Einige Beispiele, wie der Unterricht in der Mathematik in ein gründliches Verständniß der philosophischen Begriffe einführen und so als Vorübung zur philosophischen Bildung benutzt werden kann. Von Karl Fröbel.

Es ist schon oft das Bildende des mathematischen und des Sprachunterrichts abgewogen und dem Letzteren der Vorzug gegeben worden. Die größte philosophische Autorität, Hegel, hat die Unzulänglichkeit der Mathematik für jeden philosophischen Inhalt, ihre Unfruchtbarkeit für philosophische Wahrheit ausgesprochen, weil ihre Beweise ein äußerliches, gedankenarmes Vorzeigen seien, ja ihre Operationen bis zu mühsamen Verwickelungen (z. B. das Summiren von Reihen) einer Maschine übertragen werden können. Das scheint gewiß, daß die Mathematik auf die geistloseste Weise gelehrt und gelernt, und dabei doch mit ihr für praktische Zwecke Viel geleistet werden kann. Diesem entgegen läßt sich die Behauptung aufstellen, daß die Mathematik die Grundlage für alle Philosophie in sich enthält, und daß ein mit dieser Rücksicht ertheilter Unterricht mehr als selbst der Sprachunterricht auf das wahre Verständniß der Philosophie vorbereitet, also auch den Geist für seine höchsten Interessen anregt. Ein paar Beispiele sollen dies näher zeigen.

Der Unterricht in der Mathematik wird geistlos, so wie der Lehrer nicht auf eine scharfe Bestimmung der Begriffe eingeht, sondern nur auf Mittheilung der Lehrsätze und Darlegung der Beweise sich beschränkt; dagegen wird er abschreckend mühsam, wenn mit scharfen Definitionen angefangen werden soll, oder doch schon früh versucht wird, die Schüler auf strenge Begriffsbestimmungen zu führen. Als der rechte Gang eines bildenden Unterrichts in der Mathematik wird sich der erweisen, daß die Schüler zuerst auf die sinnliche Anschauung begrenzter Körper, dann auf die Vorstellung vermittelst Zeichnungen und Zeichen verwiesen, beim weitern Fortschritt aber auf die scharfe

Unterscheidung der Grundbegriffe zurückgeführt werden, wozu Wiederholungen bei Abschnitten, von denen aus ein Ueberblick sich geben läßt, Gelegenheit bieten.

Einer der schwierigsten Begriffe in der Geometrie ist der Begriff Winkel, wenn er streng aufgefaßt werden soll. Verwandt mit ihm ist Richtung, Ebene und das Raumganze oder der Raum als allseitige Ausdehnung von einem Punkte aus betrachtet (der volle „Stralenbüschel"). Auf der mangelhaften Auffassung dieser Begriffe beruht die Schwierigkeit eines einfachen und dennoch vollständig genügenden Beweises der „Paralleltheorie;" sind aber jene richtig aufgefaßt, so ist dieser leicht und klar, und kann mit Umgehung der Definitionen selbst beim ersten Unterricht an seiner ihm in der Wissenschaft gebührenden Stelle vorkommen. Den Hauptgedanken hat Lacroix als Anmerkung in seiner Geometrie ausgesprochen, aber weder schlagend dargestellt (er beruft sich auf Bertrand), noch unter die Lehrsätze aufgenommen. — Gerade diese Beweisführung der auf gleichlaufenden Linien beruhenden Lehrsätze, die hier als erstes Beispiel folgen soll, macht den Schüler mit wichtigen Grundbegriffen bekannt und zeigt, wie die Mathematik sich eignet, den Geist auf das philosophische Denken vorzubereiten.

Der Vollständigkeit wegen soll mit den ersten Begriffsbestimmungen der Geometrie angefangen und Alles so behandelt werden, wie ein streng wissenschaftlicher Unterricht es verlangt. Es wird daraus hervorgehen, daß die Begriffe des unendlich Großen und unendlich Kleinen ganz auf elementare Weise behandelt werden können, und schon in den ersten Sätzen der Geometrie vorkommen müssen.

Begriffsbestimmungen.

1. Ein räumlicher Körper oder Raumkörper (zu unterscheiden von einem materiellen Körper oder Stoffkörper) ist von allem übrigen Raum durch Grenzen geschieden. Umgekehrt ist auch aller übrige Raum durch dieselben Grenzen von dem Raumkörper geschieden. Die Grenzen eines Raumkörpers

sind Flächen, welche durch Linien begrenzt sind. Die Grenzen der Linien sind Punkte. Ein Punkt ist die letzte, die vollständige Grenze. Alle Punkte sind rein oder vollständig getrennt; zwei durch Flächen geschiedene Räume sind nicht vollständig getrennt, sondern in der Grenze verbunden und durch diese nur geschieden. Zwei Punkte, die einander begrenzen sollen, sind nicht geschieden, sondern sie sind nur ein unterschiedsloser Punkt.

