

Zeitschrift: Asiatische Studien : Zeitschrift der Schweizerischen Asiengesellschaft = Études asiatiques : revue de la Société Suisse-Asie

Herausgeber: Schweizerische Asiengesellschaft

Band: 59 (2005)

Heft: 2

Artikel: Der Beitrag der indischen Mathematik zum Rechnen mit negativen Zahlen

Autor: Guhe, Eberhard

DOI: <https://doi.org/10.5169/seals-147681>

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. [Mehr erfahren](#)

Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. [En savoir plus](#)

Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. [Find out more](#)

Download PDF: 06.07.2025

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>

DER BEITRAG DER INDISCHEN MATHEMATIK ZUM RECHNEN MIT NEGATIVEN ZAHLEN

Eberhard Guhe, Mainz

Abstract

The present paper is about the Indian forerunner of our modern idea of negative numbers. Some of the calculation rules for negative numbers which we apply still today are to be found in Brahmagupta's *Brāhmasphuṭasiddhānta*, the earliest Indian account of the idea of negative numbers. Information about the benefit of negative quantities in practical calculations can be gathered from Bhāskara II and his commentators. The present paper is especially concerned with Bhāskara's way of determining the area of a triangle presupposing the lengths of the sides as given data. He shows that a general solution to this problem is available if negative quantities are supposed to be admissible in the calculation process. Bhāskara is also aware of the geometrical meaning of these negative intermediary results.

In der modernen Mathematik wird eine negative Zahl als eine gewisse Äquivalenzklasse von geordneten Paaren natürlicher Zahlen definiert. Briefliche Mitteilungen von Richard DEDEKIND weisen darauf hin, dass er einer der Wegbereiter dieser Definition gewesen sein könnte (vgl. DEDEKIND 1932:490). Doch schon lange vor der exakten Festlegung, was negative Zahlen sind, waren sie als Rechengrößen, die sich in bestimmten Anwendungsregeln manifestieren, ein Begriff. Die Idee der negativen Zahlen in diesem operationalen Sinne wurde von muslimischen Mathematikern tradiert, die sie von der indischen Mathematik übernommen hatten, und erreichte auf diesem Weg auch den abendländischen Kulturkreis (vgl. ELFERING 1985:83).

Im folgenden soll gezeigt werden, wie negative Zahlen in der indischen Mathematik eingeführt wurden und welche Rolle sie gespielt haben, wobei stets zu beachten ist, dass in diesem Zusammenhang von negativen Zahlen nicht im Sinne der exakten modernen Definition die Rede ist, sondern im Sinne einer intuitiven anwendungsorientierten Betrachtungsweise, die auch heute noch unsere Vorstellung von den negativen Zahlen prägt.

Unter diesem Vorbehalt können in mathematischen Kontexten Sanskrit-Ausdrücke wie *ṛṇa* ("Schuld") oder *kṣaya* ("Verlust", "Abnahme", "Verminderung", "Untergang") mit "negative Zahl" oder – dort, wo sie sich auf eine Zahl

in Verbindung mit einer Masseinheit beziehen – mit “negative Grösse” wiedergegeben werden. Entsprechend sind *dhana* (“Geld”, “Gut”, “Habe”, “Vermögen”, “Besitz”) oder *sva* (“das Eigene”, “Eigentum”) in mathematischen Kontexten als Bezeichnungen positiver Zahlen bzw. Grössen aufzufassen.

Um eine Zahl in der mathematischen Symbolsprache als “negativ” zu kennzeichnen, wurde in der indischen Mathematik (anstelle des uns geläufigen vorgesetzten Minuszeichens) meist über dem Zahlzeichen ein Punkt oder ein kleiner Kreis notiert (vgl. DATTA/SINGH 1962:II:13f).

Das früheste erhaltene Werk eines indischen Mathematikers, in dem negative Zahlen thematisiert werden, ist der *Brāhmasphuṭasiddhānta* von Brahmagupta. Der Text stammt aus dem 7. Jh. n.u.Z., ist also deutlich später als das chinesische Werk “9 Kapitel der Rechenkunst”, in dem ebenfalls negative Zahlen behandelt werden (vgl. MARTZLOFF 1997:200f). Es dürfte spätestens im 1. Jh. n.u.Z. entstanden sein und könnte durch den regen Kulturaustausch zwischen Indien und China in dieser Zeit auch die indische Mathematik beeinflusst haben.

