

Zeitschrift: IABSE congress report = Rapport du congrès AIPC = IVBH
Kongressbericht

Band: 2 (1936)

Artikel: Formelmässige Lösung des Stabilitätsproblememes exzentrisch
gedrückter Stahlstäbe

Autor: Ježek, K.

DOI: <https://doi.org/10.5169/seals-2770>

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. [Siehe Rechtliche Hinweise.](#)

Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. [Voir Informations légales.](#)

Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. [See Legal notice.](#)

Download PDF: 08.02.2025

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>

Formelmäßige Lösung des Stabilitätsproblememes exzentrisch gedrückter Stahlstäbe.

Les formules de la stabilité des barres excentriquement
comprimées.

Formulae for the Solution of Eccentrically Loaded Steel
Columns.

Dr. Ing. K. Ježek,

Dozent an der Technischen Hochschule Wien.

Das klassische Stabilitätsproblem des zentrisch gedrückten geraden Stabes wurde durch die Forschungsarbeiten von *Euler*, *Engesser* und *Kármán* einer befriedigenden Lösung zugeführt.¹ Diese Art der Beanspruchung stellt allerdings einen praktisch niemals zu verwirklichenden Idealfall dar, da die geringsten Abweichungen von den Voraussetzungen wie z. B. unvermeidliche und verschwindend kleine Exzentrizitäten des Kraftangriffes oder Stabkrümmungen eine zusätzliche Biegung hervorrufen und damit unter Umständen eine recht erhebliche Herabsetzung der Tragfähigkeit bewirken. Bei einem derart auf axialen Druck und Biegung beanspruchten Stahlstab besteht nun ebenfalls die Gefahr des Eintrittes eines labilen Gleichgewichtszustandes, allerdings erst dann, wenn mit zunehmender Belastung bereits bleibende Formänderungen aufgetreten sind. Durch diese *wesentliche* Bedingung unterscheidet sich daher die Aufgabe der Bestimmung der Traglast *grundsätzlich* vom Knickproblem des geraden Stabes.

Dieses eigenartige Stabilitätsproblem wurde erstmalig von *Kármán* im Anschlusse an seine bekannten Knickversuche für sehr kleine Exzentrizitäten des Kraftangriffes theoretisch und experimentell untersucht.¹ Hierbei ging *Kármán* von der Arbeitslinie einer bestimmten Stahlsorte aus und entwickelte zur Lösung der Differentialgleichung der Biegelinie ein sinnreiches graphisches Integrationsverfahren; dieser Teil der *Kármán*'schen Arbeit blieb jedoch lange Zeit unbeachtet. Auch das etwa 13 Jahre später von *Krohn*² angegebene Näherungsverfahren teilte infolge seines wenig durchsichtigen Rechnungsganges und wohl in erster Linie mangels einer zahlenmäßigen Auswertung der Ergebnisse das Schicksal der *Kármán*'schen Untersuchung. Einige Jahre später entwickelten *Roš* und *Brunner* ein zeichnerisches Näherungsverfahren und legten die Ergebnisse in einem Diagramm nieder, welches zum ersten Male ziffernmäßig den

¹ Th. v. *Kármán*: „Untersuchungen über Knickfestigkeit“. V.D.I., H. 81, 1910.

² R. *Krohn*: „Knickfestigkeit“. Bautechnik 1923.

Zusammenhang zwischen Tragkraft, Exzentrizität und Schlankheit für ein bestimmtes Formänderungsgesetz erkennen läßt.³ Schließlich entwickelte *Chwalla* in Anknüpfung an die Gedankengänge *Kármáns* die strenge Lösung für Stäbe mit beliebig großer Exzentrizität des Kraftangriffes.⁴

Allen diesen Untersuchungen haftet der fühlbare Mangel an, daß ihre Ergebnisse nur nach sehr langwierigen Rechnungen erhalten werden und ausschließlich in der Form eines Diagrammes oder einer Zahlentafel darstellbar sind. Bedenkt man außerdem, daß eine *große* Anzahl derartiger nach der *Stahlsorte* und *Querschnittsform* geordneter Diagramme erforderlich ist, so erkennt man leicht, daß dieser Umstand für die praktische Anwendung nicht nur beschwerlich ist, sondern geradezu ein Hindernis bildet; dies kommt am deutlichsten darin zum Ausdruck, daß die behördlichen Vorschriften nahezu aller Staaten — eine Ausnahme bilden meines Wissens nur die Schweizerischen Bestimmungen — den neuen und vollkommen gesicherten Erkenntnissen hinsichtlich der Bemessung exzentrisch gedrückter Stahlstäbe bisher — offenbar in Ermangelung einer theoretisch begründeten und einfachen Formel — nicht Rechnung getragen haben.