2. Ein Punkt begrenzt den leeren, unbegrenzten Raum. Umgekehrt: was den leeren Raum vollständig begrenzt, sind Punkte. — Der Punkt bestimmt den unbestimmten Raum; er ist das Etwas im leeren Raume.

3. Eine Richtung ist die unmittelbare Beziehung eines Punktes auf einen andern. Umgekehrt: wenn einer von zwei Punkten so vorgestellt wird, daß er den zweiten hinter ihm liegenden verdeckt, so ist das, was wir uns zwischen den beiden Punkten denken, die durch sie bestimmte Richtung.

4. Eine gerade Linie ist eine solche, deren Punkte alle in einer Richtung liegen. Umgekehrt: wenn zwei Punkte einer Linie so vorgestellt werden, daß der eine den andern, der weiter liegt, verdeckt, und dann auch alle übrigen Punkte von dem ersten verdeckt werden, so ist die Linie, vom ersten Punkte nach den übrigen hin gerechnet, gerade.

5. Bemerkung. Eine Richtung hat keine Länge, also auch keine Größe (denn Breite und Dicke hat sie auch nicht), sondern nur einen Gegensatz; sie unterscheidet sich in sich selbst als Richtung vom Punkte a nach b und Gegenrichtung von b nach a. Sie hat nur einen doppelten Anfang, aber kein Ende; sie ist auch doppelt endlos.

6. Bemerkung. Eine Gerade unterscheidet sich von einer Richtung dadurch, daß die Letztere nur zwei Punkte in sich schließt, hingegen die Erstere als eine Reihe zahlloser Punkte vorgestellt wird, die entsteht, wenn man sich einen Punkt in einer Richtung so fortbewegt denkt, daß zugleich an jeder Stelle,

durch die die Bewegung ihn bringt, ein Punkt zurückbleibt. (Verändert sich dabei allmählig die Richtung, so entsteht eine krumme Linie.) Denkt man sich den Punkt durch die ganze Richtung bewegt, so erhält man die (einfach und doppelt) endlose Gerade.

7. Ein Winkel ist die unmittelbare Beziehung zweier von einem Punkte ausgehenden Richtungen auf einander. — Wegen des Gegensatzes in jeder Richtung (5) bilden zwei Richtungen vier Winkel um einen Punkt; diese zusammengefaßt sind die Ebene als Ganzes ohne Länge und Breite betrachtet oder das Winkelganze. Umgekehrt: wenn man sich von einem Punkte aus Richtungen nach allen Punkten einer endlosen Geraden denkt, so ist die Zusammenfassung dieser Richtungen die Winkelhälfte, die mit der entgegengesetzten das Winkelganze ausmacht. Jeder Winkel ist ein bestimmter Theil des Winkelganzen, und schließt zwischen seinen Grenzrichtungen einen entsprechenden Theil der zahllosen Richtungen des Winkelganzen in sich. (Der Rechte ist nach dieser Bezeichnung das Winkelviertel.)

8. Bemerkung. Eine Ebene unterscheidet sich vom Winkelganzen ähnlich, wie die Gerade von der Richtung. Das Winkelganze hat weder Länge noch Breite, sondern nur verschiedene Richtungen. Eine Ebene aber entsteht, wenn eine Gerade so bewegt gedacht wird, daß alle ihre Punkte in jeder Lage von einer Geraden verdeckt vorgestellt werden können, und eine Gerade in jeder Lage, durch die sie die Bewegung bringt, zurückbleibt. Wird eine doppelt endlose Gerade auf diese Weise um einen Punkt bewegt gedacht, so entsteht die endlose ganze Ebene.

9. Wenn drei Richtungen von einem Punkte aus in Beziehung zu einander drei verschiedene Winkelganze bilden, so ist die Beziehung dieser drei Winkelganzen, welche natürlich die Beziehung aller eingeschlossenen und durch die neu entstehenden Beziehungen hinzukommender Richtungen zur Folge hat, das Raumganze. Theile des Raumganzen sind durch

ebene oder gebogene Winkel begrenzt; man nennt sie Körperwinkel.

10. Bemerkung. Das Raumganze hat weder Länge, noch Breite, noch Dicke, sondern unterscheidet sich nur in verschiedene Richtungen und Bruchtheile.