Ebenso wie in diesem chinesischen Werk wird der Leser auch bei Brahmagupta sofort mit Rechenregeln für negative Zahlen konfrontiert. Was negative Zahlen sind, und was ihre Einführung bezweckt, darüber erfährt man nichts. Dennoch wirken Brahmaguptas Rechenregeln auf den modernen Leser sehr vertraut, denn sie entsprechen ziemlich genau dem, was wir über das Rechnen mit positiven und negativen Zahlen wissen.

Aus dem (bereits in ELFERING 1985 übersetzten) Text – es handelt sich um die Verse 31-36 im *Kuṭṭakādhyāya* des *Brāhmasphuṭasiddhānta* – greife ich hier als Beispiel nur die Regeln für die Multiplikation heraus:

ṛṇam ṛṇadhanayor ghāto dhanam ṛṇayor dhanavadho dhanam bhavati |
śūnyarṇayoḥ khadhanayoḥ khaśūnyayor vā vadhaḥ śūnyam || [34]¹

Das Produkt von einer negativen und einer positiven Zahl ist eine negative Zahl . [Das Produkt] von 2 negativen Zahlen ist eine positive Zahl. Das Produkt von positiven Zahlen ist eine positive Zahl. |

Das Produkt von 0 und einer negativen Zahl, von 0 und einer positiven Zahl, oder von 0 und 0, ist 0. || (BSS p. 244)

1 Die vorliegende Textfassung gründet sich an mehreren Stellen auf Lesarten, die in BSS zwar angegeben werden, aber nicht im konstituierten Text erscheinen, der stattdessen – sprachlich gesehen und auch vom Sinn her – unverwertbare Varianten enthält.

In dieser Weise spielt Brahmagupta auch für die Addition, die Subtraktion, die Division, das Quadrieren und das Wurzelziehen alle Möglichkeiten durch, die sich bei Anwendung dieser Operationen auf positive und negative Zahlen und auf die Null ergeben. Die Null ist für Brahmagupta – so wie in der modernen Mathematik – weder positiv noch negativ.

Im Falle der Division durch 0 weicht er von den uns geläufigen Rechenregeln ab, wodurch sich Widersprüche in sein Regelsystem einschleichen. Doch dies soll hier nicht weiter erörtert werden.

Bhāskara II (12. Jh.) behandelt in seinem Bījagaṇita das Rechnen mit negativen und positiven Zahlen auf ähnlich abstrakte Weise wie Brahmagupta.

Es gibt jedoch einen späten Kommentar zu diesem Werk, nämlich den im 17. Jh. entstandenen Navāṅkura. Der Verfasser Kṛṣṇa Daivajña versucht dort, eine anschauliche Vorstellung davon zu geben, was negative Grössen sind. Die Beispiele, die er dazu heranzieht, bringt er auf einen gemeinsamen Nenner, indem er das *ṛṇatva*, also die “Negativität”, mit *vaiparītya* (“Gegensätzlichkeit”, “Umkehrung”) umschreibt (BG p. 8, Z. 6).

Dabei kann – so wie in dem folgenden Fall – die Gegensätzlichkeit darin bestehen, dass es sich bei einer positiven und der zugehörigen negativen Grösse um entgegengesetzt gerichtete Grössen handelt: *yathā pūrvagater dhanatva-kalpane yadā grahaḥ paścimagatir bhavati tadā grahe gatitulyakalā ṛṇam bhavati* – “... so wie, wenn man das Positiv-Sein der Bewegung nach Osten annimmt, die gleichvielen Bogenminuten der Bewegung bei einem Planeten dann eine negative Grösse sind, wenn sich der Planet nach Westen bewegt” (BG p. 8, Z. 10f).

