MBC$$

oder wenn man Bog. $AD = B$, Bog. $BC = b$ und den zugehörigen Mittelpunktsw. $= n$ setzt, nach No. 43, a

$$\begin{aligned} f &= \frac{R^2 \cdot n \cdot 3,14}{360} - \frac{r^2 \cdot n \cdot 3,14}{360} = (R^2 - r^2) \times \frac{n \cdot 3,14}{360} \\ &= (R^2 - r^2) \cdot n \times 0,008727 \end{aligned}$$

XVII. Und hieraus erhält man endlich mit Hilfe von No. 38, d:

$$\begin{aligned} f &= (R - r)(R + r) \cdot \frac{n \cdot 3,14}{360} = w \cdot \left(\frac{R \cdot n \cdot 3,14}{360} + \frac{r \cdot n \cdot 3,14}{360} \right) \\ &= \frac{w}{2} \times \left(\frac{2R \cdot n \cdot 3,14}{360} + \frac{2r \cdot n \cdot 3,14}{360} \right) = \frac{1}{2} \cdot w \cdot (B + b) \end{aligned}$$

U n m. Es läßt sich diese letzte Formel für f auch noch auf die gleiche Weise herleiten, wie F unter XV. Ann.

$$44) \text{ a. } F = (R^2 - r^2) \times 3,1416 = \frac{1}{2} \cdot w \cdot (P + p)$$

$$\begin{aligned} \text{b. } f &= (R^2 - r^2) \times \frac{n \cdot 3,14}{360} = \frac{1}{2} \times w \cdot (B + b) \\ &= (R^2 - r^2) \cdot n \cdot 0,008727 \end{aligned}$$

U n m. Setzt man fig. 128 $r = \frac{1}{2} R$, und bezeichnet für diesen Fall den Kreisring mit \mathcal{F} , so ist nach 44, a nun

$$\mathcal{F} = (R^2 - \frac{1}{4} R^2) \cdot 3,1416 = \frac{3}{4} R^2 \cdot 1,416 = \frac{3}{4} \cdot Q$$

Folglich ist die innere oder kleinere Kreisebene $\frac{1}{4}$ der größeren. — Theilt man noch durch Halbmesser die beiden Kreislinien in 3 gleiche Theile, so wird auch der Kreisring in 3 gleiche Theile $AabB$, $AaCc$, $BbcC$ getheilt, deren jeder $\frac{1}{4}$ von Q beträgt und also $= q$ ist.

U e b u n g s a u f g a b e n.

(Zu No. 42.)

1. Was ist q , wenn $r = 6''$, oder $= 2'$, oder $= 3' 4''$, oder $= 9' 5''$ ist?

2. Was ist q , wenn $d = 2'$, oder $= 8''$, od. $= 5^{\circ} 2'$, od. 6° ist?
3. Wie groß ist die Aequatorsebene, wenn der Erdumfang 5400 Meilen beträgt?
4. Der Umfang eines Kreises sei eine neue Schweizerstunde von 16000'; wie groß ist seine Ebene? Wie viele neue Schweizerjuchart enthält sie?
5. Der Inhalt eines Kreises sei ein neuer Schweizerjuchart; wie groß ist d und p ?

(Zu No. 43.)

6. Man suche a , wenn $r = 5''$ und $b = 4''$, oder $r = 10'$ und $b = 12'$ ist.
7. Suche a , wenn $r = 24'$ und $n = 45^{\circ}$, oder $r = 11'$ und $n = 75^{\circ}$ ist.
8. Was ist b und n , wenn $a = 800 \square'$ und $r = 64'$, oder $a = 60 \square''$ $r = 15''$ ist?
9. Es sei $a = 880 \square'$ und $b = 35' 2''$, oder $a = 64 \square'$ und $b = 12''$; man suche r und n .
10. Es sei $a = 72 \square'$ und $n = 30^{\circ}$, oder $a = 100 \square''$ und $n = 22^{\circ} 33'$; man suche r , n , q .
11. Es sei $r = 8''$, $n = 60^{\circ}$, also $s = r$; man sucht α .

(Zu No. 44.)

