Zeitschrift: IABSE congress report = Rapport du congrès AIPC = IVBH Kongressbericht

Band: 1 (1932)

Rubrik: Participants in the discussion of question II2

Troisième question de discussion (proposée par M. Ritter) : Dans le calcul des moments fléchissants, doit-on employer le coefficient de Poisson $m = 4$, ou est-il justifié d'adopter pour ce coefficient une valeur plus élevée et pourquoi?

En ce qui concerne le coefficient d'allongement transversal m il faut toujours distinguer entre :

$$m_{\text{élast.}} = m = \varepsilon : \varepsilon_q \text{ et}$$
$$m_{\text{total}} = m = \delta : \delta_q$$

1. — Si l'on calcule le coefficient d'allongement transversal à partir des déformations élastiques mesurées, donc $m_{\text{élast.}} = m$, c'est-à-dire la deuxième constante de la théorie de l'élasticité, on obtient pour le béton une valeur qui diminue lorsque la contrainte croît ; pour la compression, par exemple, m diminue de $m = 6$ à $m = 4$ (voir rapport du Dr. Gehler au Congrès pour l'Essai des Matériaux de Zurich, 1931, page 1095). Il faut toutefois observer ici que l'on ne peut employer ce mode de calcul que tant que les déformations η permanentes restent relativement faibles, donc, pour les poutres en béton armé, environ jusqu'à la charge utile.

2. — Si, par contre, on détermine les valeurs de :

$$m_{\text{total}} = m = \delta : \delta_q$$

on constate, au voisinage de la charge de rupture, que les valeurs de δ augmentent plus que celles de δ_q et que par suite les valeurs de m augmentent lorsque la charge croît.

3. — Quel coefficient d'allongement transversal convient-il d'adopter pour le calcul d'une dalle, $m_{\text{élast.}}$ ou m_{total} ?

On ne peut indiquer de règle déterminée que pour $m_{\text{élast.}} = m$, c'est-à-dire pour le cas où l'on se limite au domaine élastique (stade I de nos essais de dalles). Pour le stade II, on se trouve dans des conditions très peu claires, par suite de l'intervention des influences de déformation plastique partielle.

Conclusion : La réponse à la question de M. Ritter est donc la suivante : Pour le calcul des moments fléchissants dans les dalles de béton armé, il faut adopter le coefficient d'allongement transversal $m = 6$.

Participants à la discussion.
Diskussionsteilnehmer.
Participants in the discussion.

Dr.-Ing. F. SCHLEICHER,
Professor an der Technischen Hochschule, Hannover.

I. — Ueber die Steifigkeit der quadratischen Eisenbetonplatten.

Es ist interessant, die Durchbiegungen der freiaufliegenden, an den Ecken festgehaltenen quadratischen Platten mit den theoretischen Werten für die isotrope Platte zu vergleichen. Der Elastizitätsmodul wäre dabei von den Biegungsversuchen mit den Plattenstreifen zu entnehmen, über die im Vorbericht leider noch keine näheren Angaben gemacht sind.

Nach A. Nádai[1] ist die grösste Durchbiegung einer gleichmässig belasteten isotropen quadratischen Platte von der Seitenlänge a für die oben genannten Randbedingungen gleich

$$f = 0{,}00406 \frac{p\,a^4}{D}. \tag{1}$$

Der Elastizitätsmodul E des Plattenmaterials, der praktisch mit der Grösse

$$E' = \frac{m^2 \cdot E}{m^2 - 1} = 0{,}0487 \frac{p\,a^4}{f\,h^3} \tag{2}$$

übereinstimmt[2], kann bei Gültigkeit des Hooke'schen Gesetzes aus den « Kennziffern » δ für die Durchbiegungen berechnet werden. Für die Reihen 1 bis 4 der Dresdner Versuche (vgl. Seite 210 des Vorberichtes) erhält man aus Gl. 2

Stadium I	$E' =$	197	232	200	200	im Mittel	207	t/cm²
Stadium II	$E' =$	21,1	24,9	20,0	26,5	im Mittel	23,1	t/cm²

Der Vergleich mit den Plattenstreifen ist mit den im Vorbericht angegebenen Daten leider noch nicht möglich. Es können aber schon jetzt die Unterschiede zwischen den Stadien I und II studiert werden.

Der mittlere Wert $E' = 207$ t/cm² des Elastizitätsmoduls für die isotrope Platte ohne Risse entspricht wohl dem, was zu erwarten ist. Dagegen ist die Steifigkeit nach Eintritt der Risse wesentlich kleiner, als man für eine isotrope Platte erwarten würde.

