

Zeitschrift: IABSE congress report = Rapport du congrès AIPC = IVBH
Kongressbericht

Band: 2 (1936)

Artikel: Druckverteilung unter einem gleichmässig belasteten, elastischen
Plattenstreifen, welcher auf der Oberfläche des elastisch-isotropen
Halbraumes liegt

Autor: Borowicka, H.

DOI: <https://doi.org/10.5169/seals-2882>

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. [Siehe Rechtliche Hinweise.](#)

Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. [Voir Informations légales.](#)

Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. [See Legal notice.](#)

Download PDF: 08.02.2025

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>

VIII 3

Druckverteilung unter einem gleichmäßig belasteten, elastischen Plattenstreifen, welcher auf der Oberfläche des elastisch-isotropen Halbraumes liegt.

Répartition des pressions sous une semelle élastique chargée uniformément et placée sur un sol élastique isotrope.

The Distribution of Pressure Under a Uniformly Loaded Elastic Strip Resting on Elastic-Isotropic Ground.

H. Borowicka,

Assistent an der Technischen Hochschule, Wien.

Bei der rechnerischen Behandlung der Druckverteilung unter elastischen Platten sind wir gezwungen, sowohl über die Platte, als auch über den die Platte tragenden Untergrund Annahmen zu machen. Die einfachste Annahme ist die, daß die Senkung proportional der Bodenpressung gesetzt wird (*Winkler'sche Hypothese*). Damit konnte man alle mathematischen Fragen verhältnismäßig einfach erledigen. Diese Hypothese wurde jedoch besonders von den Bodenphysikern abgelehnt, weil bei dieser Theorie die Senkung von der Lastflächen-größe unabhängig ist und eine Last nur unter der Lastfläche Senkungen hervorruft. Es hat sich deshalb die Notwendigkeit ergeben, die Druckverteilung unter elastischen Platten zu untersuchen, wenn diese auf der Oberfläche des elastisch-isotropen Halbraumes gelagert wird. Wenn auch der *Boussinesq'sche* Halbraum die Eigenschaften der natürlichen Böden nur unvollkommen beschreibt, so liefert er doch physikalisch und qualitativ einwandfreie Ergebnisse. Die Behandlung des Problems mittels geschlossener Funktion führt zu äußerst verwickelten Kernproblemen, welche nur in den allereinfachsten Fällen gelöst werden können. Man muß deshalb zu Reihenentwicklungen Zuflucht nehmen.

In dieser Arbeit soll nun die Druckverteilung unter einem gleichmäßig belasteten, elastischen Plattenstreifen ermittelt werden, wenn dieser auf der Oberfläche des elastisch-isotropen Halbraumes liegt. Dabei muß freilich vorausgesetzt werden, daß zwischen Platte und Halbraum keine Reibungskräfte auftreten. Die entsprechende Arbeit über die Kreisplatte wurde vom Verfasser dem Kongreß für Erdbaumechanik in Cambridge¹⁶ vorgelegt. Es bedeutet:

- E_P Elastizitätsmodul der Platte,
- E_B Elastizitätsmodul des elastisch-isotropen Halbraums,
- m_P Poisson'sche Konstante der Platte,
- m_B Poisson'sche Konstante des Halbraums,
- a halbe Streifenbreite,
- h Dicke der Platte,
- N Biegesteifigkeit der Platte.

Bezeichnet man mit ω die Verformung der Oberfläche des Halbraumes in vertikaler Richtung, so muß ω im Bereiche $x < a$ (Fig. 1) gleichzeitig die Durchbiegung der Platte darstellen. Infolgedessen müssen an der Oberfläche des elastisch-isotropen Halbraumes folgende Beziehungen erfüllt sein:

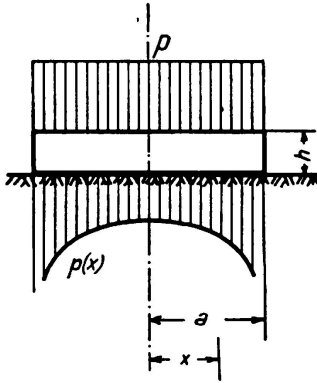


Fig. 1.

