Zeitschrift: IABSE congress report = Rapport du congrès AIPC = IVBH Kongressbericht

Band: 1 (1932)

Artikel: Discussion

Autor: Ros, M. / Eichinger, A.

DOI: https://doi.org/10.5169/seals-500

Traduction.

Considérations générales.

Au cours des essais qui ont été effectués entre les années 1926 et 1929 au Laboratoire Fédéral pour l'Essai des Matériaux on a pu établir que le degré de déformation plastique δ_g est relié à la contrainte σ_g envisagée par une relation aussi simple que celle qui conditionne le degré de déformation élastique e_g par rapport à la contrainte considérée [1]. On a en effet :

Cas de l'élasticité :

$$e_g = \sqrt{e_x^2 + e_y^2 + e_z^2 - e_x e_y - e_y e_z - e_z e_x + \frac{3}{4}\left(g_{xy}^2 + g_{yz}^2 + g_{xz}^2\right)} = \frac{\sigma_g}{E}\left(1 + \frac{1}{m}\right)$$

où : $\sigma_g = \sqrt{\sigma_x^2 + \sigma_y^2 + \sigma_z^2 - \sigma_x \sigma_y - \sigma_y \sigma_z - \sigma_z \sigma_x + 3\left(\tau_{yz}^2 + \tau_{yz}^2 + \tau_{zx}^2\right)}$

Cas de la plasticité :

$$\delta_g = \sqrt{\delta_x^2 + {}_y^2 + \delta_z^2 - \delta_x \delta_y - \delta_y \delta_z - \delta_z \delta_x + \frac{3}{4}\left(V_{xy}^2 + V_{yz}^2 + V_{zx}^2\right)} = \frac{\sigma_g}{D}\left(1 + \frac{1}{2}\right)$$

et : $\varepsilon_g = e_g + \delta_g = \sigma_g\left[\frac{1}{E}\left(1 + \frac{1}{m}\right) + \frac{1}{D}\left(1 + \frac{1}{2}\right)\right]$

On a

Elasticité	Plasticité	Au total
$e_x = \frac{1}{E}\left[\sigma_x - \frac{1}{m}(\sigma_y + \sigma_z)\right]$	$\delta_x = \frac{1}{D}\left[\sigma_x - \frac{1}{2}(\sigma_y + \sigma_z)\right]$	$\varepsilon_x = e_x + \delta_x$
$e_y = \frac{1}{E}\left[\sigma_y - \frac{1}{m}(\sigma_z + \sigma_x)\right]$	$\delta_y = \frac{1}{D}\left[\sigma_y - \frac{1}{2}(\sigma_z + \sigma_x)\right]$	$\varepsilon_y = e_y + \delta_y$
$e_z = \frac{1}{E}\left[\sigma_z - \frac{1}{m}(\sigma_x + \sigma_y)\right]$	$\delta_z = \frac{1}{D}\left[\sigma_z - \frac{1}{2}(\sigma_x + \sigma_y)\right]$	$\varepsilon_z = e_z + \delta_z$
$g_{xy} = \frac{2\tau_{xy}}{E}\left(1 + \frac{1}{m}\right)$	$V_{xy} = \frac{2\tau_{xy}}{D}\left(1 + \frac{1}{2}\right)$	$\gamma_{xy} = g_{xy} + V_{xy}$
$g_{yz} = \frac{2\tau_{yz}}{E}\left(1 + \frac{1}{m}\right)$	$V_{yz} = \frac{2\tau_{yz}}{D}\left(1 + \frac{1}{2}\right)$	$\gamma_{yz} = g_{yz} + V_{yz}$
$g_{zx} = \frac{2\tau_{zx}}{E}\left(1 + \frac{1}{m}\right)$	$V_{zx} = \frac{2\tau_{zx}}{D}\left(1 + \frac{1}{2}\right)$	$\gamma_{zx} = g_{zx} + V_{zx}$

On a pu établir également que la variation plastique de volume est assez sensiblement nulle :

$$\delta_x + \delta_y + \delta_z = 0$$

car $m = 2$; la contrainte normale moyenne

$$\sigma_m = \frac{\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z}{3}$$

---

1. M. Roš et A. Eichinger, Contribution à l'étude des possibilités de rupture. — I. Acier (1926). — II. Métaux divers (1929). — L.F.E.M.

M. Roš et A. Eichinger, Congrès de Mécanique Industrielle, Stockholm, 1930. — Nouvelles contributions à l'étude des possibilités de rupture.

est sans influence sur la déformation plastique. De même, la quasi-isotropie reste assurée, même après le dépassement de la limite élastique, car le module de plasticité D est le même dans toutes les directions.

Dans certains cas déterminés, il est plus indiqué plutôt que de faire intervenir le module D ou le coefficient d'allongement plastique

$$\frac{1}{D} = \frac{2}{3} \cdot \frac{\delta_g}{\sigma_g}$$

de travailler avec la tangente au diagramme $\sigma_g - \delta_g$ ci-contre.