12. Man suche F für $R = 20'$ und $r = 6'$, oder für $R = 12''$, $r = 8''$ oder für $P = 80'$ und $p = 50'$.
- U n m. Im letzten Falle hat man zuerst die Halbmesser und dann w zu suchen.
13. Man suche F für $P = 72'$ und $w = 6'$. Hier ist zunächst R , dann r , nachher p und endlich F zu berechnen.
 14. Man suche f für $R = 12'$, $r = 8'$, $n = 60^{\circ}$, oder für $B = 6'$, $b = 4'$, $n = 30^{\circ}$.

§. 42.

Vergleichung einiger Figuren.

Auf die Art der Inhaltsberechnung der einzelnen Figuren gründet sich auch ihre Raum-Vergleichung.

I. Es bezeichnen D und d zwei Dke. ohne besondere Eigenschaften, G und g ihre Grundlinien, H und h ihre Höhen. Dann ist

$$\mathcal{D} = \frac{1}{2} \cdot G \cdot H, \quad d = \frac{1}{2} \cdot g \cdot h$$

also $\mathcal{D} : d = \frac{1}{2} G \cdot H : \frac{1}{2} g \cdot h = G \cdot H : g \cdot h$

II. Und hieraus erhält man

$$\mathcal{D} : d = G : g, \text{ wenn } H = h$$

$$\mathcal{D} : d = H : h, \text{ wenn } G = g$$

III. Sind beide Dfe. ähnlich, so ist ebenfalls

$$\mathcal{D} : d = G \cdot g : H \cdot h = \left\{ \begin{array}{l} G : g \\ H : h \end{array} \right\}$$

Nun ist aber $G : g = H : h$ (No. 32, f), also kann man hier die beiden Verhältnisse mit einander vertauschen, daher entsteht:

$$\mathcal{D} : d = \left\{ \begin{array}{l} G : g \\ G : g \end{array} \right\} = G \cdot G : g \cdot g = G^2 : g^2$$

$$\text{oder} = \left\{ \begin{array}{l} H : h \\ H : h \end{array} \right\} = H \cdot H : h \cdot h = H^2 : h^2$$

IV. Es seien \mathcal{B} und v zwei ordentliche Vielecke von gleicher Seitenzahl, S und s ihre Seiten, R und r ihre Winkelhalbmesser, H und h ihre Seitenhalbmesser, U und u ihre Umfänge; dann ist nach No. 41, d

$$\mathcal{B} = \frac{1}{2} \cdot H \cdot U \text{ und } v = \frac{1}{2} \cdot h \cdot u$$

$$\text{also } \mathcal{B} : v = \frac{1}{2} \cdot H \cdot U : \frac{1}{2} \cdot h \cdot u = H \cdot u = h \cdot u = \left\{ \begin{array}{l} H : h \\ U : u \end{array} \right\}$$

Es ist aber $H : h = R : r = S : s = U : u$ (32, e),

Dadurch ergibt sich aus obiger Gleichung:

$$\mathcal{B} : v = H^2 : h^2 = R^2 : r^2 = S^2 : s^2 = U^2 : u^2$$

V. Es seien Q und q zwei Kreisebenen, R und r ihre Halbmesser, D und d ihre Durchmesser, P und p ihre Umfänge, n ein in beiden gleicher Mittelpunktswinkel, A und a die zu n gehörigen Ausschnitte, B und b eben solche Bogen; so ist

$$Q = \frac{1}{2} R \cdot P \text{ und } A = \frac{1}{2} R \cdot B$$

$$q = \frac{1}{2} r \cdot p \quad a = \frac{1}{2} r \cdot b$$

$$\text{daher } Q : q = \frac{1}{2} R \cdot P : \frac{1}{2} r \cdot p = R \cdot P : r \cdot p = \left\{ \begin{array}{l} R : r \\ P : p \end{array} \right\}$$

$$A : a = \frac{1}{2} R \cdot B : \frac{1}{2} r \cdot b = R \cdot B : r \cdot b = \left\{ \begin{array}{l} R : r \\ B : b \end{array} \right\}$$

Es ist aber $R : r = D : d = P : p = B : b$ (34, b).