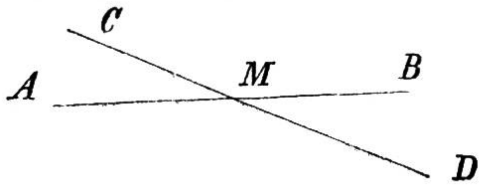
11. Durch die Bewegung einer Fläche, wenn diese in jeder Lage, durch welche die Bewegung sie führt, mit oder ohne Veränderung ihrer Form zurückgeblieben vorgestellt wird, entsteht ein Körperraum. Wenn die bewegte Fläche die ganze endlose Ebene ist, und so bewegt wird, daß sie dabei eine Umkehrung erleidet, ohne daß verschiedene oder dieselben Punkte durch dieselbe Stelle gehen, so entsteht der ganze endlose Raum als allseitige Ausdehnung.

Grundsätze der Form.

1. Zwei Punkte bestimmen eine und nur eine Richtung; und umgekehrt, eine Richtung muß zwei getrennte Punkte zu ihrer Bestimmung haben.

2. Wenn zwei der drei Richtungen, die von drei Punkten bestimmt werden, zusammenfallen, fallen auch die beiden andern zusammen.

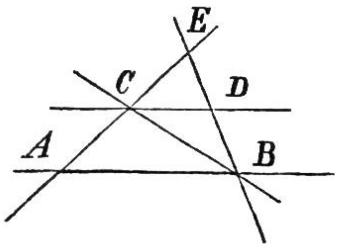
3. Zwei endlose Gerade, die von verschiedenen Richtungen in einem Punkte zusammentreffen, müssen einander durchschneiden.



Erläuterung. Die beiden endlosen Geraden AB, CD sollen in den verschiedenen Richtungen AM, CM in M zusammentreffen. Nun stelle man sich M von C gedeckt vor, ohne eine Veränderung ihrer Lage: dann liegen beliebige Punkte in AB zu beiden Seiten von CM. Irgend ein Punkt D in CD, der über M hinausliegt, wird aber auch von C gedeckt; wenn man sich nun umgekehrt M von D gedeckt vorstellt, so wird auch C gedeckt, und die Punkte in AB liegen nun auch zu beiden Seiten von M oder DM. Also durchschneidet CD die Gerade AB in M.

4. Zwei endlose Gerade können nur in einem Punkte einander durchschneiden; wenn sie in zwei Punkten zusammentreffen, haben sie dieselbe Richtung und fallen in dieser zusammen.

5. Zwei endlose Gerade können in einer Ebene durch zwei beliebig gegebene Punkte liegen, ohne in irgend einem Punkte zusammenzutreffen.



Erläuterung. Von irgend einem Punkte C außerhalb der Geraden **AB** denke man sich **CA** und **CB**, und von **E** in **AC** die Gerade **EB** gezogen. Zwischen **C** und den Punkten in **AB**, die über **B** hinaus liegen, liegt **BE**, so daß sie von **C** aus durch Punkte in **BE** gedeckt werden; die Geraden von **C** nach diesen Punkten werden also **BE** zwischen **B** und **E** durchschneiden.

Von den Punkten in **AB** aus, die vor **A** liegen, werden Punkte in **BE** von **C** gedeckt; also wird **BE** auch von den endlosen Geraden geschnitten, welche durch **C** und die Punkte vor **A** liegen. — Da nun die durch **C** und die Punkte in **AB** bestimmten endlosen Geraden, die Linie **AB** theils in Punkten, die über **B** hinaus, theils in solchen, die vor **A** liegen, treffen, so muß es irgend einen Punkt **D** in **BE** geben, der so liegt, daß **CD** die Gerade **AB** weder über **B** hinaus, noch vor **A**, also nirgends trifft.

Wortbestimmung. Zwei endlose Gerade in einer Ebene, die in keinem Punkte zusammentreffen, nennt man Gleichlaufende.

Grundsätze der Größe.

6. Wenn man sich eine Gerade so auf eine andere unverändert gelegt vorstellen kann, daß jeder Punkt in der einen auf einen Punkt in der andern fällt, und umgekehrt auch jeder Punkt in der zweiten auf einen in der ersten, so sind die beiden Linien gleich lang oder gleich groß. (Ihre Größe besteht allein in ihrer Länge.) Umgekehrt: wenn zwei Gerade gleich groß sind, und die eine wird auf die andere gelegt vorgestellt, so daß

zwei Enden und die Richtungen zusammenfallen, so müssen die beiden andern Enden auch zusammenfallen. — Wenn im ersten Fall nicht jeder Punkt der zweiten auf einen in der ersten fallen kann, so ist die zweite größer als die erste. Umgekehrt: wenn sie größer ist u. s. w.