$$\left. \begin{array}{l} x > a \quad \sigma_z = 0 \quad \omega \text{ beliebig} \\ x < a \quad \sigma_z = p(x) \quad \Delta\Delta\omega = \frac{1}{N} [p - p(x)] \end{array} \right\} \quad (1)$$

Die Differentialgleichung $\Delta\Delta\omega = \frac{1}{N} [p - p(x)]$ wird in der Plattentheorie gewöhnlich als Plattengleichung bezeichnet. Der Laplacesche Operator, zweimal auf ω angewendet ergibt im betrachteten ebenen Fall $\frac{d^4\omega}{dx^4}$.

Zunächst wird die Durchbiegung der Platte betrachtet. Die Lösung der homogenen Differentialgleichung $\frac{d^4\omega}{dx^4} = 0$ kann analog jener des Balkens geschrieben werden

$$\omega_1 = C_0 + C_2 \left(\frac{x}{a}\right)^2 \quad (2)$$

Als partikulares Integral der nichthomogenen Differentialgleichung wird eine Potenzreihe mit unbekanntem Koeffizienten angesetzt:

$$\omega_2 = \sum_{i=2}^{\infty} A_{2i} \left(\frac{x}{a}\right)^{2i} \quad (3)$$

Die unbekanntem Funktion $p(x)$ wird ebenfalls durch ihre Potenzreihe dargestellt:

$$p(x) = \sum_{n=0}^{\infty} B_{2n} \left(\frac{x}{a}\right)^{2n} \quad (4)$$

Die Plattengleichung vermittelt die Beziehung zwischen den Koeffizienten A_{2i} und B_{2n} . Man erhält durch Koeffizientenvergleich:

$$\begin{aligned} A_4 &= \frac{a^4}{24N} (p - B_0) \\ A_{2n+4} &= -\frac{a^4}{N} \frac{2n!}{(2n+4)!} B_{2n} \end{aligned} \quad (5)$$

Die Durchbiegung der Platte nimmt demnach folgende Form an:

$$\omega = C_0 + C_2 \left(\frac{x}{a}\right)^2 + \frac{pa^4}{24N} \left(\frac{x}{a}\right)^4 - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a^4}{N} \frac{2n!}{(2n+4)!} B_{2n} \left(\frac{x}{a}\right)^{2n+4} \quad (6)$$

Da im Punkte $x = a$ kein Einspannmoment wirksam ist, muß $\left(\frac{d^2\omega}{dx^2}\right)_{x=a} = 0$ sein. Aus dieser Bedingung erhält man für C_2

$$C_2 = -\frac{pa^4}{4N} + \frac{a^4}{2N} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+2)(2n+1)} B_{2n} \quad (7)$$

In Gl. (6) ist die Durchbiegung ω als Funktion von x , bzw. der unbekanntenen Koeffizienten B_{2n} dargestellt. Sie ist, wie schon erwähnt, im Bereiche $x < a$ gleichzeitig die elastische Verformung der Oberfläche des Halbraumes. Wenn die Veränderlichen mit ξ und ζ bezeichnet werden (Fig. 2), erhält man für die Setzung im Punkte x :

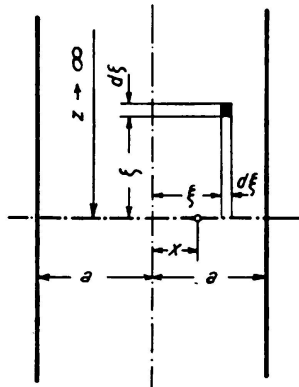


Fig. 2.