Nimmt man für einen Ueberschlag an, dass die Risse im Stadium II alle bis an die Nullinie reichen, dann hat man für die Plattensteifigkeit in den üblichen Bezeichnungen

$$D = E' \left(\frac{x^3}{3} + n\,F_e\,(h - x)^2\right) = E'.\,\psi\,d^3, \tag{3}$$

gegenüber dem Wert

$$D = E'.\ 0{,}0833.\ d^3 \text{ im Stadium I.} \tag{4}$$

Wenn die Platte auch nach Eintritt der Risse noch wie eine isotrope Platte wirken würde, d. h. mit den gleichen Eigenschaften wie im Stadium I, nur mit ent-

Reihe	d cm	h/d	bh/F_e	x/h für $n = 6$	J_I/J_{II} für $n = 6$	x/h für $n = 15$	J_I/J_{II} für $n = 15$	δ_{II}/δ_I beobachtet
1	12	0,858	229	0,205	6,8	0,302	3,2	9,3
2	10	0,830	185	0,224	6,3	0,330	3,0	9,3
3	12	0,858	263	0,192	7,6	0,285	3,6	10,0
4	12	0,850	200	0,217	6,2	0,321	3,0	7,6
Mittelwerte					6,7		3,2	9,1

sprechend verminderter Steifigkeit, so müsste die Zunahme der Durchbiegungen etwa in den Grenzen bleiben, die aus der nicht mehr mitwirkenden Zugzone folgen.

1. A. Nádai, Elastische Platten, Berlin, 1925, Seite 127.
2. Der Unterschied zwischen E und E′ beträgt für $m = 6$ nur 3 %.

Für die Verhältnisse der Dresdner Versuchsreihen 1 bis 4 ergeben sich die folgenden Werte.

Die Zahlen für $n = 6$ stellen wohl eine extreme Grenze dar, die durch die wirklichen Verhältnisse kaum überschritten wird. Wenn die Zugzone nicht ganz gerissen ist, werden die Verhältniszahlen für J_I / J_{II} etwas kleiner sein als die obigen Werte. Der Unterschied gegenüber der Beobachtung wird dann noch etwas grösser. Schätzt man das Verhältnis der Steifigkeiten im Mittel gleich $J_I/J_{II} = 5$, so wäre der Unterschied 9 gegen 5 aufzuklären.

Der beobachtete Unterschied wird teilweise dadurch erklärt, dass der Elastizitätsmodul des Betons mit steigenden Spannungen abnimmt. In der Hauptsache ist er jedoch nur dadurch zu erklären, dass die Platte nach Eintritt der Risse nicht mehr als isotrope Platte wirkt, sondern als Trägerrost ohne nennenswerte Drillungssteifigkeit.

Die Durchbiegung des Trägerrostes ist etwa doppelt so gross, als die der isotropen Platte mit unverminderter Drillungssteifigkeit. Für den Trägerrost ist also eine rd. zweimal so grosse Kennziffer δ_{II} für die Durchbiegung als beim isotropen Anfangszustand zu erwarten. Rechnet man nach Obigem eine Verminderung der Steifigkeit durch die Risse auf 1/5 des ursprünglichen Betrages, so wird die Kennziffer nach Risseeintritt insgesamt rd. 10 mal so gross als für die Platte im Stadium I, was genügend mit der Beobachtung übereinstimmt. Der noch verbleibende Unterschied ist dadurch erklärt, dass in der Platte neben Gebieten ohne Drillungssteifigkeit auch noch solche mit einer gewissen Drillungssteifigkeit vorhanden sind, ausserdem reisst die Zugzone nicht überall gleichmässig tief ein.

Der verschiedene Charakter der Biegungsflächen für die Stadien I bezw. II müsste übrigens bei Messung der Durchbiegungen leicht festgestellt werden können, da die Biegungsformen für den Trägerrost in den Ecken der Platte voller sind als für die isotrope Platte.

II. — Bemerkung über die Knickung von Eisenbetonplatten.

Bei den dünnen Platten der neuzeitlichen Eisenbetonkonstruktionen ist in manchen Fällen auch die Stabilität zu untersuchen.

Für eine isotrope Eisenbetonplatte mit gleichmässigen Druckspannungen, die an allen vier Rändern gelenkig gelagert ist, ergibt sich im elastischen Bereich mit $E = 200$ t/cm² und $m = 6$ eine kleinste Knickspannung von

$$\text{5)} \qquad {}_{\min}\sigma_K^{el} = 675\,(h/b)^2, \text{ in t/cm}^2.$$

Nach dieser Gleichung folgt ${}_{\min}\sigma_K^{el} = 0{,}2$ t/cm², wenn die Plattenbreite $b = 58\,h$ ist, und ${}_{\min}\sigma_K^{el} = 0{,}1$ t/cm² für $b = 82\,h$.

Für das Stadium II, nach Eintritt der Risse, ist die Steifigkeit der Platte nach dem Referat Gehler nur noch etwa 1/9 des Wertes für die Platte ohne Risse. Nimmt man an, dass auch für die Knickung im Stadium II noch mit genügender Genauigkeit die Gleichung für isotrope Platten verwendet werden kann, so wird mit $D_{II}/D_I = 1/9$ als Knickspannung etwa

$$\text{6)} \qquad {}_{\min}\sigma_K^{el} = 75\,(b/h)^2, \text{ in t/cm}^2,$$

gefunden. Der dabei vorausgesetzte Zustand II wird eintreten, wenn ausser den Druckspannungen (gleichzeitig oder früher) auch Biegungsspannungen wirken, die die Rissgrenze überschreiten. In solchen Fällen kann man die Gl. 6 wohl mit genügender Genauigkeit für eine erste Schätzung der Grössenordnung benutzen. Es ergeben sich danach die folgenden grösstzulässigen Plattenbreiten :

$$\min \sigma_K^{el} = \quad 0{,}2 \quad 0{,}1 \quad 0{,}05 \text{ t/cm}^2 \text{ für}$$
$$b/h = \quad 19 \quad 27 \quad 39.$$

Man erkennt daraus, dass die Stabilität durchaus nicht so gross ist, als man erwarten würde. Bei der Schätzung dieser Zahlen ist dabei weder die Abminderung der Knickspannungen im unelastischen Bereich, noch die Abnahme des Elastizitätsmoduls mit steigenden Spannungen berücksichtigt.

