

Zeitschrift: IABSE congress report = Rapport du congrès AIPC = IVBH
Kongressbericht

Band: 1 (1932)

Artikel: Discussion

Autor: Chwalla, E.

DOI: <https://doi.org/10.5169/seals-485>

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. [Siehe Rechtliche Hinweise.](#)

Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. [Voir Informations légales.](#)

Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. [See Legal notice.](#)

Download PDF: 08.02.2025

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>

Traduction ¹.

Qu'il me soit permis d'ajouter quelques remarques complémentaires aux rapports de MM. les Professeurs Karner et Roš, rapports d'ailleurs si importants, tant du point de vue théorique que du point de vue pratique. Ces considérations sont extraites du manuscrit, actuellement prêt à être imprimé, que je consacre aux « Barres comprimées en acier de construction, Théorie de leur comportement en charge et de leurs possibilités », ce manuscrit contenant les solutions théoriques rigoureuses des différents problèmes d'équilibre que posent les barres comprimées en acier de construction. Les résultats qui sont indiqués dans les lignes qui suivent ont été déterminés en partant de cette hypothèse que la section de la barre est rectangulaire et que le diagramme tensions-allongements concorde avec celui qui a été employé par Roš-Brunner ².

I. — Si l'effort de compression P est appliquée axialement à une barre reposant à ses deux extrémités, sur articulations, sur des appuis et si l'on part des hypothèses de la théorie de la stabilité, qui nous ramènent à des conditions idéales, on peut dire alors que la barre ne se déforme qu'après avoir atteint la charge de flambage d'Euler-Kármán. Les courbes de la figure 1 permettent de se rendre compte comment la résistance de la barre dans la direction axiale (ou autrement dit, comment l'effort de compression « P_{G1} » nécessaire pour réaliser l'équilibre, dans chaque cas) varie avec la déformation de la barre. Chacune de ces courbes se rapporte à une valeur indiquée du degré d'élanement l/i ; en abscisses, on a porté les déformations latérales y_0 du milieu de la barre, rapportées à la hauteur h de la section, tandis que les ordonnées indiquent les quotients des valeurs de la résistance de la barre par la surface de sa section $F = b \cdot h$. Nous constatons que pour toutes les barres qui ne présentent pas un caractère trop massif, trop trapu, la charge de flambage d'Euler-Kármán, pour laquelle commence la déformation, représente la limite supérieure théorique de la capacité de charge. La chute de la capacité de charge est tout particulièrement accusée pour les degrés de finesse voisins de $l/i = 60$; le fléchissement de la barre en cours de flambage se produit ici avec une accélération nettement croissante. Les barres qui accusent un degré d'élanement très petit se comportent d'une manière particulière. C'est ainsi que la courbe correspondant, par exemple, à $l/i = 20$ quitte l'axe des ordonnées à la hauteur de la tension de flambage de Kármán (qui se trouve déjà ici juste au-dessous de la limite d'écoulement $\sigma_Q = -2700 \text{ kg/cm}^2$); elle descend quelque peu, puis monte au-dessus de la limite de compression jusqu'à la valeur :

$$\frac{\max P_{G1}}{F} = 2900 \text{ kg/cm}^2$$

pour retomber ensuite définitivement.

1. L'auteur ayant été empêché de présenter lui-même son Mémoire au Congrès de Paris, celui-ci a été lu par M. le Prof. Dr. L. Karner, Secrétaire général.

2. Dans les travaux qu'ils ont déjà publiés antérieurement, Roš-Brunner définissent la limite de proportionnalité par les coordonnées $\sigma_p = 1900 \text{ kg/cm}^2$, $\varepsilon_p = 0,086 \%$. Le module d'élasticité ainsi déterminé pour le matériau considéré $E = 1,9/0,00086 = 2210 \text{ t/cm}^2$ ne concorde pas avec la valeur $E = 2150 \text{ t/cm}^2$ indiquée dans le rapport.