$$d\omega = 2 \int_0^z \frac{1}{2\pi r} p(\xi) \cdot 2 \frac{m^2_B - 1}{m^2_B E_B} d\xi d\zeta$$

$$\frac{m^2_B E_B}{m^2_B - 1} = M$$

$$r = \sqrt{(\xi - x)^2 + \zeta^2}$$

$$d\omega = \frac{2}{\pi M} p(\xi) d\xi \int_0^z \frac{d\zeta}{\sqrt{(\xi - x)^2 + \zeta^2}}$$

$$= \frac{2}{\pi M} p(\xi) d\xi (\ln [z + \sqrt{(\xi - x)^2 + z^2}] - \ln |\xi - x|)$$

Geht man mit $z \rightarrow \infty$, so erhält man für ω unendlich große Werte. Es wird deshalb die Differenz von ω_0 (Durchbiegung in Plattenmitte) und ω gebildet.

$$d\omega_0 - d\omega = \frac{2}{\pi M} p(\xi) d\xi \left\{ \ln \frac{z + \sqrt{\xi^2 + z^2}}{z + \sqrt{(\xi - x)^2 + z^2}} + \ln |\xi - x| - \ln |\xi| \right\}$$

$$\lim_{z \rightarrow \infty} \ln \frac{z + \sqrt{\xi^2 + z^2}}{z + \sqrt{(\xi - x)^2 + z^2}} = \lim_{z \rightarrow \infty} \ln \frac{1 + \sqrt{\left(\frac{\xi}{z}\right)^2 + 1}}{1 + \sqrt{\left(\frac{\xi - x}{z}\right)^2 + 1}} = \ln 1 = 0$$

Folglich erhält man:

$$\omega_0 - \omega = \frac{2}{\pi M} \left\{ \int_x^a p(\xi) \ln(\xi - x) d\xi + \int_{-a}^x p(\xi) \ln(x - \xi) d\xi - 2 \int_0^a p(\xi) \ln \xi d\xi \right\}$$

Die ausgeführte Integration ergibt, wenn für $p(\xi) = \sum_{n=0}^{\infty} B_{2n} \left(\frac{\xi}{a}\right)^{2n}$ laut Gl. (4) eingesetzt wird und die sich hiebei ergebenden logarithmischen Funktionen durch ihre Potenzreihen ersetzt werden:

$$\omega_0 - \omega = \frac{4}{\pi M} \sum_{n=0}^{\infty} B_{2n} \frac{a}{2n+1} \left\{ \left(\frac{x}{a}\right)^{2n} \sum_{r=1}^{\infty} \frac{1}{2r-1} \left(\frac{x}{a}\right)^{2r} - \sum_{r=1}^{\infty} \frac{1}{2r} \left(\frac{x}{a}\right)^{2r} - \sum_{r=1}^n \frac{1}{2n-2r+1} \left(\frac{x}{a}\right)^{2r} \right\} \quad (8)$$

Gl. (8) kann noch etwas umgeformt werden, indem die Summenzeichen vertauscht werden.

$$\omega_0 - \omega = \frac{4a}{\pi M} \left\{ \sum_{r=1}^{\infty} \frac{1}{2r-1} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{B_{2n}}{2n+1} \left(\frac{x}{a}\right)^{2n+2r} - \sum_{r=1}^{\infty} \frac{1}{2r} \left(\frac{x}{a}\right)^{2r} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{B_{2n}}{2n+1} - \sum_{r=1}^n \left(\frac{x}{a}\right)^{2r} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{B_{2n}}{(2n-2r+1)(2n+1)} \right\} \quad (9)$$

Aus Gl. (6) erhält man für $x = 0$ $\omega_0 = C_0$ und es wird

$$\omega_0 - \omega = -C_2 \left(\frac{x}{a}\right)^2 - \frac{pa^4}{24N} \left(\frac{x}{a}\right)^4 + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a^4}{N} \frac{2n!}{(2n+4)!} B_{2n} \left(\frac{x}{a}\right)^{2n+4} \quad (10)$$

Nun tritt noch die Gleichgewichtsbedingung hinzu

$$p = \frac{1}{a} \sum_{n=0}^{\infty} \int_0^a B_{2n} \left(\frac{x}{a}\right)^{2n} dx = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{B_{2n}}{2n+1} \quad (11)$$

Gleichungen (9) und (10) müssen identisch sein. Diese Bedingung ist erfüllt, wenn die Koeffizienten jeder Potenz von $\left(\frac{x}{a}\right)$ in Gl. (9) und (10) gleich sind.