Auch bei den dünnwandigen Schalen und Kuppeln ist es manchmal notwendig, auf die Stabilität zu achten, wobei unter Umständen die unvermeidlichen Abweichungen von der theoretischen Form eine Rolle spielen können.

Traduction.

1. — Rigidité des dalles carrées en béton armé.

Il est intéressant de faire une comparaison entre les fléchissements qu'accusent les dalles carrées reposant librement sur leurs appuis, avec fixation aux angles, et les valeurs théoriques obtenues pour la dalle isotrope. Le module d'élasticité devrait en outre être calculé à partir des résultats des essais effectués sur des tranches élémentaires, question qui n'a fait l'objet d'aucune indication précise au cours des Rapports Préliminaires.

Suivant A. Nádai [1] le fléchissement maximum d'une dalle carrée isotrope chargée uniformément, ayant une longueur a, et soumise aux conditions périphériques indiquées plus haut est donné par l'expression :

$$f = 0{,}00406 \frac{p\,a^4}{D} \qquad (1)$$

Le module d'élasticité E du matériau constituant cette dalle et dont la valeur concorde en pratique avec la valeur [2] :

$$E' = \frac{m^2 \cdot E}{m^2 - 1} = 0{,}0487 \frac{p\,a^4}{f\,h^3} \qquad (2)$$

peut être calculé à partir des chiffres caractéristiques pour les fléchissements, en considérant la loi de Hooke comme valable. Pour les séries 1 à 4 des essais de Dresde (voir page 210 de la Publication Préliminaire), on obtient en appliquant l'équation (2) :

Phase I : $E' =$ 197 232 200 200 moyenne 207 t/cm²

Phase II : $E' =$ 21,1 24,9 20,0 26,5 moyenne 23,1 t/cm²

Malheureusement, il n'est pas encore possible d'établir, avec les chiffres indiqués dans la Publication Préliminaire, la comparaison pour les tranches élémentaires de dalles. On peut toutefois étudier dès maintenant les différences entre les phases I et II.

1. A. Nadai, Elastische Platten, Berlin, 1925, p. 127.
2. L'écart entre E et E', pour $m = 6$, n'est que de 3 %.

La valeur moyenne $E' = 207$ t/cm² du module d'élasticité, pour la dalle isotrope sans fissure, correspond bien à ce que l'on peut prévoir. Par contre, la rigidité après fissuration est sensiblement plus faible que l'on ne pourrait le prévoir pour une dalle isotrope.

Si l'on suppose à titre d'approximation que dans la phase II, les fissures s'étendent toutes jusqu'à la ligne neutre, on a pour la rigidité de la dalle, avec les désignations courantes :

$$D = E'\left(\frac{x^3}{3} + n\, F_e\, (h - x)^2\right) = E'\, \psi\, d^3 \qquad (3)$$

alors que pour la phase I, on a :

$$D = E' \,.\, 0{,}0833\, d^3 \qquad (4)$$

Si la dalle se comportait, même après apparition des fissurations, encore comme une dalle isotrope, c'est-à-dire suivant les mêmes propriétés que dans la phase I, mais avec une rigidité réduite en proportion, l'accroissement du fléchissement resterait à peu de chose dans des limites correspondant à la zone de traction, qui d'ailleurs est hors de cause.

Dans les conditions qui correspondent aux séries 1 à 4 des essais de Dresde, on obtient les valeurs suivantes :

Série	d cm	h/d	bh/F_e	x/h pour $n = 6$	J_I/J_{II} pour $n = 6$	x/h pour $n = 15$	J_I/J_{II} pour $n = 15$	δ_{II}/δ_I observés
1	12	0,858	229	0,205	6,8	0,302	3,2	9,3
2	10	0,830	185	0,224	6,3	0,330	3,0	9,3
3	12	0,858	263	0,192	7,6	0,285	3,6	10,0
4	12	0,850	200	0,217	6,2	0,321	3,0	7,6
Valeurs moyennes					6,7		3,2	9,1

Les chiffres qui correspondent à $n = 6$ représentent une marge extrême qui doit être à peine dépassée dans des conditions pratiques effectives. Si la zone de traction n'est pas entièrement fissurée, les coefficients correspondant à J_I/J_{II} seront légèrement plus faibles que les valeurs ci-dessus. L'écart par rapport aux observations sera donc encore un peu plus accentué. Si l'on admet pour le rapport des rigidités au milieu

$$J_I/J_{II} = 5$$

l'écart s'établira à 9 au lieu de 5.