Une barre ayant un degré de finesse $l/i = 20$ accuserait donc une légère déformation après avoir atteint la charge de flambage de Kármán, pour revenir toutefois à un état de repos après une déformation $y_0 = 0,04 h$; elle supporterait alors une augmentation de charge pouvant aller jusqu'à

$$\max P_{G1} = 2900 F$$

Pour des barres présentant un caractère trapu aussi nettement prononcé, la limite supérieure de la capacité de charge n'est donc pas définie par la limite de stabilité de Kármán (point de bifurcation de l'état d'équilibre), mais par la valeur de la résistance de la barre ainsi désignée sous le terme de « maximum secondaire », qui est atteinte pour un état de déformation peu accusée et qui se trouve ici au-dessus de la limite d'écoulement du matériau et par suite également au-dessus du point de bifurcation. Nous désignerons l'état d'équilibre pour cette limite supérieure de capacité de charge comme « état critique » et la valeur

$$\sigma_{kr} = \frac{\max P_{G1}}{F}$$

comme tension de compression moyenne « critique » pour la barre trapue soumise à une compression axiale.

II. — Si l'effort de compression P est appliqué excentriquement avec une excentricité très faible

$$p = \frac{k}{8} = 0,021 h$$

la barre subit un fléchissement sous l'action de la charge croissante et constitue un état d'équilibre que traduisent les courbes de la figure 2. Ces courbes, qui sont caractérisées par le degré de finesse indiqué, accusent des maxima dont les ordonnées donnent les contraintes de compression moyennes critiques

$$\sigma_{kr} = \frac{\max P_{G1}}{F}$$

et permettent de déterminer les valeurs maxima des contraintes supportées par la barre. Suivant l'allure de ces courbes, nous distinguons deux sortes de maxima, que nous désignons comme de « premier ordre » et de « second ordre » et qui, pour la courbe correspondant à $l/i = 24,5$, sur la fig. 2, se trouvent au même niveau. Toutes les courbes tracées pour $\frac{l}{i} = 40$ à $\frac{l}{i} = 180$ accusent exclusivement des maxima de premier ordre, tandis que sur les courbes qui correspondent à $\frac{l}{i} < 24,5$ le maximum de premier ordre accuse un recul; le maximum de second ordre, étant le plus élevé, intervient principalement pour la détermination de la limite de capacité de charge; ce maximum de second ordre coïncide avec l'affaiblissement relatif de la résistance de la barre, affaiblissement qui se manifeste lorsque les contraintes de tension dans les fibres périphériques au sommet de la barre traversent la zone d'écoulement, tandis que les contraintes de compression sur les fibres internes se trouvent déjà largement engagées dans la zone de reprise des possibilités de résistance. Si nous recherchons, par exemple, de quelle manière se comporte

une barre accusant le très faible degré de finesse de $l/i = 18$, nous constatons, sur la courbe correspondante de la figure 2, que pour le régime de charge :

$$\frac{P_{GI}}{F} = 2510 \text{ kg/cm}^2$$

(maximum de premier ordre), la barre subit un faible accroissement de fléchissement, mais qu'elle se rétablit immédiatement et est alors susceptible de supporter un accroissement de charge allant jusqu'à

$$\sigma_{kr} = \frac{\max P_{GI}}{F} = 2820 \text{ kg/cm}^2$$

Ce n'est que sous l'influence de cette charge élevée, qui se trouve déjà au-dessus de la charge de compression $F \cdot \sigma_Q$ que la capacité de charge de la barre s'effondre définitivement ; la déformation atteint seulement, à cet instant critique, la valeur de $y_0 = 0,12 h$.

La figure 3 représente de même la manière dont se comportent les barres lorsque l'effort de compression est appliqué par l'intermédiaire d'un bras de levier important $p = 2 k = h/3$. Nous pouvons, ici encore, distinguer nettement les maxima de « premier » et de « second » ordre ; les premiers indiquent les possibilités de charge pour toutes les barres dont le degré de finesse est $\frac{l}{i} \geq 28$ tandis que les deuxièmes donnent les capacités de charge des barres très massives ou trapues. La courbe en traits discontinus, jusqu'à laquelle toutes les courbes indiquées ont été tracées, définit la limite des recherches effectuées et correspond à tous les états d'équilibre pour lesquels la contrainte de tension maximum à la périphérie de la barre atteint la valeur de $\sigma_z = +4000 \text{ kg/cm}^2$ (on se trouve alors au voisinage de la résistance statique à la traction pour le matériau étudié). En dehors de la limite ainsi définie, les courbes accuseraient une chute très accentuée et les allongements sur le côté extérieur arrivent rapidement au voisinage des valeurs correspondant à la rupture ; la manière dont les barres se comportent dans cette région est pratiquement et théoriquement sans intérêt.