Die Möglichkeit, *ṛṇa* und *dhana* im Sinne des Kommentators als gerichtete Grössen aufzufassen, besteht auch dann, wenn man die Begriffe im merkan-tilen Sinne versteht. Auch der Kapitalfluss hat schliesslich eine Richtung: *ato devadattasvāmike dhane yāvad yajñadattasvāmikatvaṃ tāvad devadattasyaṇam iti vyavahriyate* – “Daher nennt man, wenn Devadatta Besitzer eines Vermögens ist, soviel die Schuld Devadattas, wieviel Yajñadatta [davon] besitzt” (BG p. 8, Z. 15f).

Inwiefern die Einführung negativer Grössen die Lösung mathematischer Probleme erleichtert, ergibt sich aus einer Stelle in Bhāskaras Līlāvātī, auf die Kṛṣṇa Daivajña hinweist: *yata uktam ācāryair līlāvatyām kṣetravyavahāre ...* (BG p. 8, Z. 6f). Es geht dort um die Bestimmung des Flächeninhalts eines Dreiecks, von dem alle 3 Seitenlängen bekannt sind (Lil 1927 p. 108f u. Appendix p.

61²). Da der Flächeninhalt nach der Formel *Grundseite · Höhe : 2* berechnet wird, versucht Bhāskara zunächst, die Länge der Höhe zu bestimmen, die senkrecht auf der Grundseite steht. Diese Höhe kann innerhalb des Dreiecks liegen (Fall A) oder ausserhalb (Fall B).

Eine Formel, mit der man die Höhe im Fall A berechnen kann, hatte Bhāskara bereits an früherer Stelle hergeleitet und anhand eines konkreten Zahlenbeispiels ausprobiert. (Lil 1927 p. 106f u. Appendix p. 61 [Verse 163-165] = Lil 1937 p. 153f [Verse 165-167]). Sein Ansatz zur Gewinnung dieser Formel, den auch BANERJI in Lil 1927 (p. 107) erläutert, soll im folgenden skizziert werden:

Die Längen der Seiten a , b und c des Dreiecks in Abb. 1 seien bekannt.

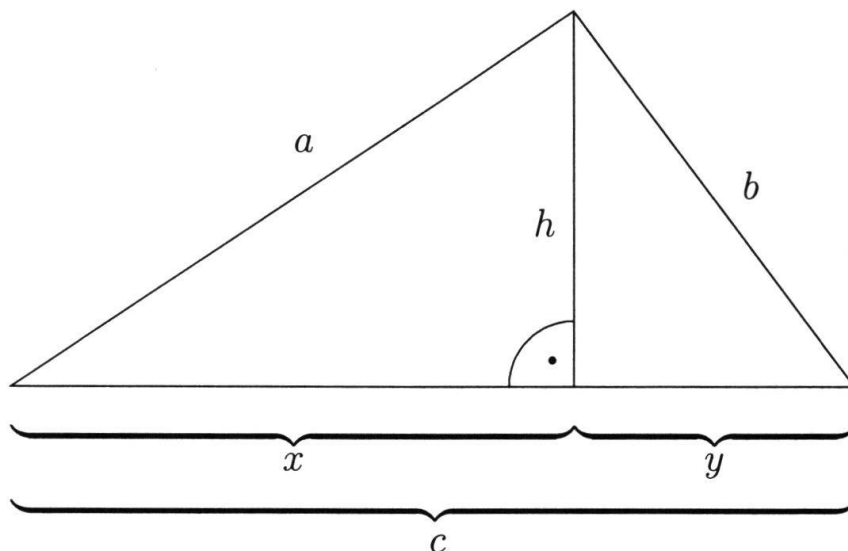


Abb. 1

Die Höhe h teilt die Grundseite in 2 Teilstrecken x und y , so dass sich 2 rechtwinklige Dreiecke (mit den Seiten a , x und h bzw. h , y und b) ergeben. Auf diese beiden Dreiecke wendet man den Satz des Pythagoras an (wobei die ursprünglich zur Bezeichnung der Dreieckseiten verwendeten Kleinbuchstaben nun für die Zahlenwerte ihrer Längen stehen sollen):