7. Wenn man sich eine ebene Fläche so auf eine andere gelegt vorstellen kann, daß jeder Punkt in der einen auf einen Punkt in der andern fällt, und umgekehrt, so sind die beiden Flächen gleich groß.

8. Zwei Gerade, die einander durchschneiden, bilden vier Winkel, deren Größe sich verhält, wie die Größe der vier Theile oder Ausschnitte, in welche die endlose ganze Ebene der Geraden durch diese, als endlos gedacht, getheilt wird. (Diese Geraden nennt man Schenkel der Winkel oder Ausschnitte.)

9. Wenn zwei Ausschnitte so aufeinander gelegt vorgestellt werden, daß der Punkt und ein Schenkel des einen auf Punkt und Schenkel des andern zu liegen kommen, und dann auch die andern Schenkel in eine Richtung fallen, so sind beide Ausschnitte, sowie die Winkel der Richtungen ihrer Schenkel gleich groß. Umgekehrt: wenn sie gleich groß sind und wie vorher auf einander gelegt werden, so müssen die beiden andern Schenkel zusammenfallen. — Wenn im ersten Falle die beiden Schenkel nicht in eine Richtung fallen, so ist der eine Ausschnitt größer als der andere. Umgekehrt u. s. w.

10. Zwei Gerade, die einander durchschneiden, können zwei neben einander liegende gleiche Winkel einschließen. (Solche Winkel nennt mann Rechte.)

Lehrsätze.

1. Alle endlosen Geraden sind gleich groß.

Beweis. Wenn man sich vorstellt, daß zwei endlose Gerade in zwei Punkten zusammenfallen, so fallen alle ihre Punkte in eine Richtung, und in keiner kann ein Punkt vorgestellt werden, der nicht auf einen Punkt der andern fallen muß: also sind beide gleich lang. Was aber für zwei beliebige gilt, gilt für alle.

2. Alle endlosen ganzen Ebenen sind gleich groß.

Beweis. Man stelle sich vor, zwei beliebige Ebenen fallen in drei Punkten, die drei verschiedene Richtungen bestimmen, zusammen, so fallen beide in ein Winkelganzes; da nun in der einen kein Punkt vorgestellt werden kann, der nicht mit einem Punkt in der andern zusammenfallen muß, so sind beide gleich groß. Was für zwei beliebige gilt, gilt für alle.

Zusatz. Alle Winkelganze sind gleich groß.

3. Der ganze endlose Raum ist immer gleich groß, von welchem Punkt aus er gedacht werden mag. Denn jeder Punkt liegt in ihm.

Zusatz. Alle Raumganze sind gleich groß.

4. Eine ganze endlose Gerade wird durch einen Punkt in zwei gleiche Theile getheilt.

Beweis. M sei der Punkt, der die ganze endlose Gerade AB in die zwei Theile MA, MB theilt. Man stelle sich MA auf MB gelegt vor, so daß M wieder auf M, irgend ein anderer Punkt in MA aber auf einen Punkt in MB fällt. Dann muß jeder beliebige Punkt in MA mit einem Punkt in MB, und umgekehrt, zusammenfallen. Also MA=MB; beide sind halbe endlose Gerade.

5. Eine ganze endlose Gerade wird durch zwei Punkte in drei Theile getheilt, von welchen die beiden äußern jeder die Hälfte der ganzen Linie ist. Der eingeschlossene Theil kann einen äußern weder durch Hinzufügung größer, noch durch Wegnahme kleiner machen.

Beweis. M und N seien die beiden Theilungspunkte der ganzen endlosen AB. Nun ist (nach Lehrs. 4) MA=MB und NA=NB. Aber NA=MA+MN, NB=MB—MN=MA—MN; also MA+MN=MA—MN.

Bemerkung. Die Größe MN und die ganze AB sind von einerlei Art, Längen; aber AB oder MA ist gegen MN unendlich groß. Die Länge MN kann die Länge MA zwar verändern, aber weder größer noch kleiner machen. Eine unendlich große Länge kann nicht vorgestellt, sondern nur gedacht werden. Dagegen sind alle Theile, in die MN durch Punkte getheilt wird, deren Entfernung vorgestellt werden kann, endliche Längen, d. h. solche, welche durch Hinzufügung oder Wegnahme einander größer oder kleiner machen.