III. — Le diagramme de la figure 4 indique les possibilités de charge, telles qu'elles ont été déterminées rigoureusement, pour les barres en acier de construction soumises à une compression excentrique ; il est à comparer avec le résultat que donne l'excellente théorie d'approximation de Roß-Brunner (figure 6 de leur rapport). Les courbes qu'il comporte se rapportent au degré d'excentricité indiqué p/k de l'application de l'effort et déterminent la relation fonctionnelle entre la valeur maximum $\sigma_{kr} = \frac{\max P_{GI}}{F}$ de la contrainte moyenne de compression supportée et le degré de finesse l/i de la barre. Chacune des courbes se compose de deux branches, qui se raccordent sur la courbe tracée en traits discontinus ; la branche la plus longue, qui est faiblement inclinée, correspond à tous les états critiques qui sont conditionnés par l'arrivée à un maximum de premier ordre, tandis que la branche courte, se relevant très rapidement, correspond aux maxima de second ordre. La zone ainsi définie par ces maxima de second ordre coupe, ainsi qu'on le voit, le niveau correspondant

à la limite d'écoulement $\sigma_{kr} = \sigma_Q = - 2700 \text{ kg/cm}^2$ et définit donc également des états critiques correspondant à des régimes de charge qui se trouvent au-dessus de la charge limite de compression. Plus ces branches inclinées se rapprochent de la ligne de démarcation des essais effectués, plus faibles sont les valeurs extrêmes de la résistance de la barre et plus élevées sont les contraintes se manifestant à l'état critique ; tous les points situés à gauche et en dehors de cette ligne de démarcation correspondent à des barres qui ne manifestent aucun état critique, c'est-à-dire aucun maximum accusé de résistance, sous l'influence de charges appliquées excentriquement et croissantes jusqu'à une contrainte de traction $\sigma_z = + 4000 \text{ kg/cm}^2$ sur la périphérie de la barre ; ces barres se rapprochent, en ce qui concerne la manière dont elles se comportent, de barres en acier de construction qui seraient soumises à des flexions par charges transversales.

Les courbes de la figure 4, qui correspondent à différents degrés d'excentricité, ont été établies en supposant une répartition des tensions, parallèlement à la courbe de déformation de l'acier de construction. On peut remarquer que ces répartitions des contraintes restent non influencées par la loi de décharge linéaire jusqu'à ce que l'on arrive à l'état critique¹ lorsque le degré d'excentricité n'est pas plus faible que $\frac{P}{k} = \text{env. } 1/8$ et que la force de compression croît, à sa position d'excentricité, à partir de zéro. Si l'on reporte ces conditions de répartition de contraintes sans décharge, purement et simplement, dans le cas de $\frac{P}{k} = 0$ on obtient la courbe tracée en traits discontinus, qui porte le nom de courbe d'Engesser et qui ne présente une importance qu'autant qu'elle constitue la courbe limite supérieure de la famille. La courbe valable du point de vue théorique et correspondant à une application axiale de la charge $p/k = 0$ a été tracée en entier sur la figure 4 ; elle se compose, dans la zone $l/i \geq 107,4$ de l'hyperbole d'Euler, dans la zone $23,8 \leq l/i < 107,4$ de la courbe de Kármán et dans la zone $l/i < 23,8$ de la courbe correspondant aux maxima de deuxième ordre de la résistance de la barre, qui possède une allure ascendante rapide ; les deux dernières branches de la courbe se trouvent d'ailleurs isolées de la famille elle-même, car pour leur détermination, il faut partir d'une répartition modifiée des contraintes, répartition influencée par la loi de décharge. En ce qui concerne la manière dont se comportent les barres qui sont seulement chargées axialement dans l'acception proposée, sans toutefois satisfaire aux conditions idéales de la théorie de la stabilité, je renverrai à mon manuscrit.

