

**Zeitschrift:** IABSE congress report = Rapport du congrès AIPC = IVBH  
Kongressbericht

**Band:** 1 (1932)

**Artikel:** Discussion

**Autor:** Olsen, H.

**DOI:** <https://doi.org/10.5169/seals-635>

### **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. [Siehe Rechtliche Hinweise.](#)

### **Conditions d'utilisation**

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. [Voir Informations légales.](#)

### **Terms of use**

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. [See Legal notice.](#)

**Download PDF:** 08.02.2025

**ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>**

In der folgenden Abbildung sind die ermittelten Beiwerte als Ordinaten zu den entsprechenden Würfelfestigkeiten als Abszissen aufgetragen und mittels einer stetig verlaufenden Schaulinie, die durch Anpassung an die Versuchswerte gefunden wurde, miteinander verbunden worden. Damit ergibt sich die Abhängigkeit des Beiwertes  $a$  von der Würfelfestigkeit des jeweils verwendeten Betons.

Die Kenntnis der Veränderlichkeit des Beiwertes  $a$  ermöglicht es, das behandelte Formänderungsgesetz für die Klärung wichtiger statischer Probleme des Eisenbetonbaues anzuwenden. Inwieweit es mit ihm möglich ist, z. B. dem Knickproblem sehr schlanker Eisenbetonsäulen näherzutreten, wird in einer demnächst erscheinenden Abhandlung <sup>1</sup> ausgeführt.

### Traduction.

Les efforts que l'on consacre à la statique des ouvrages en béton armé ont, comme on le sait, pour but d'adapter, dans toute la mesure du possible, les principes du calcul aux conditions effectives qui se présentent dans la pratique. Cette adaptation nécessite, en tout premier lieu, la connaissance des lois qui régissent les déformations du béton.

Parmi celles de ces lois qui ont été exprimées jusqu'à maintenant, il faut citer tout particulièrement celle de Bach-Schüle. On sait qu'elle se présente sous la forme exponentielle ; si l'on désigne par :

$\varepsilon$  la compression du béton rapportée à l'unité de longueur ;

$\sigma_{bt}$  la contrainte de compression du béton correspondant à cette compression et pouvant être considérée comme effective ;

$E_q$  le degré de déformation du béton,

on a

$$\varepsilon = \frac{\sigma_{bt}^m}{E_b},$$

relation dans laquelle l'exposant  $m$ , de même que le degré de déformation, dépend des caractéristiques de résistance du béton. On sait que cette loi fait toutefois l'objet d'une restriction, car elle n'est valable que pour des contraintes de compression du béton allant jusqu'à environ 60 kg/cm<sup>2</sup>.

Au delà, on a établi des lois de déformation ayant l'allure de fonctions hyperboliques et paraboliques des tensions. Pour un béton accusant une résistance au prisme de 173 kg/cm<sup>2</sup>, Wohlers <sup>2</sup> a donné par exemple la relation suivante, qui est applicable jusqu'au voisinage de la charge de rupture :

$$\sigma_{bt} = 311000 (1 - 450 \varepsilon).$$

L'emploi dans la pratique des lois de déformation indiquées jusqu'à maintenant se heurte toutefois à une difficulté du fait qu'il n'est pas possible d'assigner, dans chaque cas, une valeur précise aux coefficients qui sont nécessaires, en fonction des caractéristiques correspondantes du béton. Pour cette

1. OLSEN, Ueber den Sicherheitsgrad von hochbeanspruchten Eisenbetonkonstruktionen. Berlin, 1932, Verlag W. Ernst & Sohn.

2. Armierter Beton, 1918, p. 110.

raison, aucun résultat effectivement pratique n'a couronné les diverses tentatives qui ont été faites en vue de mettre en équation, dans des conditions aussi simples que possible, les relations parfois passablement compliquées que l'on déduit des lois ci-dessus mentionnées, entre les contraintes effectives auxquelles sont soumises les sections du béton et les charges extérieures correspondantes.

Je me propose, dans les lignes qui suivent, de montrer qu'il est possible de traduire convenablement, sous la forme d'une loi, et jusqu'au voisinage de la charge de rupture, les déformations que subit le béton en fonction de sa résistance à la compression, à condition de pouvoir définir nettement la loi de variation du coefficient «  $a$  », que contient la loi de déformation bien connue, établie par W. Ritter<sup>1</sup> :

$$\sigma_{bt} = \sigma_w \left( 1 - e^{-a \varepsilon} \right) \quad (1)$$

Dans cette relation,  $\sigma_w$  désigne la résistance du cube de béton et  $e = 2,71828...$  Les autres symboles sont connus.