Man erhält auf diese Weise unendlich viele Gleichungen für die unendlich vielen Unbekannten B_{2n} . Soll z. B. die m -te Gleichung aufgestellt werden, so

müssen alle Glieder der Potenz $\left(\frac{x}{a}\right)^{2m}$ herausgesucht werden. In Gl. (10) muß dann $2n+4 = 2m$ gesetzt werden oder $n = m-2$. In Gl. (9) wird im ersten Klammerausdruck $2n+2r = 2m$ oder $r = m-n$. Der Koeffizient lautet dann $\sum_{n=0}^{m-1} \frac{B_{2n}}{(2n+1)(2m-2n-1)}$.

Im zweiten und dritten Klammerausdruck von Gl. (9) ist $r = m$ zu setzen. Damit erhält man als Koeffizient von $\left(\frac{x}{a}\right)^{2m}$ $\frac{1}{2m} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{B_{2n}}{2n+1} = \frac{p}{2m}$ (laut Gl. 11)

und $\sum_{n=m}^{\infty} \frac{B_{2n}}{(2n-2m+1)(2n+1)}$.

Somit erhält man folgende Gleichungen, wenn vorher noch bezeichnet wird

$$K = \frac{2N}{Ma^3} = \frac{1}{6} \frac{m^2_B - 1}{m^2_P - 1} \frac{m^2_P}{m^2_B} \frac{E_P}{E_B} \left(\frac{h}{a}\right)^3 \quad (12)$$

und für C_2 aus Gl. (7) eingesetzt wird:

$$\left. \begin{aligned} p &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{B_{2n}}{2n+1} \\ \frac{p}{2} + \frac{p\pi}{8K} &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{B_{2n}}{(2n+1)(1-2n)} + \frac{\pi}{4K} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{B_{2n}}{(2n+2)(2n+1)} \\ \frac{p}{4} - \frac{p\pi}{48K} &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{B_{2n}}{(2n+1)(3-2n)} - \frac{\pi B_0}{48K} \\ &\vdots \\ \frac{p}{2m} &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{B_{2n}}{(2n+1)(2m-1-2n)} - B_{2m-4} \frac{\pi}{2K} \frac{(2m-4)!}{2m!} \end{aligned} \right\} \quad (13)$$

Man überzeugt sich leicht, daß die Gleichungen (13) durch den Ansatz $B_{2n} = \frac{2}{\pi} \frac{1 \cdot 3 \cdot \dots \cdot 2n-1}{2 \cdot 4 \cdot \dots \cdot 2n} p$ für $K = \infty$ befriedigt werden. Das sind aber die Koeffizienten der Potenzreihe der Funktion

$$p(x) = \frac{2}{\pi} \frac{p \cdot a}{\sqrt{a^2 - x^2}} \quad (14)$$

Für $K = 0$ wird $B_0 = p$, während alle übrigen Koeffizienten 0 werden. Es steht dann die Gleichlast unmittelbar am elastisch-isotropen Halbraum. Die Gleichungen 13 wurden für $K = \frac{\pi}{3}$, $K = \frac{\pi}{10}$ und $K = \frac{\pi}{30}$ und $p = 1 \text{ kg/cm}^2$ ausgewertet. Die Resultate sind in Fig. 3 dargestellt. Am Rande werden die Span-