L'écart observé s'explique en partie de ce fait que le module d'élasticité du béton diminue lorsque la contrainte augmente. Toutefois, il ne s'explique, dans l'ensemble, que parce que la dalle ne se comporte plus comme une dalle isotrope après l'apparition de la fissuration, mais plutôt comme un système de tranches perpendiculaires ne possédant aucune rigidité de torsion déterminée.

Le fléchissement de ce système est à peu près le double de celui qu'accuserait une dalle isotrope admettant une rigidité de torsion intégrale. Il faut donc tabler, pour ce système, sur un chiffre caractéristique δ_{II} environ deux fois plus élevé que pour le fléchissement correspondant à l'état d'isotropie. Si d'après ce qui précède, on compte la réduction de la rigidité, par suite de la fissuration, comme atteignant le 1/5 de la valeur initiale, on arrivera, après la fissuration, à un chiffre caractéristique environ 10 fois plus élevé que pour la dalle lorsqu'elle se trouvait dans la phase I, résultat qui concorde suffisamment bien avec les observations. La différence qui subsiste s'explique de ce fait qu'il existe dans la dalle, à côté de régions ne possédant aucune rigidité de torsion, des régions qui accusent encore pour cette rigidité une certaine valeur ; en outre la zone de traction ne subit pas partout une fissuration d'une profondeur uniforme.

La différence d'allure entre les déformations de fléchissement dans les phases I et II devrait d'ailleurs pouvoir être mise en évidence facilement par la mesure, car les surfaces de déformation que prend ce système de tranches perpendiculaires dans les angles de la dalle, sont plus nettement accusées que dans le cas de la dalle isotrope.

2. — Remarque sur le flambage des dalles en béton armé.

Dans les dalles minces que l'on emploie pour les constructions en béton armé modernes, il importe d'étudier, dans de nombreux cas, la question de la stabilité.

Si l'on considère une dalle isotrope en béton armé soumise à des contraintes uniformément réparties et admettant des appuis articulés sur ses quatre bords, la contrainte minimum de flambage, dans le domaine élastique, avec $E = 200$ t/cm² et $m = 6$ est de

$$_{\min}\sigma_k^{el} = 675\ (h/b)^2 \text{ en t/cm}^2 \tag{5}$$

D'après cette relation, pour une largeur de dalle

$$b = 58\ h \qquad \text{on obtient :}$$

$$_{\min}\sigma_K^{el} = 0{,}2\ \text{t/cm}^2$$

Et pour

$$b = 82\ h \qquad \text{on obtient :}$$

$$_{\min}\sigma_K^{el} = 0{,}1\ \text{t/cm}^2$$

En ce qui concerne la phase II et après apparition de la fissuration, d'après le rapport de M. Gehler, la rigidité de la dalle n'est plus que le 1/9 de la valeur qui correspond pour cette dalle à l'absence de fissuration. Si l'on admet que même pour le flambage dans la phase II, on puisse employer l'équation des dalles isotropes avec une précision suffisante, on aura, avec $D_{II}/D_I = 1/9$ comme contrainte de flambage,

$$_{\min}\sigma^{el} = 75\ (b/h)^2, \text{ en t/cm}^2 \tag{6}$$

Le passage à la phase II, ici admis, se produira lorsqu'aux contraintes de compression viendront s'ajouter, simultanément ou ultérieurement, des contraintes de flexion telles que la limite de fissuration se trouve dépassée. En pareil cas, on peut pour une première estimation de l'ordre de grandeur, faire appel avec une précision suffisante à l'équation (6). On en déduit pour les largeurs des dalles ci-dessous, les valeurs maxima admissibles suivantes :

$$
\begin{array}{lllll}
{}_{mn}\sigma_{el} = & 0{,}2 & 0{,}1 & 0{,}05 \text{ t/cm}^2 \text{ pour :} \\
b/h = & 19 & 27 & 39
\end{array}
$$

On voit que la stabilité n'est pas tout à fait aussi élevée que l'on pourrait prévoir. Dans l'estimation approximative de ces valeurs, on ne tient compte ni de la diminution des contraintes de flambage dans le domaine élastique, ni de la diminution que subit le module d'élasticité lorsque les contraintes croissent.

Dans les coupoles et les voûtes minces elles-mêmes, il est fréquemment nécessaire de veiller à cette considération de stabilité, car dans certains cas, les dérogations qu'il est impossible d'éviter par rapport aux formes théoriques peuvent intervenir dans des proportions importantes.

Dr. Ing. M. HUBER,
Professeur à l'École Polytechnique, Varsovie.

I. — Die wirtschaftliche Ausnutzung der statischen Wirkung der Pilzdecken erfordert eine möglichst genaue Erforschung ihres Formänderungs- und Spannungszustandes im Zusammenhange mit dem Sicherheitsgrade bei jeder möglichen Belastungsart. In meinem Berichte habe ich versucht, den heutigen Stand des Problems einer zuverlässigen statischen Berechnung der Pilzdecken zu schildern. Ich bin mir bewusst, dass vielleicht manche schätzenswerte Ergebnisse und Arbeiten meiner Aufmerksamkeit entgangen sind und werde etwaige Beiträge der Herren Kongressteilnehmer gerne zur Kenntnis nehmen und prüfen. Ich bemerke aber dabei, dass gewisse Näherungstheorien und darauf gegründete Berechnungsverfahren vor vollkommeneren, wissenschaftlich besser begründeten Methoden zurückweichen müssen. Letztere wurden deshalb vor allem behandelt.