Si l'on résout l'équation<sup>1</sup> par rapport à  $a$  on a :

$$a = \frac{1}{\varepsilon} \log \text{ nat } \frac{\sigma_w}{\sigma_w - \sigma_{bt}} \quad (2)$$

Afin de mettre en évidence les limites entre lesquelles peut varier  $a$ , des mesures de compression, effectuées sur différents prismes de béton, ont été utilisées. On a tout d'abord interprété les essais mentionnés dans le fascicule 227 des « *Forschungsarbeiten auf dem Gebiet des Ingenieurwesens* », tableau 3, sur un béton admettant une résistance au cube de  $146 \text{ kg/cm}^2$  et les compressions élastiques mesurées par *Bach* et *Graf*. En reportant ces valeurs, rapportées à l'unité de longueur, dans l'équation (2), on obtient, pour différents régimes de charge, le coefficient absolument constant et accusant une valeur extrêmement élevée :

$$a = 2090$$

de telle sorte qu'il vient, pour le béton employé, la loi de déformation suivante :

$$\sigma_{bt} = 146 \left( 1 - e^{-2090 \varepsilon} \right)$$

Afin de montrer avec quelle précision la loi ci-dessus permet de suivre la déformation du béton, on a groupé dans le tableau 1, exprimés en  $\text{kg/cm}^2$ , les écarts obtenus pour différents régimes de charge, entre les contraintes de compression dans le béton provenant, d'une part, des mesures effectuées sur les prismes d'essai, d'autre part, des calculs effectués d'après cette relation.

Ainsi qu'on peut le constater sur ce tableau, et même pour des régimes de charge élevés, ces écarts sont si faibles que l'on peut considérer la loi de déformation indiquée comme valable jusqu'au voisinage de la charge de rupture. L'écart le plus important atteint seulement  $3 \text{ kg/cm}^2$ , l'écart moyen étant de  $1,1 \text{ kg/cm}^2$ .

1. Schweiz. Bauzeitung, 1899.

Tableau 1.

Comparaison entre les valeurs des contraintes de compression du béton obtenues à partir des lois théoriques de déformation et les valeurs effectives.

$$\sigma_{w30} = 146 \text{ kg/cm}^2.$$

Valeurs expérimentales		$\sigma_{bt} = 146(1 - e^{-2090 \varepsilon})$				$\sigma_b = 146(1 - e^{-1000 \varepsilon})$				Valeurs expérimentales		$\sigma_{bt} = 146(1 - e^{-2060 \varepsilon'})$			
$\sigma_{bt}$ kg/cm <sup>2</sup>	$\varepsilon$	$\sigma_{bt}$ kg/cm <sup>2</sup>	Écarts. en kg/cm <sup>2</sup>		$\sigma_b$ kg/cm <sup>2</sup>	Écarts. en kg/cm <sup>2</sup>		$\varepsilon'$ 10 <sup>e</sup> appli- cation	$\sigma_{bt}$ kg/cm <sup>2</sup>	Écarts. en kg/cm <sup>2</sup>					
			+	-		+	-			+	-				
16,1	0,0000575	15,4	—	0,7	8,1	—	8,0	0,0000576	16,8	0,7	—				
32,3	0,000126	33,6	1,3	—	18,1	—	14,2	0,000127	33,6	1,3	—				
48,4	0,000195	48,6	0,2	—	25,6	—	22,8	0,000204	48,8	0,4	—				
64,6	0,000276	64,0	—	0,6	34,3	—	30,3	0,000294	65,6	1,0	—				
80,8	0,000370	78,8	—	2,0	45,2	—	35,6	0,000400	81,5	0,7	—				
97,0	0,000485	94,0	—	3,0	56,2	—	40,8	0,000532	97,0	—	—				
Sommes des écarts			1,5	6,3	—	—	151,7	—	—	4,1	—				
Écarts moyens			0,3	1,1	—	—	25,3	—	—	0,7	—				

Pour comparaison, on a également indiqué sur le tableau 1 les écarts obtenus en appliquant la loi de déformation couramment utilisée jusqu'à maintenant :

$$\sigma_{bt} = 146(1 - e^{-1000 \varepsilon})$$

Ainsi qu'on peut le constater, ces écarts sont si importants qu'ils ne peuvent même pas être considérés comme donnant une approximation large. L'écart maximum atteint en effet 40,8 kg/cm<sup>2</sup>, l'écart moyen étant de 25,3 kg/cm<sup>2</sup>.

