

Zeitschrift: IABSE congress report = Rapport du congrès AIPC = IVBH
Kongressbericht

Band: 2 (1936)

Artikel: Elastisch eingespanntes Talsperrengewölbe

Autor: Hofacker, K.

DOI: <https://doi.org/10.5169/seals-2861>

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. [Mehr erfahren](#)

Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. [En savoir plus](#)

Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. [Find out more](#)

Download PDF: 17.07.2025

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>

VI 5

Elastisch eingespanntes Talsperrengewölbe.

L'arc de barrage élastiquement encastré.

Elastically Built-in Arch Dams.

Dr. sc. techn. K. Hofacker,
Zürich.

Als „Talsperrengewölbe“ soll ein Bogen mit kreisförmig gekrümmter Axe und mit konstanter Bogenstärke, die im Verhältnis zur Spannweite groß sein kann, bezeichnet werden. Im Gegensatz zum „Brückengewölbe“, das als Stabwerk genau genug auf Grund der Navierschen Biegungstheorie berechnet werden darf, muß das Talsperrengewölbe nach der mathematischen Elastizitätstheorie untersucht werden, falls ein genaues Bild über den effektiven Spannungszustand entworfen werden soll.

Zerlegt man den Wasserdruck, der auf eine Gewölbestaumauer wirkt, nach bekannter Methode auf die beiden sich durchdringenden Systeme von waagerechten Bogen und lotrechten Konsolträgern, so ergeben sich für die einzelnen Elemente ganz beliebige Belastungsdiagramme. Die Berechnung der Spannungen in lotrechten scheibenförmigen Trägerelementen nach der Theorie des ebenen Spannungs- bzw. Formänderungszustandes ist schon seit längerer Zeit bekannt. Auch sind schon diesbezügliche experimentelle Untersuchungen durchgeführt worden. Die Berechnung der Spannungen in horizontalen scheibenförmigen Bogenelementen ist bisher nur für den Sonderfall eines starr eingespannten Bogens durchgeführt worden. Über genaue Messungen der Spannungen oder Formänderungen von solchen Talsperrengewölben an Laboratoriumsmodellen ist dem Verfasser nichts bekannt. Es war deshalb von besonderem Interesse, die Frage des in allgemeiner Weise elastisch eingespannten Bogens, der durch beliebigen Wasserdruck belastet wird, theoretisch und experimentell zu untersuchen.¹

Wir unterwerfen eine kreisringförmige Scheibe dem ebenen Spannungszustande, Fig. 1.

Ein gegebenes Belastungsdiagramm kann mit Hilfe einer Fourierschen Reihe mathematisch dargestellt werden durch:

$$\sigma'_r = A'_0 + \sum_{n=1}^{\infty} A'_n \cdot \cos n\varphi + \sum_{n=1}^{\infty} B'_n \cdot \sin n\varphi \quad (1)$$

¹ K. Hofacker: Das Talsperrengewölbe, 1936, Verlag Gebr. Leemann & Co., Zürich.

Wir betrachten in Fig. 2 die Spannungen, die auf ein Element dF im Punkte 0 wirken und schreiben die Gleichgewichtsbedingungen an. Unter Berücksichtigung der Beziehungen zwischen den Spannungen und den Dehnungen,

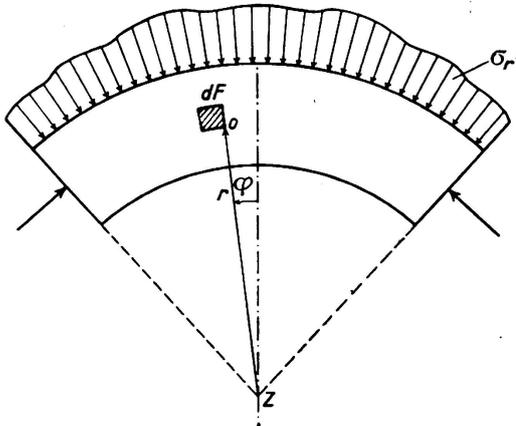


Fig. 1.