Dadurch ergibt sich aus obigen beiden Gleichungen:
 $Q : q = R^2 : r^2 = D^2 : d^2 = P^2 : p^2 = B^2 : b^2 = A : a$

Aus allem diesem folgt:

- 45) a. Dreiecke überhaupt verhalten sich, wie die Produkte aus den Grundlinien in die Höhen.
- b. Dreiecke verhalten sich bei gleichen Grundlinien wie ihre Höhen, und bei gleichen Höhen wie ihre Grundlinien.
- c. Ähnliche Dreiecke verhalten sich, wie die Quadrate entsprechender Grundlinien oder Höhen.
- d. Ordentliche Vielecke von gleicher Seitenzahl verhalten sich, wie die Quadrate ihrer Seitenhalbmesser, Winkelhalbmesser, Seiten oder Umfänge.
- e. Kreisebenen und ihre Kreisabschnitte mit gleichem Mittelpunktswinkel verhalten sich wie die Quadrate ihrer Halbmesser, ihrer Durchmesser, ihrer Umfänge, und ihrer Bogen von gleichen Mittelpunktsw.

Anm. Die Sätze unter a, b, c lassen sich leicht auch für Rechtecke und schiefwinklige Parallelelogramme nachweisen. Eben so läßt sich der Satz unter c für andere ähnliche geradlinige Figuren darstellen.

Uebungsaufgaben.

1. Wie verhalten sich 2 Dke., wenn $G = 12'$, $H = 15'$, und $g = 8'$, $h = 6'$, oder $G = 70' 6''$, $H = 40' 8''$, $g = 50' 7''$, $h = 30' 2''$ ist?
2. Wie verhalten sich 2 Dke., wenn $G = g = 27'$, $H = 22'$, $h = 18'$, oder $G = g = 135'$, $H = 96'$, $h = 60'$ ist?
3. Wie verhalten sie sich, wenn $G = 42'$, $g = 30'$, $H = h = 27' 3''$; oder wenn $G = 216'$, $g = 160'$, $H = h = 112'$ ist?
4. Wie verhalten sich zwei ähnliche Dke., wenn $G = 40'$, $H = 18'$, $g = 16'$, $h = 7' 2''$; oder wenn $G = 22' 5''$, $H = 15'$, $g = 9'$, $h = 6'$ ist?
5. Wie verhalten sich zwei Aeffler, wenn der eine $315'$ lang, $24'$ breit, der andere $240'$ lang, $20'$ breit ist?
6. Wie verhalten sich 2 gleichseitige Dke., wenn ihre Grundlinien $16''$ und $12''$, oder ihre Höhe $15''$ und $9''$ betragen?
7. Wie verhalten sich 2 Quadrate, deren Seiten $18''$ und $12''$, oder $2000'$ und $1500'$ betragen?

8. Wie verhält sich der □Meter zum neuen schweiz. □'? (1 schweiz. Fuß = 0,3 Meter.)

9. Wie verhält sich die neue schweiz. □Stunde oder □Meile zu der französischen □Meile (lieue)? 1 neue schweiz. Wegstunde = 4800 Meter; 1 lieue = $\frac{1}{9}$ Myriameter (10000 Meter).

10. Wie verhält sich die neue schweiz. □Stunde zu der geographischen □Meile? 25 lieues = 15 geogr. Meilen. — Vergl. die vorige Aufgabe.

11. Wie verhalten sich 2 gleichnamige ordentliche Vielecke, wenn ihre Seiten 8'' und 6'', oder ihre Seitenhalbmesser 3' und 2', oder ihre Winkelhalbmesser 15'' und 12'' betragen?

12. Wie verhalten sich 2 Kreisebenen, deren Durchmesser 21'' und 15'', oder deren Halbmesser 12'' und 8'' betragen?

(Der Schluß und alle Figuren folgen im nächsten Heft.)

Deutsche Beispiel-Grammatik oder ausgewählter, syntaktisch geordneter Stoff zu Denk- und Sprechübungen. Mit kurzen grammatischen Bemerkungen. Für höhere Bürgerschulen und die mittleren Klassen höherer Lehranstalten. Von Fr. Theod. Bernalefen. Sekundarlehrer im K. Zürich. Winterthur 1840. Im Verlage der Steiner'schen Buchhandlung. (12 Bz.)

Ueber den Zweck und Gebrauch der „Beispiel-Grammatik.“ Nebst Andeutungen und Beispielen über die logische und grammatisch-stylistische Zergliederung der Mustersätze. Mit Bezugnahme auf das Übungsbuch. Von Fr. Th. Bernalefen. Winterthur 1840. (6 Bz.)

Seit der Erscheinung der Lehrbücher über deutsche Sprache von Heise und Krause ist Außerordentliches geschehen in diesem Fache; man erinnere sich nur an die Namen von Grimm, Schmitthenner, Herling und Bekker. Was diese Männer in rein wissenschaftlicher,