In der Einleitung meines Berichtes habe ich auf die zahlreichen Schwierigkeiten einer vollständigen und exakten Lösung des Problems hingewiesen und zwar :

1. Die steife Verbindung der Säulen mit der Deckenplatte.

Sie verursacht, dass bei unsymmetrischen Belastungen der Decke ihre allgemeine Biegung von der Säulenbiegung stark abhängig ist. Betrachtet man die Decke als « dünne », elastische, näherungsweise isotrope Platte, so wird die Lösung der klassischen Biegungsgleichung von Lagrange durch statisch unbestimmte Flächenstützung ausserordentlich erschwert.

2. Die ungleichförmige Biegungssteifigkeit der Decke und die Wirkung der Säulenkopfplatte.

Die Unterschiede der Biegungssteifigkeiten in verschieden orientiert gedachten Plattenstreifen sind zwar im Stadium I praktisch vernachlässigbar ; dieses gilt aber nicht immer im Stadium II, nach welchem bekanntlich die Sicherheit beurteilt wird. Die Säulenkopfplatte bildet eine plattenförmige, elastische Stützung dieser Deckenteile, welche ohne Kopfplatte ausserordentlich beansprucht wären.

3. Der starke Wechsel der Biegungssteifigkeit beim Uebergange in das Stadium II der Decke wirkt insofern erschwerend, als der neue (verminderte) Wert der Biegungssteifigkeit nur gewisse Teilgebiete der Plat-

tenfläche beherrscht. Infolgedessen wirkt die Decke etwa wie eine heterogene Platte, welche aus homogenen Flecken von verschiedener Stärke zusammengefügt ist.

Trotzdem führen die bisherigen Versuche mit Eisenbetonplatten in Deutschland (Stuttgart und Dresden) zu dem überraschenden Ergebnis, dass in guter Annäherung eine lineare Abhängigkeit der Durchbiegungen bezw. Formänderungen von den Belastungsgrössen (bezw. Spannungen) auch im Stadium II stattfindet. Abb. 1 zeigt diese Abhängigkeit, wobei die Durchbiegungen w als Abszissen und die Spannungen (bzw. Biegungsmomente und dgl.) als Ordinaten gemessen sind.

Ich glaube, dass die künftige Entwicklung der Theorie dieses Schema als Ausgangspunkt wählen wird.

II. — Die bisherigen Theorien und Berechnungsmethoden beziehen sich hauptsächlich auf das Stadium I und verfolgten den Zweck, die wirklichen Spannungen, welche von der Nutzlast herrühren, zu berechnen. Dabei dürfen die durch verschieden starke Bewehrung bedingten Unterschiede der Biegungssteifigkeiten in der Regel vernachlässigt werden, folglich kommt die klassische Theorie der dünnen isotropen Platten zur Anwendung.

Die entsprechenden, strengen Lösungen im Falle einer totalen, gleichförmigen Belastung einer unbegrenzten Platte, welche nach Abb. 2 gestützt ist, findet man bereits in einer halb vergessenen Arbeit von Lavoinne aus dem Jahre 1872. Die Ergebnisse sind in den Formeln (3 bis 7) zusammengestellt. Die nach diesen Formeln errechneten Momentwerte sind in den Abb. 3 und 4 übersichtlich dargestellt.

Die Lösung im wichtigen in der Abb. 5 dargestellten Belastungsfalle verdankt man der Arbeit [1, 2] von Dr. Lewe, welcher auch gebrauchsfertige Tabellen für diesen und andere Fälle berechnet hat.

Obige Lösungen gelten nicht mehr für Deckenfelder, welche durch Umfassungswände gestützt sind. In diesen Fällen geben aber viele im Bericht zitierte Arbeiten entweder die fertige Lösung, oder es können die dort gefundenen Ergebnisse zur Lösung der in der Abb. 6 veranschaulichten Fälle verwendet werden.

Beispiele wichtiger Einzellösungen geben Abb. 7 mit der Formel (8) und Abb. 8 mit den Formeln (9) und (10). Ich möchte noch hinzufügen, dass Herr E. Melan [3] eine der Lösung (9) äquivalente Formel gefunden hat. Im Falle freier Auflagerung der kreisförmigen Ränder einer Pilzdecke ist freilich die Michell-Melansche Lösung nicht anwendbar. Angesichts dessen ist Herr K. Hajnal-Kónyi [4] von der Föpplschen [5] Lösung in Form einer Fourierschen Reihe ausgegangen, um die Stützkräfte und Biegungsmomente in praktisch

1. V. Lewe, Die Lösung des Pilzdeckenproblems durch Fouriersche Reihen. Bauingenieur, 1920, N° 22, 1922, N° 4, 10, 11.
2. V. Lewe, Pilzdecken, Berlin, 1926.
3. E. Melan, Die Durchbiegung einer exzentrisch durch eine Einzellast belasteten Kreisplatte (Eisenbau, 1920, N° 10).
4. K. Hajnal-Kónyi, Die Berechnung von kreisförmig begrenzten Pilzdecken, Berlin, 1929.
5. A. Föppl, Die Biegung einer kreisförmigen Platte, Sitzungsbericht der Akad. München, 1912, S. 155.
A. u. L. Föppl, Drang und Zwang, Bd. I, 2. Aufl., 1924.

wichtigen Spezialfällen zu berechnen. Die seiner Arbeit beigefügten Zahlentafeln erleichtern die praktische Anwendung.