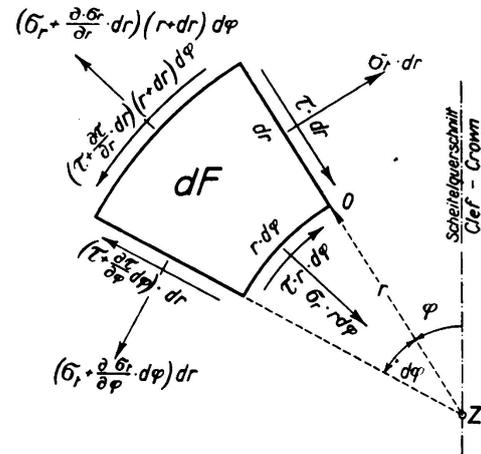


Fig. 2.

d. h. den bezogenen Differenzen der Verschiebungen u und v in radialer und tangentialer Richtung, ergeben sich die beiden Differentialgleichungen:

$$\frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2} + \frac{2m}{m-1} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial r} - \frac{u}{r^2} \right) \quad (2)$$

$$+ \frac{1}{r} \frac{\partial^2 v}{\partial r \cdot \partial \varphi} - \frac{1}{r^2} \frac{\partial v}{\partial \varphi} + \frac{2m}{m-1} \left(\frac{1}{mr} \frac{\partial^2 v}{\partial r \cdot \partial \varphi} - \frac{1}{r^2} \frac{\partial v}{\partial \varphi} \right) = 0$$

$$\frac{\partial^2 v}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial v}{\partial r} - \frac{v}{r^2} + \frac{2m}{m-1} \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 v}{\partial \varphi^2} \quad (3)$$

$$+ \frac{\partial^2 u}{\partial r \cdot \partial \varphi} \cdot \frac{1}{r} \frac{m+1}{m-1} + \frac{\partial u}{\partial \varphi} \cdot \frac{1}{r^2} \cdot \frac{3m-1}{m-1} = 0$$

Die allgemeinen Lösungen für u und v lauten:

Radialverschiebung:

$$\begin{aligned} E \cdot u = & -\frac{m+1}{m} \cdot \frac{a_0}{r} + \left[\frac{2(m-1)}{m} \cdot b_0 - \frac{m+1}{m} c_0 \right] \cdot r + \frac{2(m-1)}{m} \cdot c_0 \cdot r \lg r \\ & + \left(\frac{m-1}{2m} \cdot a_1 + 2\beta_1 \right) \varphi \cdot \sin \varphi - \left(\frac{m-1}{2m} \cdot c_1 + 2\delta_1 \right) \varphi \cdot \cos \varphi \\ & + \left[\left(a_1 + \frac{m-1}{m} \cdot \beta_1 \right) \lg r + \frac{m-3}{m} \cdot b_1 r^2 + \frac{m+1}{m} \frac{\alpha_1}{r^2} \right] \cos \varphi \\ & + \left[\left(c_1 + \frac{m-1}{m} \cdot \delta_1 \right) \lg r + \frac{m-3}{m} \cdot d_1 r^2 + \frac{m+1}{m} \cdot \frac{\gamma_1}{r^2} \right] \sin \varphi \quad (4) \\ & + \sum_{n=2}^{\infty} \left[-\frac{m+1}{m} \cdot n \cdot a_n \cdot r^{n-1} - \left(\frac{2n}{m} + (n-2) \frac{m-1}{m} \right) b_n \cdot r^{n+1} \right. \\ & \quad \left. + \frac{m+1}{m} \cdot n \cdot \alpha_n \cdot r^{-n-1} + \left(\frac{2n}{m} + (n+2) \frac{m-1}{m} \right) \cdot \beta_n \cdot r^{-n+1} \right] \cos n \varphi \\ & + \sum_{n=2}^{\infty} \left[-\frac{m+1}{m} \cdot n \cdot c_n \cdot r^{n-1} - \left(\frac{2n}{m} + (n-2) \frac{m-1}{m} \right) \cdot d_n \cdot r^{n+1} \right. \\ & \quad \left. + \frac{m+1}{m} \cdot n \cdot \gamma_n \cdot r^{-n-1} + \left(\frac{2n}{m} + (n+2) \frac{m-1}{m} \right) \cdot \delta_n \cdot r^{-n+1} \right] \sin n \varphi \end{aligned}$$