La loi de déformation indiquée ci-dessus a été déduite de compressions déterminées pour une première application de la charge. On peut cependant l'appliquer même lorsque l'on envisage une succession répétée de mises en charge et de suppressions de la charge. Par exemple, si l'on considère la dixième application de la charge, pour laquelle on approche de l'état stationnaire, sans toutefois l'atteindre étant donné les régimes élevés dont il est question, on obtient les valeurs  $\varepsilon'$  indiquées dans le tableau 1. En partant de ces valeurs, et pour les différents régimes de charge, on obtient le coefficient presque constant  $a = 2060$ , qui ne s'écarte que peu de  $a = 2090$ , quoique l'on ait employé un béton de plus faible résistance à la compression.

On trouvera dans le tableau 2 les valeurs du coefficient  $a$  déterminées à la

suite d'essais ultérieurs et, dans chaque cas, pour une première application de la charge. Les résultats obtenus présentent une bonne uniformité.

Tableau 2.  
Valeurs du coefficient  $a$  de l'équation (1) d'après les essais.

Rce du cube de béton kg/cm <sup>2</sup>	$a$	Origine
146	2090	Forschungsarbeiten, n° 227, tableau 3
204	1600	» 227 » 7
225	1360	» 166-169 » 22
228	1200	» 45-47 » 39
229	1160	D. A. f. E., n° 38, colonnes 46 à 48
247	1240	Forschungsarbeiten, n° 45-47, tableau 50
283	1150	Hdb. f. Eisenbetonbau, 1 vol., 3 <sup>e</sup> éd., tableau 34
284	1170	Forschungsarbeiten, n° 227, tableau 7
320	1050	D. A. f. E., n° 28, colonnes 53 et 54
376	1100	Hdb. f. Eisenbetonbau, 1 <sup>er</sup> vol., 3 <sup>e</sup> éd., tableau 34
416	930	Forschungsarbeiten, n° 227, tableau 7.

Dans le graphique ci-contre, on a porté en ordonnées les valeurs du coefficient  $a$  et en abscisses les résistances du cube de béton. En joignant les valeurs qui concordent avec les résultats des essais, on a pu tracer une courbe continue, qui exprime la relation entre le coefficient  $a$  et la résistance du cube de béton, suivant la qualité du béton employé.

La connaissance des variations du coefficient  $a$  permet d'utiliser la loi de déformation ainsi obtenue pour la résolution de problèmes statiques présentant une grande importance pour la construction en béton armé. Nous traiterons, dans un mémoire qui doit paraître prochainement, le problème du flambage des colonnes en béton armé très élancées et montrerons dans quelle mesure l'emploi des données ci-dessus permet de serrer le problème <sup>1</sup>.

### Zusammenfassung.

Es wurde gezeigt, dass es möglich ist, die Formänderungen des Betons in Abhängigkeit von seiner Druckfestigkeit bis in die Nähe der Bruchlast gesetzmässig recht zutreffend zu erfassen, wenn es gelingt, die Veränderlichkeit des in dem von W. Ritter aufgestellten bekannten Formänderungsgesetz <sup>2</sup>

1. Olsen, Ueber den Sicherheitsgrad von hochbeanspruchten Eisenbetonkonstruktionen, Berlin, 1932, W. Ernst & Sohn, éditeur.

2. Schweiz. Bauzeitung, 1899.

$$\sigma_{bt} = \sigma_w \cdot (1 - e^{-a \epsilon})$$

enthaltenen Beiwertes  $a$  klarzustellen. Wird diese Gleichung nach  $a$  aufgelöst, so ergibt sich

$$a = \frac{1}{\epsilon} \log \text{nat} \frac{\sigma_w}{\sigma_w - \sigma_{bt}}$$

Um zu zeigen, innerhalb welcher Grenzen  $a$  schwanken kann, wurden die an verschiedenen Betonprismen vorgenommenen Stauchungsmessungen ausge-

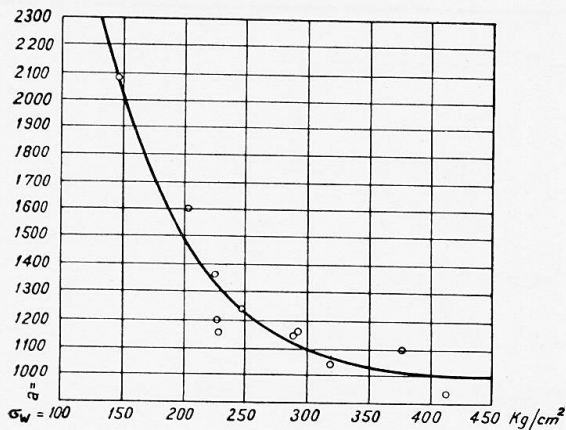


Fig. 1.