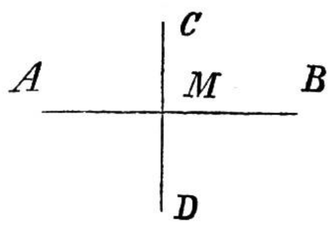
Zusatz. Eine ganze endlose Gerade kann nur in zwei, nicht in drei oder mehr gleiche Theile getheilt werden.

6. Eine ganze endlose Ebene wird durch eine endlose Gerade in zwei gleiche Theile getheilt.

Beweis. AB bezeichne die endlose Gerade; ABM und ABN seien die beiden Theile der Ebene. Nun stelle man sich vor, ABM falle auf ABN, so daß AB wieder auf AB fällt und der Punkt M außerhalb AB, auf einen Punkt N. Dann fallen beide Theile zusammen, und irgend ein Punkt in ABM muß auf einen Punkt in ABN fallen, und umgekehrt. Also ist ABM=ABN; jeder ist eine halbe endlose Ebene.

Zusatz. Alle halben endlosen Ebenen sind einander gleich. (Lehrs. 2.)

7. Zwei nebenliegende der vier Winkel, die zwei Richtungen bilden, sind zusammen gleich dem Winkelhalben; die gegenüberliegenden sind gleich groß.



Beweis. AB und CD seien die zwei in den Richtungen liegenden endlosen Geraden, die einander in M schneiden. Nun sind zwei nebenliegende Ausschnitte AMC+BMC, oder BMC+BMD u. s. w. = der halben Ebene (Grundsatz 9): also sind die entsprechenden Nebenwinkel = dem Winkelhalben (Grundsatz 8). — Ferner ist ABC=CDB, weil Beide halbe Ebenen sind: also ist Ausschnitt AMC = Ausschn. BMD, oder W. AMC = W. BMD.

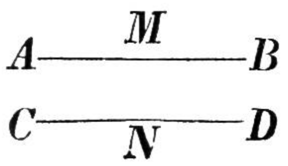
Zusatz 1. Jeder der vier Winkel ist kleiner als das

Winkelhalbe; jeder der vier Ausschnitte ist also auch kleiner als die halbe Ebene.

Zusatz 2. Wenn zwei Nebenwinkel einander gleich oder Rechte sind, so sind alle vier Winkel gleich; also einer ist ein Winkelviertel.

Umgekehrt. Wenn zwei nebenliegende Winkel zusammen gleich dem Winkelhalben sind, so liegen ihre Schenkel in zwei Richtungen, je zwei in einer. Wenn sie kleiner oder größer sind, liegen sie in drei verschiedenen Richtungen. U. s. w.

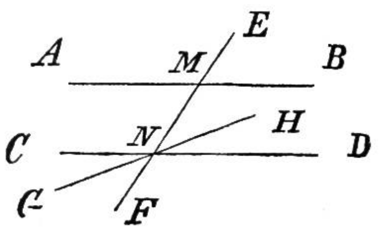
8. Zwei endlose Gleichlaufende theilen die ganze endlose Ebene in drei Theile, zwei Hälften und ein Band, welches eine Hälfte weder durch Hinzufügung größer, noch durch Wegnahme kleiner macht.



Beweis. AB, CD seien die beiden endlosen Gleichlaufenden, M und N Punkte außerhalb derselben. Nun ist (nach Lehrs. 6) $ABM = ABN$, und $CDM = CDN$. Aber $CDM = ABM +$ Band $ABCD$, und $CDN = ABN -$ Band $ABCD = ABM -$ Band $ABCD$. Also $ABM + ABCD = ABM - ABCD$.

Bemerkung. Die halbe endlose Ebene und das endlose Band sind einerlei Größen; aber die ganze und halbe endlose Ebene sind in Vergleich mit dem endlosen Band unendlich groß. Dagegen ist jeder Ausschnitt, dessen Grenzrichtungen getrennt vorgestellt werden, ein endlicher Theil der ganzen Ebene.

9. Eine Gerade, die zwei beliebig gegebene Punkte in zwei Gleichlaufenden verbindet, bildet mit diesen vier und vier abwechselnd gelegene gleiche Winkel.



Beweis. Es sei $AB \parallel CD$; EF verbinde die beliebig in AB und CD gegebenen Punkte M, N; die Geraden denke man sich endlos.

Die Wegnahme des endlosen Bandes ABCD macht die halbe Ebene EFA nicht kleiner (Lehrs. 8); also ist auch $EFA - AMNC = EFA$; also $EFA - AME =$

EFA—AMNC—AME, oder Ausschnitt AMF= Ausschn. CNF; also auch W. AMF= W. CNF= W. DNE u. s. w.