Tangentialverschiebung:

$$\begin{aligned}
E \cdot v = & -\frac{m+1}{m} \cdot \frac{\alpha_0}{r} + 4 c_0 r \cdot \varphi + \left(\frac{m-1}{2m} \cdot a_1 + 2 \beta_1 \right) \varphi \cdot \cos \varphi \\
& + \left(\frac{m-1}{2m} \cdot c_1 + 2 \delta_1 \right) \varphi \cdot \sin \varphi \\
& + \left[- \left(a_1 + \frac{m-1}{m} \cdot \beta_1 \right) \lg r - \frac{m+1}{2m} \cdot a_1 + \frac{5m+1}{m} b_1 r^2 \right. \\
& \quad \left. + \frac{m+1}{m} \cdot \frac{\alpha_1}{r^2} - \frac{m+1}{m} \cdot \beta_1 \right] \sin \varphi \\
& + \left[\left(c_1 + \frac{m-1}{m} \cdot \delta_1 \right) \lg r + \frac{m+1}{2m} \cdot c_1 - \frac{5m+1}{m} \cdot d_1 r^2 \right. \\
& \quad \left. - \frac{m+1}{m} \cdot \frac{\gamma_1}{r^2} + \frac{m+1}{m} \cdot \delta_1 \right] \cos \varphi \\
& + \sum_{n=2}^{\infty} \left[\frac{m+1}{m} \cdot n \cdot a_n \cdot r^{n-1} + \left(n \frac{m+1}{m} + 4 \right) b_n \cdot r^{n+1} \right. \\
& \quad \left. + \frac{m+1}{m} \cdot n \cdot \alpha_n \cdot r^{-n-1} + \left(n \frac{m+1}{m} - 4 \right) \cdot \beta_n \cdot r^{-n+1} \right] \sin n \varphi \\
& + \sum_{n=2}^{\infty} \left[\frac{m+1}{m} \cdot n \cdot c_n \cdot r^{n-1} - \left(n \frac{m+1}{m} + 4 \right) \cdot d_n \cdot r^{n+1} \right. \\
& \quad \left. - \frac{m+1}{m} \cdot n \cdot \gamma_n \cdot r^{-n-1} - \left(n \frac{m+1}{m} - 4 \right) \cdot \delta_n \cdot r^{-n+1} \right] \cos n \varphi
\end{aligned} \tag{5}$$

Aus den Verschiebungen berechnen sich die Spannungen zu:

Radialspannung

$$\begin{aligned}
\sigma_r = & \frac{a_0}{r^2} + 2 b_0 + c_0 (2 \lg r + 1) + \left(\frac{a_1 + \beta_1}{r} + 2 b_1 r - \frac{2 \alpha_1}{r^3} \right) \cos \varphi \\
& + \left(\frac{c_1 + \delta_1}{r} + 2 d_1 r - \frac{2 \gamma_1}{r^3} \right) \sin \varphi \\
& + \sum_{n=2}^{\infty} [n(1-n) \cdot a_n \cdot r^{n-2} + (n-n^2+2) b_n r^n \\
& \quad - n(n+1) \cdot \alpha_n \cdot r^{-n-2} - (n^2+n-2) \beta_n \cdot r^{-n}] \cos n \varphi \\
& + \sum_{n=2}^{\infty} [n(1-n) \cdot c_n \cdot r^{n-2} + (n-n^2+2) \cdot d_n r^n \\
& \quad - n(n+1) \cdot \gamma_n \cdot r^{-n-2} - (n^2+n-2) \cdot \delta_n \cdot r^{-n}] \sin n \varphi
\end{aligned} \tag{6}$$