III. — Es gibt aber sehr viele praktisch wichtige Stützungsbedingungen und Belastungsfälle, welche einer praktisch verwertbaren, exakten Lösung nicht zugänglich sind. Dann leistet die Methode der Differenzengleichungen in Verbindung mit der Methode der elastischen Gewebe von Herrn H. Marcus sehr gute Dienste. Es muss hier hervorgehoben werden, dass diese Methoden zur unmittelbaren Anwendung durch den Konstrukteur ebensowenig geeignet sind wie viele sehr verwickelte Lösungsformeln der strengen Theorie dünner Platten. Ihre Bedeutung beruht vielmehr darauf, dass sie zur Prüfung und Korrektur der rohen Annahmen in vereinfachten Berechnungsvorschriften bequem herangezogen werden können. (Die Arbeiten von Nielsen und Marcus.)

III, IV. — Bei der Berechnung der Säulen einer Pilzdecke wird die ungünstigste (gleichförmig verteilte) Belastung nach dem in Abb. 10 veranschaulichten Schema angenommen. Dem gegenüber zeigt Abb. 11 die ungünstigste Belastung für die positiven Biegungsmomente in der Mitte der Plattenfelder. Die grössten negativen Biegungsmomente in der Deckenplatte rings um die Säulenköpfe finden infolge einer totalen Belastung der betreffenden Decke statt.

Wenn man auf eine genauere Berechnung an Hand der Lösungen und Zahlentafeln von Lewe verzichten muss, so gibt die in meinem Berichte kurz skizzierte Methode des stellvertretenden Rahmens, welche besonders von Marcus entwickelt worden ist, eine gute Annäherung.

Als Beispiel einer Berechnung in erster Annäherung wurde endlich die Methode angeführt, welche in den Ver. Staaten von Amerika seiner Zeit als Grundlage für amtliche Vorschriften gedient hat. Diese gewissermassen « theoretisch-empirische » Methode beruht auf einfachen Betrachtungen des Gleichgewichts der äusseren und inneren Kräfte in einem Oktanten eines quadratischen Deckenfeldes (Abb. 13), als einem System von doppelter Symmetrie. Die Verallgemeinerung der Anwendung des Hauptergebnisses : $M_O = M_{(-)} + M_{(+)}$ auf rechteckige Plattenfelder dürfte aber nur dann als genügend angenähert gelten, wenn das Seitenverhältnis $a : b$ nicht viel von 1 abweicht.

Traduction.

I. — L'utilisation pratique des dalles à champignon nécessite une étude aussi précise que possible de leur régime de tensions et de déformations, en faisant intervenir le coefficient de sécurité et pour chaque mode possible d'application des charges. Dans mon rapport, je me suis efforcé de montrer l'état actuel du problème que constitue le calcul rationnel des dalles à champignon. Quelques travaux intéressants m'ont certainement échappé et je serai heureux de prendre connaissance des communications que feront MM. les Congressistes à ce sujet. Je dois toutefois signaler que certaines théories approchées et certaines méthodes de calcul basées sur ces théories doivent laisser place à des méthodes reposant sur des bases plus exactes. Ce sont ces dernières que nous avons principalement étudiées.

Dans l'Introduction de mon rapport, j'ai attiré l'attention sur les nombreuses difficultés que présente la solution complète et exacte du problème et qui sont les suivantes :

1° La connexion rigide entre les colonnes et les dalles.

Elle a pour conséquence, dans le cas des charges dissymétriques, que la flexion des dalles dépend étroitement de la déformation des poteaux ; si l'on considère le plancher lui-même comme une dalle isotrope élastique mince, la solution de l'équation classique de la flexion d'après Lagrange est rendue considérablement plus difficile, par suite de ce soutènement superficiel statiquement indéterminé.

2° La flexibilité variable de la dalle et l'influence des chapiteaux couronnant les colonnes.

Les différences de rigidité dans des tranches élémentaires d'orientations différentes sont négligeables, en pratique, dans le stade I ; il n'en est toutefois pas toujours de même dans le stade II, d'après lequel se trouve défini le coefficient de sécurité. Le chapiteau forme un soutènement élastique plan, pour les parties du plancher qui subiraient sans lui des efforts très élevés.

3° Le changement dans la rigidité au moment du passage dans le stade II complique le problème, étant donné que la nouvelle valeur réduite de la rigidité ne se rapporte qu'à certaines zones du plancher. Il en résulte que le plancher se comporte en quelque sorte comme une dalle hétérogène, constituée par des parties de différentes épaisseurs.

Les essais effectués jusqu'à maintenant en Allemagne (Dresde et Stuttgart) conduisent toutefois à ce résultat surprenant que, avec une approximation assez bonne, on peut admettre pour le stade II également, une relation linéaire entre les fléchissements (ou les déformations) et les valeurs des charges (ou tensions). La figure 1 met en évidence cette relation ; les fléchissements w sont portés en abscisses et les efforts (moments fléchissants) en ordonnées.