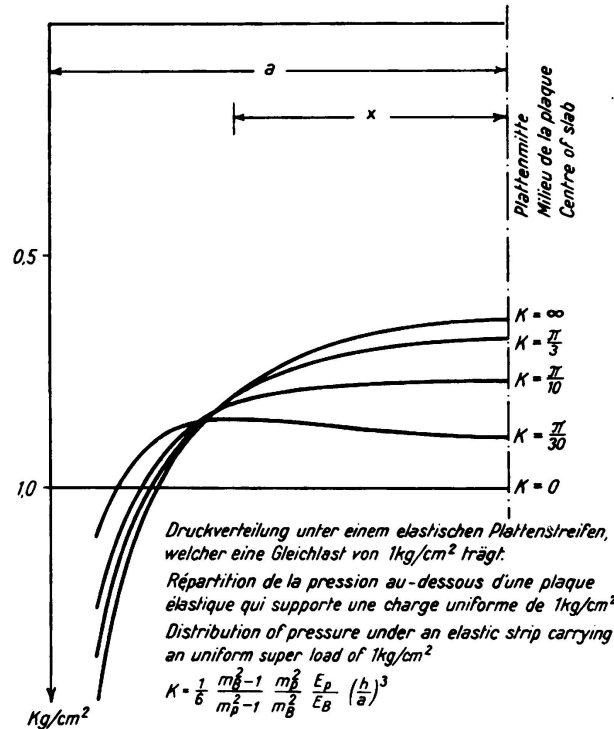


Fig. 3.

nungen für von 0 verschiedene Steifigkeiten unendlich. Die Richtigkeit dieses Ergebnisses kann auch durch folgende Überlegung veranschaulicht werden: Bei der unendlich starren Platte ist die Biegefläche der Platte eine Ebene. In der

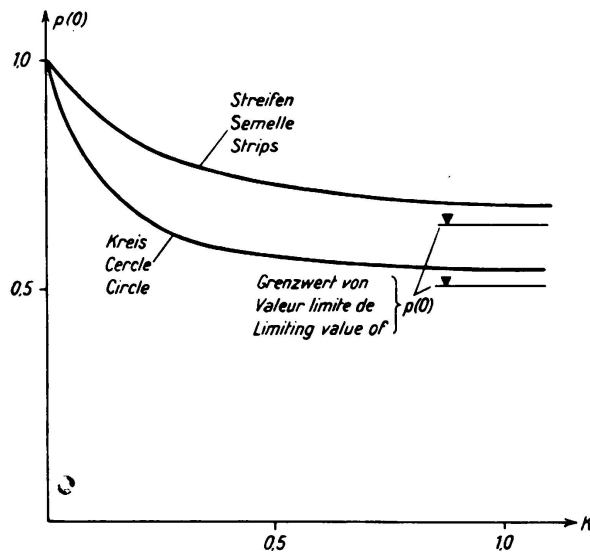


Fig. 4.

Verformungslinie der Oberfläche des Halbraumes entsteht am Rande ein scharfes Eck. Hat nun die Platte eine endliche Steifigkeit, so wird dieses Eck zwar weniger scharf, aber doch noch vorhanden sein. Dementsprechend wird die

Bodenpressung am Rande — wenn auch langsamer — unendlich. Ist die Platte nicht mit 1 kg/cm^2 , sondern mit $p \text{ kg/cm}^2$ belastet, so sind die Ordinaten der in Fig. 3 dargestellten Kurven mit p zu multiplizieren. Die Auswertung der Gleichungen 13 ist ziemlich mühevoll, da eine große Anzahl von Gleichungen aufgelöst werden muß. In Fig. 4 ist der Wert der Bodenpressung in Plattenmitte für Streifen und Kreisplatte in Abhängigkeit von K dargestellt (16). Die Kurven gelten wieder für 1 kg/cm^2 . Die Kurven für die Kreisplatte und für den Plattenstreifen sind für eine Poissonzahl von $m = 4$ gerechnet.