wertet. Dabei ergab sich für die in Heft 227 der Forschungsarbeiten auf dem Gebiete des Ingenieurwesens, Zusammenstellung 3, angeführten Stauchungsmessungen, die für Beton mit einer Würfelfestigkeit von 146 kg/cm<sup>2</sup> gelten, der fast durchweg gleichbleibende überraschend hohe Beiwert  $a = 2090$ , sodass sich für den verwendeten Beton als Formänderungsgesetz die Beziehung

$$\sigma_{bt} = 146 (1 - e^{-2090 \cdot \epsilon})$$

ermittelt. Die Genauigkeit der Ableitung geht aus Tafel 1 hervor.

Tafel 2 enthält die bei der Auswertung weiterer Versuche ermittelten Beiwerte  $a$ . In einer Abbildung sind dieselben aufgetragen und mittels einer Schaulinie verbunden. Damit ergibt sich die Abhängigkeit des Beiwertes  $a$  von der Würfelfestigkeit des Betons.

### Résumé.

L'auteur montre qu'il est possible d'exprimer d'une manière satisfaisante la déformation du béton en fonction de sa résistance à la compression par une loi mathématique, jusqu'au voisinage de la charge de rupture, à condition de pouvoir suivre nettement les variations du coefficient  $a$  contenu dans la loi de déformation connue, établie par W. Ritter<sup>1</sup>:

$$\sigma_{bt} = \sigma_w (1 - e^{-a \epsilon})$$

Si l'on résout cette équation par rapport à  $a$ , on a :

$$a = \frac{1}{\epsilon} \log \text{nat} \frac{\sigma_w}{\sigma_w - \sigma_{bt}}$$

Afin de montrer entre quelles limites peut varier  $a$ , des mesures de déformation par compression, effectuées sur différents prismes de béton, ont été utilisées. C'est ainsi que les mesures qui font l'objet du tableau 3 des « Forschungsarbeiten auf dem Gebiete des Ingenieurwesens », fascicule 227, ont

1. Schweiz. Bauzeitung, 1899.

donné pour  $a$  une valeur extrêmement élevée et presque constante ; ces essais se rapportent à un béton accusant une résistance au cube de  $146 \text{ kg/cm}^2$ , de sorte que pour le béton considéré, on obtient une loi de déformation, qui se traduit par la relation suivante :

$$\sigma_{bt} = 146 \left( 1 - e^{-2090 \varepsilon} \right)$$

Le tableau 1 met en évidence la précision que l'on peut attendre de cette relation.

Le tableau 2 donne des valeurs de  $a$  déterminées sur la base d'autres essais. Ces valeurs sont portées sur une figure et donnent une courbe, qui traduit la relation entre le coefficient  $a$  et la résistance du cube de béton.

### Summary.

It has been shown that it is possible to find, in a manner well in accordance with law, the change of shape in the concrete depending on its compression strength up to the neighbourhood of the crushing load, if the variation in the index  $a$  in the well-known law of change of shape drawn up by W. Ritter,

$$\sigma_{bt} = \sigma_w \left( 1 - e^{-a \varepsilon} \right)$$

can be clearly determined. Putting this equation in another form we have

$$a = \frac{1}{\varepsilon} \log \text{nat} \frac{\sigma_w}{\sigma_w - \sigma_{bt}}$$

In order to show within what limits  $a$  may vary, the measurements of « upsetting » made on various concrete prisms were calculated from. For the measurements of « upsetting » given in n° 227 of the « Forschungsarbeiten auf dem Gebiete des Ingenieurwesens, Zusammenstellung 3, » which hold for concrete with a cubic strength of  $146 \text{ kg/cm}^2$ , the nearly constant and surprisingly high value of  $a = 2090$  was found, so that, for the concrete used, the relation

$$\sigma_{bt} = 146 \left( 1 - e^{-2090 \varepsilon} \right)$$

was determined as the law of change of shape. The accuracy of the deduction is seen from Table 1.

Table 2 contains the values of  $a$  determined from the results of further tests. They are shown plotted in a figure and are connected by a curve. From this the dependence of the index  $a$  on the cubic strength of the concrete is given.

Dr.-Ing. V. MIHAILICH,

Professor an der Technischen Hochschule Budapest.

Dank der finanziellen Unterstützung der Wissenschaftlichen Gesellschaft « Széchenyi » konnten im Laboratorium für Eisenbetonbau an der Technischen Hochschule in Budapest im Schuljahr 1931-32 Versuche mit einer grossen