Tangentialspannung

$$\begin{aligned}
\sigma_t = & -\frac{a_0}{r^2} + 2 b_0 + c_0 (2 \lg r + 3) + \left(6 b_1 r + \frac{2 \alpha_1}{r^3} + \frac{\beta_1}{r} \right) \cos \varphi \\
& + \left(6 d_1 r + \frac{2 \gamma_1}{r^3} + \frac{\delta_1}{r} \right) \sin \varphi \\
& + \sum_{n=2}^{\infty} [n(n-1) \cdot a_n \cdot r^{n-2} + (n+1)(n+2) \cdot b_n \cdot r^n \\
& \quad + n(n+1) \cdot \alpha_n \cdot r^{-n-2} + (n-2)(n-1) \cdot \beta_n \cdot r^{-n}] \cos n \varphi \\
& + \sum_{n=2}^{\infty} [n(n-1) \cdot c_n \cdot r^{n-2} + (n+1)(n+2) \cdot d_n \cdot r^n \\
& \quad + n(n+1) \cdot \gamma_n \cdot r^{-n-2} + (n-2)(n-1) \cdot \delta_n \cdot r^{-n}] \sin n \varphi
\end{aligned} \tag{7}$$

Schubspannung

$$\begin{aligned}
 \tau = & \frac{\alpha_0}{r^2} + \left(2b_1 r - \frac{2\alpha_1}{r^3} + \frac{\beta_1}{r} \right) \sin \varphi \\
 & - \left(2d_1 r - \frac{2\gamma_1}{r^3} + \frac{\delta_1}{r} \right) \cos \varphi \\
 & + \sum_{n=2}^{\infty} [n(n-1) \cdot a_n \cdot r^{n-2} + n(n+1) \cdot b_n \cdot r^n \\
 & \quad - n(n+1) \cdot \alpha_n \cdot r^{-n-2} - n(n-1) \cdot \beta_n \cdot r^{-n}] \sin n\varphi \\
 & - \sum_{n=2}^{\infty} [n(n-1) \cdot c_n \cdot r^{n-2} + n(n+1) d_n \cdot r^n \\
 & \quad - n(n+1) \cdot \gamma_n \cdot r^{-n-2} - n(n-1) \cdot \delta_n \cdot r^{-n}] \cos n\varphi
 \end{aligned} \tag{8}$$

Nachdem nun die allgemeinen Gesetze für die Spannungen und Verschiebungen bekannt sind, handelt es sich um die Bestimmung der Konstanten mit Hilfe der Randbedingungen, indem für die Kreisränder die entsprechenden Werte von σ_r Gl. (6) und σ'_r Gl. (1) einander gleichgesetzt, d. h. indem die Koeffizienten entsprechender trigonometrischer Terme identifiziert werden.

Für die Radialränder kann nur über die Verschiebungen der Randpunkte eine Bedingung formuliert werden. So muß bei starrer Einspannung des Gewölbes gefordert werden, daß die Randpunkte keine Verschiebungen erleiden dürfen. Bei elastischer Einspannung müssen die Verschiebungen der Randpunkte des Bogens die gleichen Werte annehmen wie die entsprechenden Punkte des Widerlagers, das durch Normal- und Schubspannungen im Einspannquerschnitt des Bogens belastet wird. Diese Frage wurde in der Publikation des Verfassers eingehender behandelt.

Zur Vereinfachung des Berechnungsverfahrens sind in Fig. 3 für die Eckpunkte A und B des Bogens die Radial- und Tangentialverschiebungen sowie die aus ihnen berechnete Verlängerung h_A der inneren Bogensehne und die Drehung ϑ des Kämpferquerschnittes eingetragen.