IV. — Pour le calcul des barres soumises à une charge de compression excentrique, en acier de construction, je propose l'adoption de la méthode dite « méthode β ». On rapporte les ordonnées des différentes courbes représentées

1. Dans son Rapport à la deuxième Réunion Internationale de Vienne (page 344, fig. 48) le Professeur Roš arrive à une conclusion opposée, probablement par suite d'une erreur ; les contraintes de compression à la périphérie de la barre sont déjà déchargées, avant que la limite d'élasticité soit atteinte, de sorte qu'il se produit bien une inversion des contraintes, mais aucune « décharge des fibres » après passage à l'état plastique.

sur la figure 4 aux ordonnées de la courbe des contraintes de flambage d'Euler-Kármán et on exprime la contrainte de compression critique moyenne de la barre comprimée excentriquement comme constituant une fraction $1/\beta$ de la contrainte de flambage (point de bifurcation de l'état d'équilibre), valable pour la même barre en supposant une application axiale de la charge. Les valeurs du rapport $\beta = \frac{\sigma_k}{\sigma_{kr}}$ ainsi déterminées à partir de la solution rigoureuse ont été rassemblées dans le tableau annexé au présent Rapport. Si maintenant on applique au calcul de la barre comprimée excentriquement un coefficient ν de sécurité, l'effort de compression maximum qui se manifeste dans la barre répond à la condition :

$$\frac{P}{F} \leq \frac{\sigma_{kr}}{\nu} \quad \text{ou} \quad \frac{P}{F} \leq \frac{\sigma_k}{\beta \nu}$$

relation qui prend la forme simple suivante, après introduction du coefficient de flambage bien connu $\omega = \frac{\nu \cdot \sigma_{zul}}{\sigma_k}$:

$$\beta \cdot \omega \cdot \frac{P}{F} \leq \sigma_{zul}$$

Le coefficient β exprime alors la diminution que subit la capacité de la barre par suite de l'application excentrée de la charge ; si pour $l/i \geq 24$, le degré d'excentricité de l'application de la charge disparaît, β tend vers 1. Le coefficient de sécurité ν concorde, dans cette méthode de calcul, avec le coefficient de sécurité au flambage et ne s'exprime pas directement par un chiffre ; de même que la contrainte de flambage σ_k qui sert de base à l'application de la méthode, il est compris implicitement dans la valeur du coefficient de flambage ω qui répond aux prescriptions officielles. Les tables donnant β doivent, de même que celles qui donnent ω , être établies pour toutes les sortes d'aciers de construction normalisés ; pour l'acier St. 37 et pour les sortes quelque peu supérieures, on peut se servir directement de la table ci-jointe. Si, ainsi que le Professeur Karner le préconise à juste titre dans son Rapport d'Introduction (Voir Publication Préliminaire, page 51) la méthode de calcul doit permettre de satisfaire dans les conditions rigoureuses aux conditions de contrainte périphérique courantes des barres trapues :

$$\frac{P}{F} + \frac{M}{W} \leq \sigma_{zul}$$

les valeurs officiellement prescrites pour β ne doivent alors pas descendre au-dessous de la valeur suivante :

$$\min \beta = \left(1 + \frac{p}{k} \right) : \omega$$

dans la zone des faibles degrés de finesse. Dans la détermination des valeurs de ω prévues en Allemagne, les valeurs de β indiquées dans notre tableau pour $\frac{p}{k} = 0,5 - 2,0$ — et $4,0$ dans la zone des degrés de finesse $l/i < 40$ ou $l/i < 57,5$ ou $l/i < 65$ doivent être remplacées par ce minimum de β .