J'estime que le développement ultérieur de la théorie des dalles-champignons sera basé sur cette relation.

II. — Les théories et méthodes de calcul présentées jusqu'à maintenant concernent principalement le stade I et ont pour but de permettre le calcul des tensions effectives qui se trouvent mises en jeu par suite de l'application de la charge utile. Dans ce cas, on peut négliger les différences de rigidité provenant des sections différentes des armatures et on en arrive à employer la théorie classique des dalles isotropes minces.

Les solutions correspondant au cas d'une charge absolument uniforme, répartie sur une dalle illimitée, avec appuis disposés ainsi que le montre la figure 2, ont déjà été exposées par Lavoinne, en 1872, dans un travail à moitié oublié ; les résultats sont groupés dans les formules 3 à 7. Les valeurs des moments calculés d'après ces formules sont représentées par les figures 3 et 4.

Nous sommes redevables au Dr Lewe [1, 2] (p. 190) de la solution correspondant au cas très intéressant que représente la figure 5. Le Dr Lewe a d'ailleurs établi des tables, tant pour ce cas que pour d'autres.

Les solutions qui précèdent ne sont plus valables pour des parties de la dalle qui reposent sur des murs de soutènement de pourtour. Dans ce dernier cas, de nombreux travaux cités dans le rapport donnent soit des solutions complètes, soit des résultats partiels qui peuvent être mis à contribution pour la solution des problèmes indiqués sur la figure 6.

La figure 7 et la formule 8, d'une part, la figure 8 et les formules 9 et 10, d'autre part, constituent des exemples intéressants de solutions particulières. Il faut ajouter ici que M. E. Melan a trouvé une formule [3] équivalente à la solution 9.

Dans le cas d'un appui libre de la périphérie circulaire d'une dalle-champignon, la solution de Michell-Melan ne peut évidemment pas être employée. C'est pourquoi M. Hajnal-Kónyi [4] s'est basé sur la solution de Föppl [5] présentée sous la forme d'une série de Fourier, pour calculer dans certains cas spéciaux de la pratique, les réactions sur les appuis et les moments fléchissants Les tableaux annexés à son étude en facilitent l'emploi pratique.

III. — Il existe toutefois, dans la pratique, de nombreux cas de charge et d'appui intéressants qui ne sont pas susceptibles de recevoir une solution pratique exacte. Ici, la méthode des équations à différences finies rend d'excellents services, en liaison avec la méthode du tissu élastique de M. H. Marcus. Il importe d'ailleurs de signaler ici que ces méthodes se prêtent mal à une utilisation par le constructeur lui-même ; il en est de même des nombreuses formules compliquées de la théorie exacte des plaques minces. Leur intérêt provient plutôt de ce qu'elles permettent le contrôle des hypothèses sur lesquelles sont basées les prescriptions simplifiées concernant le calcul pratique.

III. IV. Pour le calcul des poteaux d'un plancher-champignon, on suppose le cas le plus dangereux (charge uniformément répartie), suivant le schéma de la figure 10. La figure 11 indique la répartition de charge la plus dangereuse, pour des moments fléchissants positifs dans le milieu des panneaux. Les moments négatifs maxima tout autour de la tête du poteau se manifestent lorsque l'on charge toute la surface du plancher.

Si l'on ne peut pas effectuer un calcul plus exact, en se basant sur les solutions et sur les tableaux de Lewe, on pourra adopter la méthode des cadres suppléants, indiquée brièvement dans mon rapport et qui conduit à une bonne approximation ; cette méthode a été particulièrement développée par M. Marcus.

On a enfin choisi, à titre d'exemple d'un calcul de première approximation, la méthode qui a, en son temps, servi de base à l'établissement des Règlements Officiels aux États-Unis. Cette méthode, que l'on peut considérer à la fois comme théorique et empirique, repose sur les considérations simples de l'équilibre des tensions extérieures et intérieures dans la huitième partie du panneau

---

1. V. Lewe, Die Lösung des Pilzdeckenproblems durch Fouriersche Reihen. Bauingenieur, 1920, N° 22, 1922, N° 4, 10, 11.
2. V. Lewe, Pilzdecken, Berlin, 1926.
3. E. Melan, Die Durchbiegung einer exzentrisch durch eine Einzellast belasteten Kreisplatte (Eisenbau, 1920, N° 10).
4. K. Hajnal-Kónyi, Die Berechnung von kreisförmig begrenzten Pilzdecken, Berlin, 1929.
5. A. Föppl, Die Biegung einer kreisförmigen Platte, Situngsbericht der Akad. München, 1922, S. 155.

A. et L. Föppl, Drang und Zwang, vol. I, 2e édition, 1924.

carré (figure 13), considéré comme constituant un système de double symétrie. Toutefois, la généralisation de l'emploi du résultat principal

$$M_O = M_{(-)} + M_{(+)}$$

aux dalles rectangulaires ne doit être considérée comme donnant une approximation suffisante que lorsque le rapport entre les deux dimensions du rectangle ne s'écarte pas trop de l'unité.

Dr. M. RITTER,

Professor an der Eidgenössischen Technischen Hochschule, Zürich.