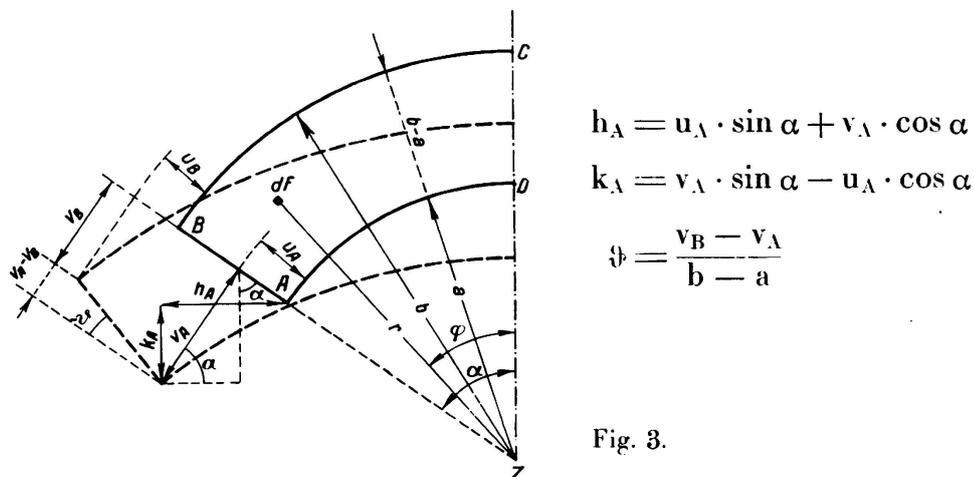


Fig. 3.

Die theoretischen Studien wurden alsdann durch Messungen an Celluloidmodellen überprüft.

Fig. 4 zeigt die Ansicht eines elastisch eingespannten Talsperrengewölbes, das an der äußern Leibung durch radialgerichtete Pressungen belastet wird.

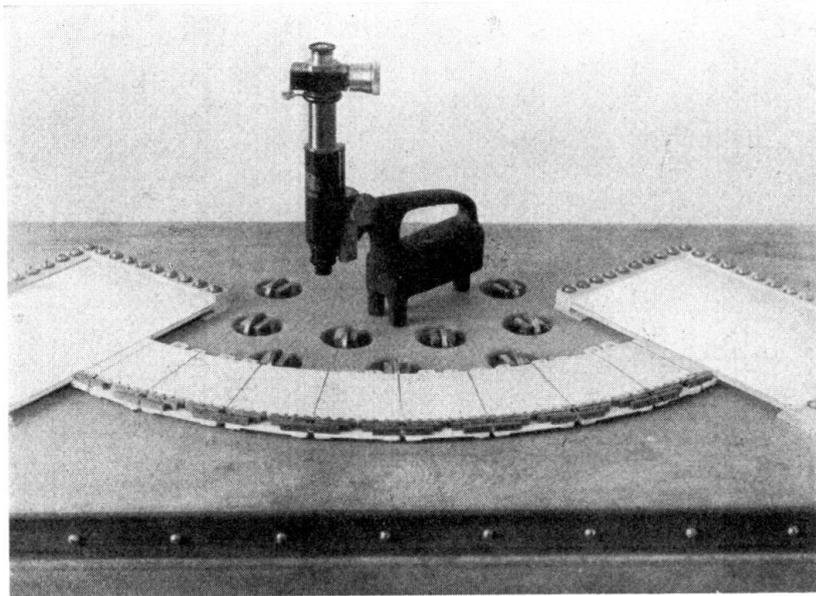


Fig. 4.

In Fig. 5 sind die mit Hilfe von Mikroskopen gemessenen Verschiebungen der Kreisränder dargestellt. Für die beiden Schnitte $\varphi = 36^\circ$ und $\varphi = 27^\circ$ sind