- 2 Es handelt sich nach dieser Ausgabe um Vers 166 und die zugehörige Passage der Vāsanā (Bhāskaras Anmerkungsteil zu den Versen der Līlāvātī). In Lil 1937 und Lil 1975 hat dieser Vers die Nummer 168. In Lil 1975 fehlt gerade der Teil der Vāsanā zu diesem Vers, den Kṛṣṇa Daivajña zitiert.

$$\begin{array}{r} a^2 = x^2 + h^2 \\ b^2 = y^2 + h^2 \\ \hline a^2 - b^2 = x^2 - y^2 \end{array}$$

Mit $x^2 - y^2 = (x + y)(x - y)$ folgt also

$$\frac{a^2 - b^2}{\underbrace{x + y}_{=c}} = x - y. \quad ^3$$

Nun gilt:

$$\begin{aligned} c + x - y &= x + y + x - y = 2x \\ c - (x - y) &= x + y - (x - y) = 2y \end{aligned}$$

$$\Rightarrow x = \frac{c + x - y}{2} = \frac{c + \frac{a^2 - b^2}{c}}{2} (*) \text{ und } y = \frac{c - (x - y)}{2} = \frac{c - \frac{a^2 - b^2}{c}}{2} (**)$$

Wir können also h durch a , b und c ausdrücken. Aus $b^2 = y^2 + h^2$ folgt mit Hilfe von (**):

$$h = \sqrt{b^2 - y^2} = \sqrt{b^2 - \left(\frac{c - \frac{a^2 - b^2}{c}}{2} \right)^2}.$$

Wie Abb. 2 zeigt, scheint Fall B eine völlig andere Vorgehensweise zur Berechnung von h zu erfordern.

3 Als Divisor in dem Bruch auf der linken Seite dieser Gleichung gibt BANERJI in Līl 1927 (p. 107) fälschlicherweise $x^2 - y^2$ an.

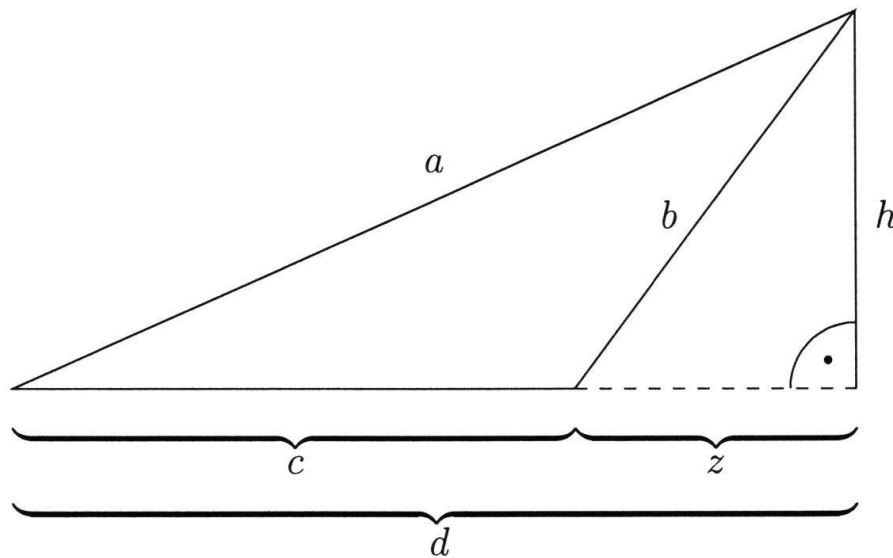


Abb. 2

Die Längen der Seiten a , b und c seien wieder als bekannt vorausgesetzt. z ist die Verlängerung von c bis zum Fusspunkt von h . Kennt man die Länge von z , kann man die von h mit dem Satz des Pythagoras bestimmen. Die in Fall A ermittelten Formeln für x und y nützen einem hier scheinbar nichts. Bei näherer Betrachtung (s. Tab. 1) entdeckt man aber in Fall B Strecken, deren jeweilige geometrische Funktion sich mit der von x bzw. y deckt.