Die Versuche von Herrn Prof. Gehler mit rechteckigen, allseitig aufliegenden Eisenbetonplatten gewähren einen trefflichen Einblick in das statische Verhalten dieser Konstruktionen ; die Deutung der Versuchsergebnisse wird durch die Einführung der verschiedenen Kennziffern wesentlich erleichtert.

Von besonderer Wichtigkeit erscheinen mir die Kennziffern für die Einsenkung in Plattenmitte. Im Stadium I verhalten sich die kreuzweise bewehrten Platten praktisch wie isotrope Platten. Im Stadium II (Stadium der Rissebildung) steigt die Kennziffer der Einsenkung unvermittelt auf den sieben- bis neunfachen Betrag an. Diese grosse Zunahme der Kennziffer der Einsenkung lässt sich durch die Abminderung der Trägheitsmomente durch die Rissebildung des Betons allein nicht erklären und ist auch bei den vergleichsweise geprüften Plattenstreifen nicht vorhanden. Es ist wohl zu beachten, dass die bedeutende Zunahme der Kennziffer der Einsenkung bereits bei einer Belastung erfolgt, bei der die Eisenspannungen noch weit unterhalb der Fliessgrenze liegen. Für die Zunahme der Kennziffer der Einsenkung gibt es zwei verschiedene Erklärungsmöglichkeiten : Entweder kommt darin die sogenannte Membranwirkung der Platte zum Ausdruck oder die Ursache liegt in der Verminderung der Drillungssteifigkeit der Platte durch die Rissebildung. Es ist darauf hinzuweisen, dass sich die beobachteten Durchbiegungen aus der Abminderung der Trägheitsmomente im Verein mit der Verkleinerung der Drillungssteifigkeit infolge der Rissebildung zwanglos erklären lassen und für eine Membranwirkung meines Erachtens keine Anhaltspunkte vorliegen. Die Membranwirkung ist im Bruchstadium der Platte vielleicht vorhanden, ist jedoch ohne Bedeutung für die überraschend grosse Aenderung der Kennziffer der Durchbiegung im Stadium II.

Traduction.

Les essais effectués par M. le Professeur Gehler sur des dalles de béton armé rectangulaires, reposant sur leurs quatre côtés, permettent d'obtenir une représentation remarquable du comportement statique de ces éléments de construction. L'interprétation des résultats fournis par ces essais est d'ailleurs largement facilitée par l'introduction des différentes grandeurs caractéristiques considérées.

A mon avis, les caractéristiques de fléchissement au centre de la dalle sont d'une importance toute particulière. Dans la phase I, les dalles armées en croix se comportent pratiquement comme des dalles isotropes. Dans la phase II (phase de fissuration), les valeurs de la caractéristique de fléchissement montent brusquement jusqu'à atteindre le rapport 7 ou 9. La diminution que subit le moment d'inertie par suite de la formation des fissurations dans le béton ne peut pas suffire, à elle seule, pour justifier cette considérable augmentation de la caractéristique de fléchissement, qui n'a d'ailleurs pas été constatée dans les essais comparatifs effectués sur des tranches. Il est à remarquer que cette importante augmentation de la caractéristique de fléchissement se manifeste lorsque l'on atteint une charge pour laquelle les contraintes des fers d'armature se trouvent encore notablement au-dessous de la limite d'écoulement. Deux thèses différentes se présentent pour expliquer cette augmentation : il s'agit soit d'une mise en jeu de l'effet dit « de membrane », soit d'une réduction de la rigidité de la dalle à la torsion sous l'influence de la formation des fissures. Il est à observer à ce sujet que les flèches observées peuvent en effet s'expliquer aisément par l'intervention simultanée des influences résultant de la diminution des moments d'inertie et de l'affaiblissement de la rigidité de torsion de la dalle. A mon avis, il n'y a pas lieu d'envisager une intervention de l'effet de membrane. Cette influence se manifeste peut-être dans la phase de rupture de la dalle ; toutefois, elle n'intervient pas dans la variation extrêmement importante qu'accuse la caractéristique de fléchissement dans la phase II.

II 3

THÉORIE DES DALLES A CHAMPIGNON

THÉORIE DER PILZDECKEN

THEORY OF « MUSHROOM » SYSTEMS

Dr. **M. T. HUBER,**
Professeur à l'École Polytechnique, Varsovie.

Voir aussi « Publication Préliminaire », p. 249. — *Siehe auch « Vorbericht », S. 249.*
See also " Preliminary Publication ", p. 249.

Im Vorbericht findet man (S. 188) folgende Behauptung des Herrn Kollegen Gehler : « Bei den Platten besteht Einigkeit darüber, dass sie unterhalb der Risslast (Stadium I) als homogene und isotrope Platten wirken. » Es handelt sich hier gewiss um eine Feststellung, welche den seiner Zeit in Stuttgart und jetzt in Dresden ausgeführten Versuchen praktisch gut entspricht. Wenn man aber bedenkt, dass die Unterschiede der beiden Biegungssteifigkeiten

$$B_1 (= E_x' . J_x) ; \qquad B_2 (= E_y' . J_y) ;$$

bei allen Versuchen nur verhältnismässig klein waren und dabei nur die