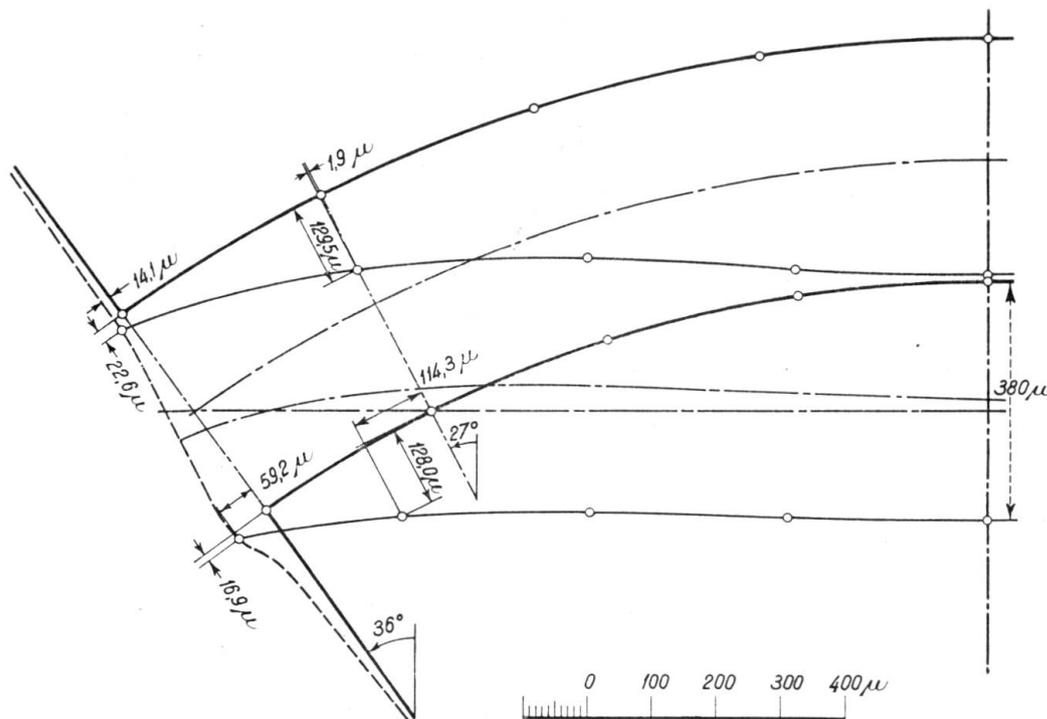


Fig. 5.

die gemessenen Werte der Verschiebungen eingetragen. Berechnet man die Scheitelsenkung des inneren Randes, indem zum Beispiel die Verschiebungen der

Randpunkte des Schnittes $\varphi = 27^\circ$ als Widerlagerverschiebungen des in diesem Radialschnitt elastisch eingespannten Bogens betrachtet werden, so erkennt man,

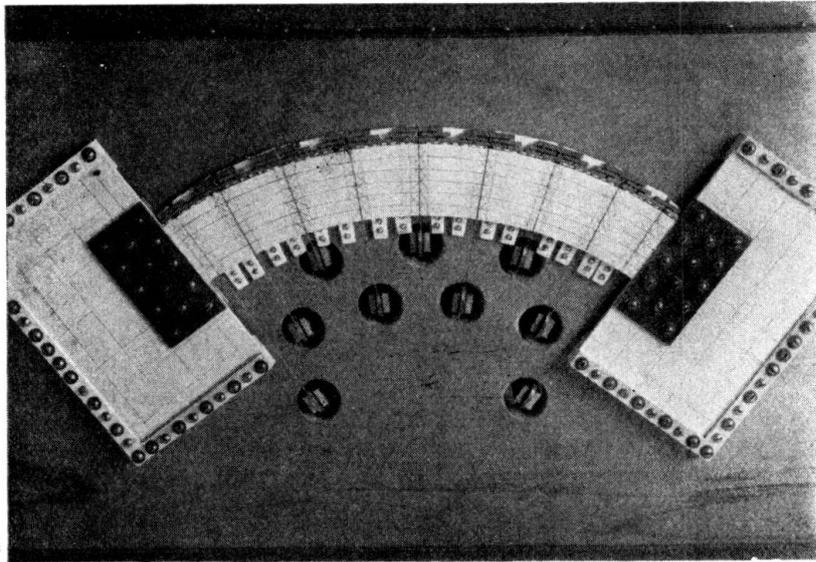


Fig. 6.