Tab. 1

	Fall A	Fall B
Strecke, die vom Fusspunkt der Höhe zum linken Eckpunkt des Dreiecks verläuft	x	d
Strecke, die vom Fusspunkt der Höhe zum rechten Eckpunkt des Dreiecks verläuft	y	z

Es gibt jedoch einen wesentlichen Unterschied zwischen beiden Fällen: y liegt rechts und z links von der Höhe. Anhand eines Beispiels (vgl. Vers 168 nach der Verszählung in Līl 1937 bzw. 1975) verdeutlicht Bhāskara, was dieser Unterschied ausmacht:

*ṛṇābādhodāharaṇam – daśasaptadaśapramau bhujau tribhuje yatra navapramā mahī |
abadhe vada lambakaṃ tathā gaṇitaṃ gāṇitika āśu tatra me || [168] (= [166] in Līl 1927)*

“Ein Beispiel für eine Teilstrecke als negative Grösse: In einem Fall, in dem bei einem Dreieck die Grundseite 9 (= c) beträgt und die beiden [anderen] Seiten 17 (= a) und 10 (= b), | nenne mir, oh Rechenmeisterin, schnell die beiden Teilstrecken (z und d), die Höhe (h) und die berechnete [Fläche].”⁴ ||

Wie Bhāskara im darauffolgenden Kommentar erklärt, läuft die Berechnung von z (wobei mit z – so wie im Falle der anderen Streckenbezeichnungen – wieder zugleich die zugehörige Masszahl gemeint sein soll) auf ein negatives Ergebnis hinaus, wenn man dieselbe Formel verwendet wie bei der Berechnung von y , der Entsprechung zu z im Sinne von Tab. 1:

$$z = \frac{c - \frac{a^2 - b^2}{c}}{2} = \frac{9 - 21}{2} = -\frac{12}{2} = -6$$

Was man auf diese Weise errechnet, kann nicht die (selbstverständlich positive) Masszahl der Länge von z sein. Entsprechend deutet Bhāskara im folgenden an, dass mit dem negativen Vorzeichen eine Richtungsangabe verbunden ist. z kann nämlich – ebenso wie y – als Masszahl der gerichteten Strecke aufgefasst werden, die vom Fusspunkt der Höhe zum rechten Eckpunkt des Dreiecks verläuft.⁵

anena bhūr ūnā na syāt. asmād eva bhūr apanītā śeṣārdham ṛṇagatābādḥā digvaiparītyenety arthaḥ. – “Die Grundseite dürfte wohl nicht um diese [21] vermindert werden. Davon wird die Grundseite abgezogen.⁶ Die Hälfte der Differenz⁷ ist eine Teilstrecke, die wegen der Umkehrung der Richtung den negativen Grössen angehört. Das ist der Sinn.” (Lil 1937 p. 155)

“Umkehrung der Richtung” bedeutet dabei offenbar, dass z zwar – so wie y – vom Fusspunkt der Höhe zum rechten Eckpunkt des Dreiecks verläuft, aber links von der Höhe liegt. Wann die Masszahl der gerichteten Strecke, die vom

4 So wie COLEBROOKE ergänze ich sinngemäss *kṣetram* hinter *ganitam* (vgl. Lil 1927 p. 108).

5 Eine solche gerichtete Strecke ist – modern ausgedrückt – ein Ortsvektor, dessen Ursprung im Fusspunkt der Höhe liegt.

6 Statt $9 - 21$ rechnet man also $21 - 9$, um den Betrag der Differenz zu ermitteln. Wie auch später seine Formulierung des Ergebnisses zeigt, fasst Bhāskara die Aufgabe so auf, dass nur nach dem Zahlenwert der Länge von z gefragt ist.

7 d.h. die Hälfte von $c - \frac{a^2 - b^2}{c}$.