C'est précisément le cas pour les problèmes de flambage des plaques, parmi lesquels nous traiterons à titre d'exemple le cas de la plaque rectangulaire.

Flambage des plaques rectangulaires.

Si une plaque plane est soumise axialement à des contraintes σ_x^k et σ_y^k jusqu'à la charge de flambage, la limite d'élasticité se trouvant dépassée, on obtient, pour une déformation virtuelle de cette plaque, les variations suivantes des efforts, en se basant sur l'hypothèse de la conservation de la section :

$$\text{comme : } \Delta\varepsilon_x = \Delta e_x + \Delta\delta_x = \frac{1}{E}\left(\Delta\sigma_x - \frac{\Delta\sigma_y}{m}\right) + tg\,\psi \cdot \frac{2}{3}\left(\Delta\sigma_x - \frac{\Delta\sigma_y}{2}\right)$$

$$\Delta\varepsilon_y = \Delta e_y + \Delta\delta_y = \frac{1}{E}\left(\Delta\sigma_y - \frac{\Delta\sigma_x}{m}\right) + tg\,\psi \cdot \frac{2}{3}\left(\Delta\sigma_y - \frac{\Delta\sigma_x}{2}\right)$$

$$\Delta\gamma_{xy} = \Delta g_{xy} + \Delta V_{xy} = 2\tau_{xy}\left[\frac{1}{E}\left(1 + \frac{1}{m}\right) + tg\,\psi\right]$$

on peut en déduire $\Delta\sigma_x$, $\Delta\sigma_y$, $\Delta\tau_{xy}$.

La répartition des contraintes sur le côté concave est déterminée par la tangente au diagramme $\sigma_g - \varepsilon_g$, $(tg\,\varphi + tg\,\psi)$; sur le côté convexe, par $tg\,\varphi$ du diagramme $\sigma_g - e_g$ c'est-à-dire par la loi de l'élasticité. On en déduit l'intervalle entre la surface neutre et la surface médiane :

$$e = \frac{h}{2} \cdot \frac{\sqrt{tg\,\omega} - \sqrt{tg\,\varphi}}{\sqrt{tg\,\omega} + \sqrt{tg\,\varphi}} \quad \text{. où : } tg\,\omega = tg\,\varphi + tg\,\psi$$

Il est maintenant facile de déterminer M_x M_y et M_t :

$$M_x = -\frac{E\,J\,c}{1 - \frac{1}{m^2}}\left[\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{1}{m} \cdot \frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right]$$

$$M_y = -\frac{E\,J\,c}{1 - \frac{1}{m^2}}\left[\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \frac{1}{m} \cdot \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right]$$

$$M_t = -\frac{E\,J\,c}{1 + \frac{1}{m}} \cdot \frac{\partial^2 w}{\partial x\,\partial y}$$

où :

$$J = \frac{h^3}{12}$$

et :
$$c = \frac{4\,tg\,\varphi}{E\left(\sqrt{tg\,\omega} + \sqrt{tg\,\varphi}\right)^2}.$$

De même que dans le cas du flambage d'une barre soumise à une compression axiale, si l'on adopte la désignation :

$E.c = T_k$ = module de flambage, on obtient :

$$T_k = \frac{4\,E\,tg\,\varphi}{\left(\sqrt{tg\,\omega} + \sqrt{tg\,\varphi}\right)^2} = \frac{4\,E.\,\dfrac{1}{tg\,\omega}}{\left(\sqrt{\dfrac{1}{tg\,\varphi}} + \sqrt{\dfrac{1}{tg\,\omega}}\right)^2}.$$

Pour $m = \infty$ (déformations élastiques aussi bien que déformations plastiques), le module T_k des éléments plans vient se confondre avec celui des barres.

Pour une déformation virtuelle, l'équation différentielle de la plaque rectangulaire soumise à une compression axiale suivant les deux directions de ses axes, au-dessus de la limite d'élasticité, devient :

$$\frac{T_k\,J.}{1 - \dfrac{1}{m^2}} \left\{ \frac{\partial^4 \omega}{\partial_x^4} + 2.\,\frac{\partial^4 \omega}{\partial_x^2\,\partial_y^2} + \frac{\partial^4 \omega}{\partial_y^4} \right\} + h.\left\{ \sigma_y^k.\,\frac{\partial^2 w}{\partial_x^2} + \sigma_y^k.\,\frac{\partial^2 w}{\partial_y^2} \right\} = 0$$

Il en résulte que la surface de flexion n'est modifiée ni dans sa position, ni dans sa forme, même dans la zone située au-dessus de la limite d'élasticité ; on a par exemple, pour une plaque maintenue sur tous ses côtés :

$$\omega = f.\ \sin\frac{\pi x}{a}\ .\ \sin\frac{\pi y}{b}.$$

On est donc en possession de tous les éléments pour pouvoir résoudre le problème du flambage des plaques rectangulaires même au-dessus de la limite d'élasticité, et pour différentes conditions aux bords.