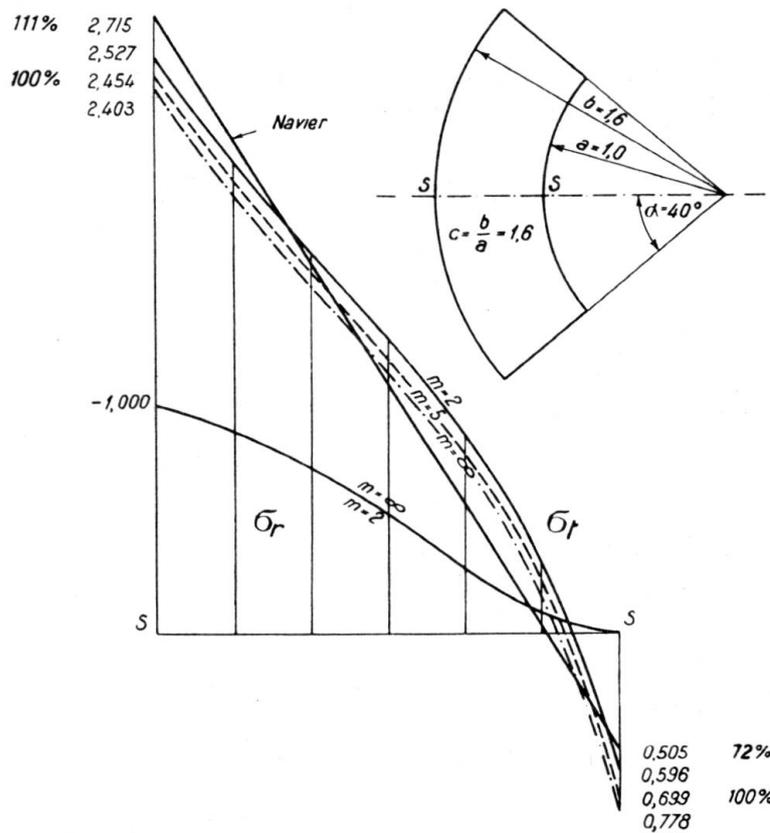


Fig. 7.

daß der gemessene Wert nur um $\frac{1}{3}\%$ größer ausfällt als der berechnete. Diese Übereinstimmung genügt zur Anerkennung der theoretischen Grundlagen des Problems.

Berechnet man unter Berücksichtigung der gemessenen Verschiebungen der Eckpunkte des Kämpferquerschnittes die Scheitelsenkung des inneren Randes, so weicht das Resultat um rd. 4 % vom gemessenen Wert ab. Fig. 6 zeigt das Modell des starr eingespannten Bogens. Setzt man für diesen Fall voraus, daß das Spannungs- und Deformationsgesetz bis zur Einspannstelle ungestört gelte, so ergibt die Rechnung gegenüber der Messung für die Scheitelsenkung einen um rd. 15 % zu kleinen Wert. Die in Wirklichkeit in der Umgebung des Einspannquerschnittes auftretenden größeren Deformationen sind eine Folge der Spannungskonzentration gegen die luftseitige Leibung hin. Die bisher in dieser Richtung durchgeführten Untersuchungen² setzen starre Einspannungen voraus.

An Hand eines Beispielles des durch Wasserdruck beanspruchten Talsperrengehölbes sollen die Spannungsdiagramme der genauen Theorie mit den Ergebnissen der Navierschen Näherungslösung, die bisher zur Untersuchung von elastisch eingespannten Gehölben ausschließlich verwendet wurde, verglichen werden. Aus Fig. 7 erkennt man gleichzeitig den Einfluß der Poissonzahl m der Querkontraktion auf die Spannungswerte. Die Näherungslösung ergibt für die Zugspannungen, unter Annahme einer Poissonzahl $m = 5$ für Beton im Scheitel, um rd. 28 % zu kleine Werte.

² *M. Caquot*: Annales des Ponts et Chaussées, 1926, IV. Juillet-Août, S. 21. *R. Chambaud*: Génie Civil 1926 (Bd. 99 und 100).