Fusspunkt der Höhe zum rechten bzw. linken Eckpunkt des Dreiecks verläuft, positiv oder negativ ist, ergibt sich aus der folgenden Tabelle:

Tab. 2

	Eckpunkt liegt links von der Höhe	Eckpunkt liegt rechts von der Höhe
gerichtete Strecke, die vom Fusspunkt der Höhe zum linken Eckpunkt des Dreiecks verläuft	+	–
gerichtete Strecke, die vom Fusspunkt der Höhe zum rechten Eckpunkt des Dreiecks verläuft	–	+

Wenn man bei z vom Richtungsaspekt absieht, bleibt nur der Zahlenwert der Länge (= 6) übrig. Das Ergebnis der in Vers 168 gestellten Aufgabe lautet daher: *tathā jāte ābādhe. 6. 15. ata ubhayatrāpi jāto lamvaḥ. 8. phalam. 36.* – “Somit [betragen] die beiden entstandenen Teilstrecken 6 (= z) und 15 (= d). Daher [beträgt] in beiden Fällen (d.h. unabhängig davon, welche Teilstrecke man zur Berechnung verwendet) die ermittelte Höhe 8 (= h). Das Resultat (d.h. der Zahlenwert des Flächeninhalts) [beträgt] 36.” (Lil 1927 Appendix p. 62)

Wie das Beispiel zeigt, können die durch die Höhe abgegrenzten Strecken (x und y bzw. d und z) ohne Fallunterscheidung je nach der Lage der Höhe (innerhalb oder ausserhalb des Dreiecks) berechnet werden. Die beiden Formeln für x und y in Fall A genügen. Ausser diesem praktischen Nutzen ist mit der Berücksichtigung negativer Grössen auch ein Informationsgewinn verbunden: Bei der Berechnung der durch die Höhe abgegrenzten Strecken ist das Ergebnis die Masszahl der gerichteten Strecke, die vom Fusspunkt der Höhe zum linken (rechten) Eckpunkt des Dreiecks verläuft. Im Falle eines positiven Ergebnisses liegt die betreffende Strecke links (rechts) und im Falle eines negativen Ergebnisses rechts (links) von der Höhe. Die Kennzeichnung als “positiv” oder “negativ” lässt also die relative Lage der Strecke erkennen.

Literatur

- BG: *Bhāskarīyabījagaṇitam Kṛṣṇadaivajñaviracitanavāṅkuravyākhyāsahitam*. Ed. Vināyaka Gaṇeśa ĀPAṬE. (*Ānandāśramasaṃskṛtagranthāvali*; 99). Poona 1930.
- BSS: *Shri Brahmagupta Viracita Brāhma-Sphuṭa Siddhānta*. Text with various readings. Ed. Ramswarup SHARMA. Delhi 1968.
- DATTA, Bibhutibhusan und Avadhesh Narayan SINGH
1962 *History of Hindu Mathematics*. Parts I and II. Bombay.
- DEDEKIND, Richard
1932 *Gesammelte mathematische Werke*. Bd. 3, ed. Robert FRICKE et al. – Braunschweig.
- ELFERING, Kurt
1985 Die negativen Zahlen und die Rechenregeln mit ihnen bei Brahmagupta. In: *Mathemata. Festschrift für Helmuth Gericke*, ed. Menso FOLKERTS und Uta LINDGREN. (*Boethius. Texte und Abhandlungen zur Geschichte der exakten Wissenschaften*; XII). Stuttgart. p. 83-86.
- Līl[āvatī]
1927 *Colebrooke's Translation of the Līlāvatī*. With notes by Haran Chandra BANERJĪ. Calcutta.
- 1937 *Buddhivilāsinīlīlāvatīvivarāṇākhyāṭikādvayopetā Śrīmadbhāskarācārya-viracitā Līlāvatī*. Ed. Vināyaka Gaṇeśa ĀPAṬE. (*Ānandāśramasaṃskṛtagranthāvali*; 107). Poona.
- 1975 *Līlāvatī of Bhāskarācārya with Kriyākramakarī of Śaṅkara and Nārāyaṇa*. Critically edited with Introduction and Appendices by K.V. SARMA. (*Vishveshvaranand Indological Series*; 66). Hoshiarpur.
- MARTZLOFF, Jean-Claude
1997 *A History of Chinese Mathematics*. Berlin/Heidelberg.