V. — La solution « standard » du problème, telle qu'elle fait l'objet de la figure 4, suppose une section rectangulaire de la barre, des bras de levier égaux des deux côtés et une articulation libre de frottement aux deux extrémités de la barre. Afin d'étudier l'influence de la forme de la section sur la valeur de la charge critique, j'ai rassemblé les sections que l'on peut considérer comme les plus intéressantes en construction métallique en 5 groupes et pour chacun de ces groupes, j'ai développé la solution rigoureuse du problème pour les cas de charge $\sigma_{kr} = 1000$ et 1900 kg/cm^2 . J'ai pu constater que notre solution « standard » pouvait être appliquée avec une bonne approximation, même dans le calcul des barres ayant une section de forme arbitraire, à condition de prendre comme terme de comparaison pour le bras de levier d'application de la charge non pas exclusivement l'inverse du rayon mesuré du noyau k mais, suivant le groupe auquel appartient la section, k, i , ou $a = \frac{i+k}{2}$. Si nous admettons une tolérance plus large et à condition qu'elle soit encore acceptable du point de vue pratique, nous pourrions adopter uniformément la valeur $\frac{P}{k}$ comme mesure du degré d'excentricité pour des barres pleines de toutes sections. Il a été également apporté une solution rigoureuse au cas comportant l'application de la charge par l'intermédiaire de bras de levier différents soit en grandeur soit en direction ; pour $p_2 \neq -p_1$ nous pouvons considérer, à titre d'approximation, les barres correspondantes comme des barres comprimées comportant deux bras de levier de même valeur des deux côtés avec $p_m = \frac{p_1 + p_2}{2}$. En outre, j'ai étendu la théorie rigoureuse aux barres d'acier soumises à une compression excentrée et dont les extrémités comportent un encastrement élastique. Nous supposons la barre prolongée des deux côtés et répondant aux conditions d'appui d'une poutre continue à trois panneaux ; la longueur c du panneau latéral exempt de charge donne alors, sous forme du rapport $\frac{1}{c/i}$ une mesure, facile à évaluer dans la pratique de la construction, du degré d'encastrement élastique d'une barre comprimée formant un élément de la charpente. La figure 5 montre dans quelle mesure peut augmenter le degré de finesse de la barre l/i , lorsque le degré d'encastrement i/c croît, si la barre doit perdre sa capacité de charge pour le degré de charge

$$\sigma_{kr} = \frac{\max P_{G1}}{F} = 1.500 \text{ kg/cm}^2$$

Les courbes particulières se rapportent au degré d'excentricité indiqué, introduit sous la forme $\frac{P}{i}$.

VI. — Si l'axe d'une barre soumise à une compression centrée est déjà courbé, à l'état initial, en l'absence de toute charge, suivant une forme se rapprochant d'une demi-sinusoïde admettant une flèche r_0 , la barre peut former alors également un état « critique » ; le problème peut être résolu d'une manière rigoureuse, grâce à une hypothèse limitative, ne tirant toutefois pas à conséquence du point de vue pratique, en ce qui concerne

l'allure exacte de la forme initiale de cet axe. La solution obtenue est représentée sur la figure 6, les courbes particulières, de même que dans la figure 4, traduisent la relation entre le degré de finesse de la barre et la contrainte de compression moyenne la plus élevée possible (critique); ces courbes se rapportent aux valeurs indiquées pour la déformation initiale au sommet $\frac{\eta_0}{h}$. Si nous appliquons cette solution au calcul de la capacité de charge des poutres en arc en acier, élancées, à trois articulations et comportant de faibles flèches, nous constatons que l'observation des exigences normales dans le cas du calcul des arcs ne suffit pas à assurer la sécurité voulue contre les possibilités d'arriver à « l'état critique » sous l'influence d'une charge s'exerçant sur un demi-côté.

VII. — Considérons maintenant une barre en acier de construction de forme prismatique, ayant à supporter outre une charge de compression centrée, une charge transversale répartie d'une manière à peu près sinusoidale et ayant une valeur totale Q ; le problème d'équilibre correspondant peut recevoir une solution rigoureuse, pour autant que la répartition exacte de l'intensité de la charge transversale est susceptible de se prêter à une hypothèse initiale limitative. De même que dans les figures 4 et 6, on a représenté sur la fig. 7, les courbes qui déterminent la relation établie entre la contrainte de compression critique et le degré de finesse; l'importance de la charge transversale Q est exprimée par la contrainte de flexion idéale périphérique, calculée d'après Navier :

$$\sigma_b = \frac{M_0}{W}$$

et qui existerait effectivement au milieu de la barre si cette influence transversale agissait seule. Dans le calcul de ce type de barres, il importe de déterminer avec certitude, dans chaque cas particulier, si la contrainte axiale seule, ou bien la charge transversale seule doit être multipliée par le coefficient de sécurité, ou éventuellement les deux grandeurs ensemble.