Umgekehrt. Wenn der Ausschnitt oder Winkel AMF= CNF, so ist AB || CD.

Beweis. Man stelle sich vor, AMNC sei auf DNMB so gelegt, daß M auf N, und MN auf NM zu liegen kommt. Dann muß AM auf ND fallen, weil W. AMN= W. CNF= W. DNM; ferner muß N auf M fallen, weil MN=NM; endlich muß NC auf MB fallen, weil W. CNM= W. BMN.

Wenn nun AB und CD in irgend einem Punkt X auf der einen Seite von EF zusammentreffen würden, so müßten sie dasselbe auf der andern Seite thun, also ganz in einer Richtung liegen (Grundſ. 4). Sie liegen aber nicht in einer Richtung, also können sie nirgends zusammentreffen, oder sie sind gleichlaufend.

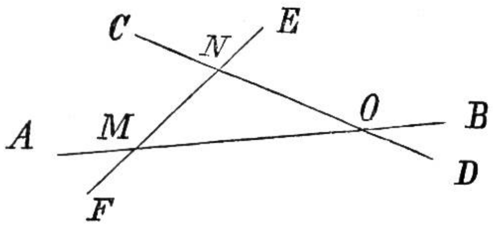
Zusatz. Das endlose Band ABCD wird durch eine Gerade MN, die zwei beliebig gegebene Punkte in den Gleichlaufenden AB, CD verbindet, in zwei Hälften getheilt.

10. Wenn eine endlose Gerade eine von zwei endlosen Gleichlaufenden durchschneidet, muß sie auch die andere durchschneiden.

Beweis. GH soll CD in N durchschneiden. Man verbinde N mit einem beliebigen Punkte M in AB. Wenn GH in NM fällt, so durchschneidet sie AB in M; außerdem kann sie nur zwischen NM und ND, oder zwischen NM und NC fallen. Im ersten Fall ist W. HNM= W. DNM— W. DNH= W. BME— W. DNH; also Ausschnitt HNM= Ausschn. BME — Ausschn. DNH. Wenn nun NH die Gerade MB nirgends durchschnitte und einen Ausschnitt=DNH von BME abschnitte, so würde HNE=HNMB+BME=BME sein (weil HNMB < das halbe Band DNMB). Aber HNE=BME—DNH; also muß NH von BME einen Ausschnitt=DNH abschneiden, folglich MB durchschneiden. — Der zweite Fall verhält sich wie der erste.

Zusatz. Eine Gerade, die mit einer von zwei Gleichlaufenden gleichlaufend ist, ist es auch mit der andern.

11. Die drei Winkel eines Dreiecks sind zusammen gleich dem Winkelhalben.

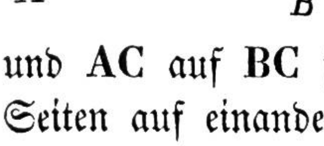


Beweis. Man denke sich die drei Seiten des Dreiecks MNO als endlose Gerade AB, CD, EF; diese theilen die ganze Ebene in dreimal zwei gleiche Ausschnitte AOC und BOD, BME und AMF, DNF und CNE, welche zusammen die ganze endlose Ebene ausmachen mehr zweimal die Fläche MNO, oder einfach die ganze Ebene, da MNO kleiner ist als ein Band, in dem es liegen kann, also 2 MNO die ganze Ebene nicht größer macht. Drei dieser 6 Ausschnitte, je einer von zwei gleichen, z. B. AOC+BME+DNF sind also gleich der halben Ebene. — Oder auch: AMF+FND+BOD=ABF+MNO=ABF; aber AMF=BME, BOD=AOC; folglich AOC+BME+DNF=ABF. Also auch W. MON+W. NMO+W. MNO=2 R.

Zusatz. Ein Außenwinkel ist gleich den beiden innern gegenüberliegenden Winkeln zusammengenommen.

12. Wenn zwei Seiten und der eingeschlossene Winkel eines Dreiecks gleich ähnlich oder umgekehrt gelegenen Gliedern eines andern Dreiecks sind, so sind die zwei andern Winkel und die dritte Seite des einen gleich den ähnlich oder umgekehrt gelegenen Winkeln und der dritten Seite des andern Dreiecks.

13. Folgesatz. Wenn zwei Seiten eines Dreiecks gleich sind, so sind die gegenüberliegenden Winkel gleich.



Beweis. Es sei AC=BC. Wenn nun Dreieck ABC umgekehrt auf ABC in der gegebenen Lage gelegt vorgestellt wird, so daß C auf C und AC auf BC fällt, so fallen auch die andern Punkte und Seiten auf einander, also W. A= W. B.