Ich möchte nun kurz den Weg schildern, der zu einer *formelmäßigen* Lösung dieser für den Stahlbau bedeutungsvollen Aufgabe führt. Zunächst kann das Formänderungsgesetz der derzeit gebräuchlichen Stähle für den vorliegenden Zweck durch eine ideal-plastische Arbeitslinie ersetzt werden, da eine Verfestigung nur bei extrem kurzen und praktisch nie ausgeführten Stäben mit einer Schlankheit $\lambda < 20$ eintreten könnte. Die Annahme der Gültigkeit des *Hooke'schen* Gesetzes bis zur Fließgrenze ist durch die sorgfältig durchgeführten Druckversuche des Deutschen Stahlbau-Ausschusses hinreichend begründet.⁵ Ersetzt man ferner die Biegelinie durch eine Sinuslinie, so gelangt man zunächst im einfachsten Falle des Rechteckquerschnittes zu der von mir angegebenen formelmäßigen Lösung,⁶ deren Ergebnisse mit den aus der genauen Biegelinie abgeleiteten strengen Werten weitgehende Übereinstimmung (größter Fehler 3 %) zeigt;⁷ die Fließgrenze ist hierbei in üblicher Weise aus einem Druckversuch zu bestimmen. Ich habe schließlich unter den gleichen Voraussetzungen das Tragverhalten exzentrisch gedrückter Stahlstäbe in Abhängigkeit von der Querschnittsform untersucht,⁸ wobei im Hinblick auf die dünnwandigen Profile des Stahlbaues die Stabilitätsverhältnisse sowohl in der Momentenebene als auch senkrecht dazu einer Klärung bedürfen. Fig. 1 zeigt für den am häufigsten verwendeten Stahl St. 37 und ein Exzentrizitätsmaß $m = 1$ (die Axialkraft

³ Vgl. die Berichte der I. Internat. Tagung und des I. Internat. Kongresses für Brückenbau und Hochbau, Wien 1928 und Paris 1932.

⁴ *E. Chwalla*: „Theorie des außermittig gedrückten Stabes aus Baustahl.“ Stahlbau 1934. (Zusammenfassende Darstellung des strengen graphischen Verfahrens.)

⁵ *W. Rein*: „Versuche zur Ermittlung der Knickspannungen für verschiedene Baustähle.“ II. 4 der Berichte des Ausschusses für Versuche im Stahlbau. J. Springer, Berlin 1930.

⁶ *K. Ježek*: „Näherungsberechnung der Tragkraft exzentrisch gedrückter Stahlstäbe.“ Stahlbau 1935. — „Die Tragfähigkeit axial gedrückter und auf Biegung beanspruchter Stahlstäbe.“ Stahlbau 1936.

⁷ *K. Ježek*: „Die Tragfähigkeit des exzentrisch beanspruchten und des querbelasteten Druckstabes aus einem ideal plastischem Stahl.“ Sitzungsberichte der Akademie der Wissenschaften in Wien, Math.-naturw. Kl., Abt. II a, 143. Bd., 7. H., 1934.

⁸ *K. Ježek*: „Die Festigkeit von Druckstäben aus Stahl.“ — Julius Springer, Wien 1937.

greift im Kernpunkt an) die kritische Axialspannung σ_{kr} , oberhalb welcher ein Gleichgewicht zwischen äußeren und inneren Kräften unmöglich ist, in Abhängigkeit von der Schlankheit λ und der Querschnittsform. Man erkennt, daß der Einfluß der Profilform bei kurzen Stäben bedeutend ist, jedoch sowohl

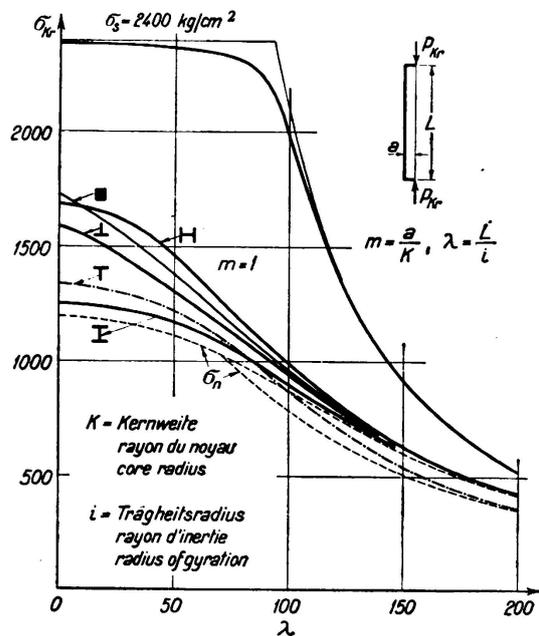


Fig. 1.