Boussinesq beweist in „Application des potentiels“ (Paris 1885), daß sich die Verteilung der Pressungen unterhalb der vollkommen starren Kreisplatte auf folgende einfache Weise ergeben muß: Denkt man sich die auf der Platte stehende Last über eine Halbkugel, deren Grundkreis mit dem Rand der Platte zusammenfällt, gleichmäßig verteilt, so gibt die Projektion der so verteilten Last auf die Oberfläche des Halbraumes die gesuchte Spannungsverteilung. Herr *O. K. Fröhlich*, der mich veranlaßte, mich mit diesen Fragen zu beschäftigen, hat die *Boussinesq*'sche Konstruktion sinngemäß auf den starren Plattenstreifen übertragen und als Kontrolle für einen Grenzfall der Berechnung des elastischen Plattenstreifens empfohlen. Wie man aus Gleichung 14 ersieht, wird die Spannungsverteilung für den starren Plattenstreifen tatsächlich durch das für den ebenen Fall sinngemäß angewendete *Boussinesq*'sche Verfahren bestätigt.

Schrifttum.

- ¹ *Winkler*: Die Lehre von der Elastizität und Festigkeit. Prag 1867.
- ² *Zimmermann*: Berechnung des Eisenbahnoberbaues. Berlin 1888.
- ³ *Fröhlich*: Berechnung von Fundamenten unter Berücksichtigung der Elastizität des Baugrundes. „Beton und Eisen“ 1913, Heft 15 und 16.
- ⁴ *Hayashi*: Theorie des Trägers auf elastischer Unterlage und ihre Anwendung auf den Tiefbau. Berlin 1921.
- ⁵ *Chwalla*: Die Stabilität eines elastisch gebetteten Druckstabes. „Z. ang. Math.“ 1927, Heft 4.
- ⁶ *Schleicher*: Über Kreisplatten auf elastischer Unterlage. Berlin 1925. Nochmals Kreisplattenfundamente. „Beton und Eisen“ 1925, Heft 12.
- ⁷ *Scheidig*: Nochmals Kreisplattenfundamente. „Beton und Eisen“ 1926, Heft 6. Die Berechnungsgrundlagen durchgehender Fundamente und die neue Baugrundforschung. „Bautechn.“ 1931, Heft 19.
- ⁸ *Wiegardt*: Über den Balken auf nachgiebiger Unterlage. „Z. ang. Math.“ 1922.
- ⁹ *Prager*: Zur Theorie elastisch gelagerter Konstruktionen. „Z. ang. Math.“ 1927, Heft 5.
- ¹⁰ *Fröhlich*: Die Bemessung von Flachgründungen und die neuere Baugrundforschung. „Beton und Eisen“ 1935, Heft 12.
- ¹¹ *Melan*: Die Verteilung des Druckes durch eine elastische Schichte. „Österr. W. für den öffentl. Baudienst“ 1918, S. 394. Die Druckverteilung durch eine elastische Schichte. „Beton und Eisen“ 1919, Heft 7/8. Der Spannungszustand der durch eine Einzelkraft im Innern beanspruchten Halbscheibe. „Z. ang. Math.“ 1932, Heft 6.
- ¹² *Schleicher*: Zur Theorie des Baugrundes. „Bauingenieur“ 1926, S. 931 und 949.
- ¹³ *Fröhlich*: Druckverteilung im Baugrunde mit besonderer Berücksichtigung der plastischen Erscheinungen. Wien 1934.
- ¹⁴ *Wolf*: Ausbreitung der Kraft in der Halbebene und im Halbraum bei anisotropem Material. „Z. ang. Math.“ 1935, Heft 5.
- ¹⁵ *Terzaghi* und *Fröhlich*: Theorie der Setzung von Tonschichten. Wien und Leipzig 1936.
- ¹⁶ *Borowicka*: Influence of Rigidity of a Circular Foundation Slab on the Distribution of Pressures over the Contact Surface. Proceedings of the International Conference on Soil Mechanics and Foundation Engineering 1936 Harvard University, Cambridge, Mass.