Qu'il me soit permis d'ajouter ici une remarque au sujet de la solution indiquée par Roš-Brunner (figure 30 de leur rapport). La méthode de Roš-Brunner suppose ici implicitement que la charge transversale provoque une même répartition des moments que la contrainte de compression axiale, de telle sorte que la courbe des moments de flexion, de même que la courbe de répartition de la charge transversale Q , sont toutes deux des sinusoides. Le moment fléchissant idéal au milieu de la barre, intervenant dans la solution comme paramètre, atteint alors $M = \frac{Ql}{2\pi}$ de telle sorte que, rigoureusement parlant, les résultats obtenus ne se rapportent pas au cas d'une charge unique $H = \frac{4M}{l}$ mais au cas d'une charge sinusoidalement répartie et ayant la valeur $Q = \frac{2\pi M}{l}$. Les courbes de la figure 30 du rapport correspondent donc, dans l'ordre, à

$$Q = \frac{P_k}{127,3} \quad \frac{P_k}{63,7} \quad \frac{P_k}{31,8} \quad \frac{P_k}{15,9}$$

et les courbes correspondant aux charges transversales :

$$Q = \frac{P_k}{200} \quad \frac{P_k}{100} \quad \frac{P_k}{50} \quad \frac{P_k}{25}$$

sont respectivement situées au-dessus.

VIII. — La manière dont se comportent les barres d'acier de construction comprimées, qui est représentée par les figures 1 à 3, peut exercer une influence primordiale sur la valeur de la capacité de charge des charpentes statiquement indéterminées en acier de construction. Les résultats remarquables auxquels conduisit l'étude théorique de ces systèmes en faisant intervenir la plasticité du matériau, sont basés sur cette hypothèse que la résistance des barres comprimées de la charpente reste constante lorsque l'on a atteint la charge de flambage, ainsi que c'est le cas pour une barre tendue qui serait constituée par un matériau idéalement plastique. Par contre, les barres en aciers de construction présentant les degrés de finesse courants accusent une diminution considérable de la résistance axiale, même pour de faibles raccourcissements de la corde de la barre, ce qui a pour conséquence une majoration très notable de la contrainte du système de « renforcement », et, en pratique, dans la majoration des cas, une mise hors service prématurée de ce dernier. Les charges « possibles » telles qu'elles sont déterminées dans le cadre de la théorie proposée peuvent donc, pour cette raison, être dans certains cas trop fortes de plus de 40 %.

Signalons encore pour terminer que dans le manuscrit auquel j'ai fait allusion, j'ai apporté également au problème de la stabilité des barres en châssis une solution exacte, tenant compte de la flexibilité des assemblages transversaux ; j'ai également développé une méthode de calcul des assemblages transversaux, qui présente une similitude de principe avec celle qui a été indiquée par le Professeur Roš.

La figure 8 indique la relation trouvée entre la charge transversale maximum mise en jeu avant la mise hors service de la barre, le degré de finesse et le degré d'excentricité, pour des barres de section rectangulaire. Nous remarquons que Q_{\max} ne s'élève au-dessus de la valeur de Krohn d'une manière sensible que pour les barres dont la capacité de charge est limitée par un « maximum de second ordre ». Pour rendre la question indépendante de la catégorie d'acier de construction (et comme en général, Q_{\max} ne subit pas un accroissement relatif plus important que la limite d'écoulement à la compression σ_Q) nous pouvons substituer d'une manière générale à la formule de Krohn, par exemple, la relation $Q_{\max} = \frac{\sigma_Q}{75} \cdot F$ et calculer les conditions transversales directement pour $Q_{\max} = \frac{\sigma_{zul}}{75} \cdot F$ d'après la « contrainte admissible ».