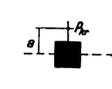
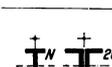
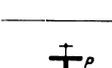
Schließlich gelingt es aus einer Betrachtung über Stäbe beliebiger Querschnittsform die in Tafel I angegebene einheitliche und für jede Stahlart anwendbare Näherungsformel abzuleiten, deren Beiwerte μ_1 und μ_2 von der Profilform abhängig sind. Für Stäbe mit T-Querschnitt ist unterhalb einer bestimmten Axialspannung eine zweite ähnlich gebaute Formel zu verwenden. Diese Berechnungsgrundlagen gelten ganz allgemein für axial gedrückte und auf Biegung beanspruchte Stahlstäbe, wenn als Exzentrizität im erweiterten Sinne das Verhältnis aus Biegemoment (bezogen auf die nicht verformte Stabachse) zu Axialkraft verstanden wird; bezüglich näherer Erläuterungen verweise ich auf meine Veröffentlichungen. Für $\mu_1 = 1$ und $\mu_2 = 0$ erhält man die zur Berechnung der in Fig. 1 strichliert eingezeichneten σ_n -Linie erforderlichen Formeln.

Für die praktische Bemessung von „entwurfsgemäß“ zentrisch gedrückten Stäben schlage ich vor mindestens eine unvermeidliche Exzentrizität von $\frac{1}{100}$ der Kernweite in Rechnung zu stellen; man erhält dann mit $m_0 = 0,01$ und $\mu_1 = 1$, $\mu_2 = 0$ eine einfache „Knickformel“, welche der heute wohl unbestrittenen Tatsache, daß die Stauchgrenze σ_s die obere Grenze für die Knickspannung darstellt, grundsätzlich entspricht und für sehr schlanke Stäbe praktisch in die Euler-Formel übergeht. Es soll nicht unerwähnt bleiben, daß diese Formeln durch die bekannt gewordenen Versuchsergebnisse gut bestätigt werden und daher bei geringer Rechenarbeit und größter Allgemeingültigkeit eine verlässliche Beurteilung der Tragfähigkeit gewährleisten. Hiermit dürfte dieses Problem in einer sowohl vom theoretischen als auch praktischen Standpunkt aus befriedigenden Form hinreichend geklärt sein.

mit wachsender Schlankheit als auch mit abnehmender Exzentrizität rasch abklingt. Am günstigsten verhalten sich Stäbe mit Kreuzquerschnitt, am ungünstigsten Stäbe mit I- und T-Querschnitt; insbesondere liegt in den beiden letzten Fällen die kritische Spannung nur wenig über der Grenzspannung σ_n des elastischen Bereiches. Die für $m = 0,01$ gezeichnete Linie der kritischen Spannungen (σ_k -Linie) ist von der Querschnittsform nahezu unabhängig und zeigt deutlich den bei mittelschlanken Stäben verhängnisvollen Einfluß einer verschwindend kleinen Exzentrizität von $\frac{1}{100}$ der Kernweite auf die Tragfähigkeit.

Schließlich gelingt es aus einer Betrachtung über Stäbe beliebiger Quer-

Tafel I. Berechnungsgrundlagen für exzentrisch gedrückte Stahlstäbe.

Querschnitt	Formel für die kritische Schlankheit	Gültigkeitsbereich	Beiwerte		Anmerkungen
			μ_1	μ_2	
	$\lambda^2 = \frac{\pi^2 E}{\sigma_{Kr}} \left[1 - \mu_1 \frac{m \sigma_{Kr}}{(\sigma_s - \sigma_{Kr})} \right] \left[1 - \mu_2 \frac{m \sigma_{Kr}}{(\sigma_s - \sigma_{Kr})} \right]$	unbeschränkt $0 \leq \sigma_{Kr} \leq \sigma_s$	0,5	0,5	Es bedeutet: L Stablänge F Querschnittsfläche $W_{1,2}$ Widerstandsmoment des Biegedruck- bzw. des Biegezugrandes i Trägheitsradius $\lambda = \frac{L}{i}$ Schlankheit a Exzentrizität $m = \frac{a F}{W_1}$ Exzentrizitätsmaß σ_s Fließgrenze E Elastizitätsmodul σ_{Kr} Kritische Spannung $P_{Kr} = F \sigma_{Kr}$ Tragkraft
			0,5	0,5	
			0,4	0,4	
			0,9	0,1	
			0,9	0,1	
	$\lambda^2 = \frac{\pi^2 E}{\sigma_{Kr}} \left[1 - \mu_1 \frac{W_1 m \sigma_{Kr}}{W_2 (\sigma_s + \sigma_{Kr})} \right] \left[1 - \mu_2 \frac{W_1 m \sigma_{Kr}}{W_2 (\sigma_s + \sigma_{Kr})} \right]$	$\frac{\sigma_{Kr}}{\sigma_s} \geq \frac{W_1 - W_2}{W_1 + W_2}$	0,8	0,2	$\frac{\sigma_{Kr}}{\sigma_s} \leq \frac{W_1 - W_2}{W_1 + W_2}$