Zusatz. Wenn die drei Seiten eines Dreiecks gleich sind, so sind die Winkel gleich.

14. Wenn zwei Winkel und die gemeinschaftliche Seite eines Dreiecks gleich ähnlich oder umgekehrt gelegenen Gliedern eines andern Dreiecks sind, so sind u. s. w.

15. Folgesatz. Wenn zwei Winkel eines Dreiecks gleich sind, so sind die gegenüberliegenden Seiten gleich. (Beweis ähnlich wie in Lehrs. 12.)

16. Wenn die drei Seiten eines Dreiecks einzeln genommen gleich den Seiten eines andern sind, so sind u. s. w.

Beweis. Je nachdem die Lage der Seiten in beiden Dreiecken ähnlich oder umgekehrt ist, stelle man sich das eine Dreieck umgekehrt oder in der gegebenen Lage an das andere gelegt vor, so daß zwei gleiche Seiten zusammenfallen, und verbinde die gegenüberliegenden Punkte u. s. w.

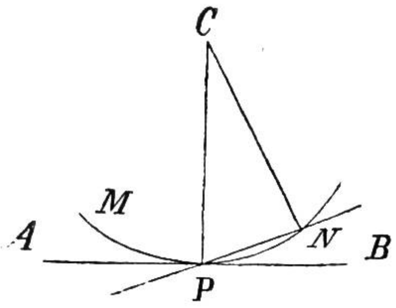
17. Der größern Seite eines Dreiecks steht der größere Winkel gegenüber, und umgekehrt dem größern Winkel steht die größere Seite gegenüber.

18. Zwei Seiten eines Dreiecks sind zusammen größer als die dritte.

Folgesatz. Eine Rechtwinklige ist die kürzeste Entfernung eines Punktes von einer Geraden. Jeder vom Durchschnittspunkt der Rechtwinkligen entferntere Punkt in der Geraden ist auch weiter vom obern Punkte der Rechtwinkligen entfernt.

Formbestimmung. Wenn in einer Ebene ein Punkt so bewegt vorgestellt wird, daß seine Entfernung von einem andern gegebenen Punkte derselben Ebene immer gleich bleibt, so beschreibt er eine Boglinie, die man Kreis nennt. Den festen Punkt nennt man den Mittelpunkt; die Gerade, welche diesen mit dem bewegten Punkte verbindet, den Stral oder Halbmesser des Kreises.

17. Eine Rechtwinklige am äußern Ende des Strales berührt den Kreis in einer unendlich kleinen Geraden, während eine Gerade, die irgend zwei in endlicher (vorstellbarer) Entfernung liegende Punkte der Kreislinie verbindet, diese, wenn verlängert, durchschneidet, wie klein die Entfernung sein mag.



Beweis. C sei der Mittelpunkt, PC $\perp$ AB, MPN ein Stück der Kreislinie, P und N zwei Punkte derselben in irgend einer angebbaren Entfernung.

Nun ist W. CPN = W. CNP $<$ 1 R. Alle Punkte der Geraden zwischen P und N liegen also C näher, als der Punkt P oder N (18. Folges.), und somit innerhalb des Kreises; die übrigen Punkte in PN sind weiter von C entfernt, und fallen daher außerhalb des Kreises. Also durchschneidet PN die Kreislinie in P und N, wie nahe auch Beide vorgestellt werden mögen.

Dagegen muß der bewegte Punkt, von M in P angekommen, sich nothwendig in einer bestimmten Richtung PX fortbewegen, wenn er die Kreislinie beschreiben soll. Diese Richtung PX muß durch 2 Punkte bestimmt sein (Grunds. 1); der eine ist P, der andere die nächste Stelle n, in welche der Punkt aus P tritt. Würde nun die Richtung PX, in welcher n liegt, mit PB einen Winkel bilden, so wäre W. CPX entweder $<$ oder $>$ 1 R. Im ersteren Falle müßte die Gerade Pn den Umkreis durchschneiden, wie PN, in beiden aber würde der Punkt den Umkreis verlassen müssen, was nicht sein soll. Also muß PX und n in PB fallen. Wäre aber die Länge Pn von vorstellbarer, endlicher Größe, so müßte Pn oder PB den Umkreis durchschneiden, wie PN, und W. CPB $<$ 1 R., was nicht sein soll; eine Länge muß Pn dennoch haben, weil n außerhalb P liegen muß: also muß Pn in Vergleich mit PN unendlich klein sein. — Aus gleichen Gründen muß der bewegte Punkt vor P durch einen Punkt m in PA kommen, der unendlich nahe an P liegt. — Alle Punkte nun in AB in angebbarer Entfernung von P liegen weiter von C, als der Punkt P, und somit außerhalb des Kreises: also berührt AB den Kreis in der unendlich kleinen Geraden mn.

Bemerkung. Der Kreis, wie jede Boglinie, besteht aus geraden Theilchen, die in Vergleich mit jeder angebbaren, endlichen Länge unendlich klein sind; die sich zu endlichen Längen verhalten, wie diese zur ganzen endlosen Geraden.

18. Zwei ganze Kreise, die in einem Punkte zusammentreffen, müssen entweder einander durchschneiden, und zwar in zwei Punkten, oder in nur einem angebbaren Punkt berühren.

Beweis. Man verbinde die beiden Mittelpunkte und den Punkt, in dem die Kreise zusammentreffen, mit drei Geraden, u. s. w. Die Beschreibung einer Rechtwinkligen wird dazu nicht erfordert.

Mit Hilfe dieser Sätze und der Verzeichnung des Kreises können nun folgende Sätze bewiesen werden.

19. Auf eine gegebene Gerade von einem Punkt in derselben können zwei Dreiecke beschrieben werden, die einem gegebenen Dreieck in jeder Beziehung gleich sind.

Zusatz. Auf ähnliche Weise können zwei Winkel gleich einem gegebenen verzeichnet werden.

20. Durch einen gegebenen Punkt außerhalb oder innerhalb einer gegebenen Geraden kann eine andere — und nur eine — rechtwinklig auf die erstere gezogen werden.

21. Durch einen gegebenen Punkt außerhalb einer gegebenen Geraden kann eine — und nur eine — andere gleichlaufend mit der ersteren gezogen werden. (Lehrs. 10.)

Schlußbemerkung.

Mit diesem letzten Lehrsatze, der gewöhnlich als Aufgabe gestellt wird, sind alle auf Gleichlaufende bezüglichen Lehrsätze in einer Ebene erschöpft. Die vollständige Beseitigung aller bisher gefühlten Mängel in den üblichen Beweisen dieser Sätze beruht, wie man gesehen hat, auf der Unterscheidung der Begriffe Linie und Richtung, Ebene und Winkelganzes. Diese ist zugleich ein nicht unbedeutender philosophischer Gewinn. Die Auffassung des Begriffes Richtung bereitet die richtige Auffassung der Grundbegriffe Kraft, Masse und Bewegung vor.

Aus dem Begriff Richtung verbunden mit dem der Bewegung folgt z. B. mit mathematischer Nothwendigkeit,

erstlich, daß alle beweglichen Körper (Stoffkörper) aus Punkten bestehen;

zweitens, daß alle Kräfte in (geraden) Richtungen wirken.

Denn eine bewegte Körpermasse muß nothwendig aus jedem Ort, durch den sie bewegt wird, in bestimmten Richtungen treten; Richtungen verlangen zu ihrer Bestimmung Punkte: also müssen es Punkte sein, die an ihr bewegt werden, sie muß als bewegte Masse aus Punkten bestehen.

Ferner, Kräfte sind die Ursache der Bewegungen; die Punkte aber sind das Bewegte: also wirken Kräfte von Punkt auf Punkt. Da nun jeder durch eine Kraft zwischen ihm und einem andern bewegte Punkt nach jedem Zeitpunkt (Gegenwart) in einer Richtung bewegt werden muß (abgesehen von der Bewegung, die er als Massenpunkt beharrlich fortsetzt), so muß auch die Kraft in einer Richtung und zwar der durch beide Punkte bestimmten wirken.

Der Raum gestattet nicht, diese Begriffsbestimmungen hier weiter zu verfolgen. Man ersieht aus dem Wenigen, wie die Grundbegriffe der Mathematik, streng aufgefaßt, überführen zu einer streng wissenschaftlichen Bestimmung der Grundbegriffe der Mechanik. Was gewöhnlich als Thatsache der Erfahrung betrachtet wird, kann so in den eignen Bestimmungen des Denkens gefunden und von diesen abgeleitet werden.

Auf andere philosophische Begriffe führt die wissenschaftliche Bestimmung der Grundoperationen der Zahl, aus welcher sich zugleich der Beweis ergibt, daß nur drei solche Grundoperationen mit ihren Umkehrungen möglich, d. h. denkbar sind. — Dies in einem spätern Aufsatz.
