

**Zeitschrift:** IABSE congress report = Rapport du congrès AIPC = IVBH  
Kongressbericht

**Band:** 2 (1936)

**Artikel:** Etude des voiles minces courbes ne subissant pas de flexion

**Autor:** Aimond, F.

**DOI:** <https://doi.org/10.5169/seals-2953>

### **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. [Siehe Rechtliche Hinweise.](#)

### **Conditions d'utilisation**

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. [Voir Informations légales.](#)

### **Terms of use**

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. [See Legal notice.](#)

**Download PDF:** 02.02.2025

**ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>**

## IVa1

# Etude des voiles minces courbes ne subissant pas de flexion.

Einführung in die allgemeine Theorie der biegungsfreien Schalen.

Theory of Thin Curved Shells not Subjected to Bending.

Dr. ès sciences F. Aimond,

Ingénieur des Ponts et Chaussée détaché au Ministère de l'Air, Paris.

1° — *Rappel des équations générales en coordonnées rectilignes de l'équilibre statique des voiles minces.*

Soit  $z = f(x, y)$  l'équation de la surface en coordonnées rectilignes quelconques non nécessairement rectangulaires. L'état des contraintes en un point  $m$  du voile, est déterminé par la connaissance des contraintes  $n_1, n_2, \Theta$ , agissant sur les éléments  $mm_1$  et  $mm_2$  respectivement parallèles aux plans  $zox$  et  $zoy$ .  $n_1$  agit sur  $mm_2$  parallèlement au plan  $zox$ ,  $n_2$  agit sur  $mm_1$  parallèlement au plan  $zoy$ ,  $\Theta$  agit à la fois sur  $mm_1$  parallèlement à  $zox$ , et sur  $mm_2$  parallèlement à  $zoy$  (fig. 1). Désignons par  $\alpha_1, \beta_1, \gamma_1$  et  $\alpha_2, \beta_2, \gamma_2$  les coefficients directeurs des tangentes aux éléments  $mm_1$  et  $mm_2$ , c'est-à-dire les projections suivant  $ox, oy, oz$  du vecteur unité portées par chacune de ces tangentes.

Supposons le voile chargé d'une manière quelconque, et appelons  $Xdx dy, Ydx dy, Zdx dy$  les composantes suivant  $ox, oy, oz$ , de la charge appliquée à l'élément  $mm_1 m'_2$  limité aux parallèles  $mm_1$  et  $m_2 m'$  au plan  $zox$  et aux parallèles  $mm_2$  et  $m_1 m'$  au plan  $zoy$ . L'étude des conditions d'équilibre des dits éléments conduit aux équations suivantes:

$$(1) \quad \frac{\partial v_1}{\partial x} + \frac{\partial \Theta}{\partial y} = X$$

$$(2) \quad \frac{\partial \Theta}{\partial x} + \frac{\partial v_2}{\partial y} = Y$$

$$(3) \quad r v_1 + 2s \Theta + t v_2 = \zeta$$

en posant

$$p = \frac{\partial f}{\partial x} \quad q = \frac{\partial f}{\partial y} \quad r = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \quad s = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \quad t = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$$

$$\zeta = Z - pX - qY,$$

$$v_1 = n_1 \frac{\alpha_1}{\beta_2} \quad v_2 = n_2 \frac{\beta_2}{\alpha_1}.$$

2° — *Interprétation géométrique des quantités figurant dans les équations générales d'équilibre.*

La quantité  $\zeta$  figurant au second membre de l'équation (3) n'est autre que la projection du vecteur  $(X, Y, Z)$  sur  $oz$ , cette projection étant effectuée parallèlement au plan tangent à la surface. Pour interpréter les quantités  $v_1$ ,  $v_2$  et  $\Theta$  qui sont les inconnues des équations d'équilibre, définissons d'une manière générale ce que nous appellerons contrainte réduite. Par définition, la contrainte réduite s'exerçant sur un élément du voile est la projection sur le plan des  $xy$  de la force élastique s'exerçant sur cet élément, divisée par la longueur de la projection de l'élément. On constate facilement que la répartition des contraintes réduites autour d'un point suit les mêmes lois que les contraintes réelles et en particulier la représentation de Mohr leur est applicable. Les quantités  $v_1$ ,  $v_2$ ,  $\Theta$ , sont précisément les contraintes réduites relatives aux éléments qui se projettent suivant des parallèles aux axes des  $x$  et des  $y$ . On peut remarquer que les contraintes de cisaillement  $\Theta$  se conservent en projection tandis qu'il n'en est pas de même des autres contraintes  $n_1$ ,  $n_2$ .

3° — *Interprétation géométrique des équations générales d'équilibre.*

Les équations (1) et (2) expriment évidemment l'équilibre en projection sur le plan tangent. L'équation (3) exprime au contraire l'équilibre des forces appliquées normalement au voile. Pour l'interpréter géométriquement, prenons l'origine  $o$  du trièdre  $oxyz$  sur la surface, et orientons  $ox$  et  $oy$  suivant les directions de deux éléments arbitraires. Nous pouvons achever de définir complètement le trièdre  $oxyz$  en nous donnant d'une manière arbitraire la direction  $oz$ . L'équation (3) définit une relation linéaire entre les contraintes s'exerçant sur les éléments arbitraires  $ox$  et  $oy$  et la projection  $\zeta$  effectuée sur  $oz$  parallèlement au plan tangent de la densité de la charge appliquée. Lorsqu'on change la direction  $oz$  sans toucher à  $ox$  et  $oy$ , chaque terme de la relation linéaire précédente est simplement multiplié par un même facteur.

Nous pouvons profiter de l'indétermination de la direction des éléments  $ox$  et  $oy$  pour simplifier l'équation (3). Si on dirige en particulier ces éléments suivant deux directions conjuguées de la surface, c'est-à-dire suivant deux directions conjuguées par rapport à l'indicatrice, le coefficient de  $\Theta$  s'annule et l'équation (3) se réduit à une relation linéaire entre les contraintes longitudinales  $v_1$  et  $v_2$ . On peut se demander s'il n'est pas possible d'orienter les éléments  $ox$  et  $oy$  de manière qu'il ne reste plus dans l'équation (3) qu'une seule contrainte. On voit immédiatement que cela n'est pas possible si la surface est convexe, c'est-à-dire si les rayons de courbure principaux sont de même sens et qu'au contraire cela est possible si la surface n'est pas convexe.

Plaçons-nous dans cette dernière hypothèse et distinguons deux cas, suivant que la contrainte qui reste dans l'équation (3) est une contrainte longitudinale ou le cisaillement  $\Theta$ . Le premier cas n'est possible que si la surface est développable, c'est-à-dire si on peut la considérer comme l'enveloppe d'une famille de plans tangents dépendant d'un paramètre. Si l'on prend l'élément  $ox$  suivant la direction de la génératrice rectiligne qui passe en  $o$ , l'équation (3) se réduit à

$$(4) \quad r v_1 = \zeta$$

Le deuxième cas correspond aux surfaces à courbures opposées. Si l'on prend  $ox$  et  $oy$  suivant les directions des asymptotiques, l'équation (3) se réduit à

$$(5) \quad 2s\Theta = \zeta$$

L'interprétation des équations (4) et (5) est immédiate. Interprétons d'abord l'équation (4). Il est visible que les seules contraintes agissant sur un élément infiniment petit de la surface admettant une composante non située dans le plan tangent à la surface, sont les contraintes projetées suivant  $v_1$ , et l'équation (4) exprime simplement l'identité entre les projections des contraintes  $n_1$  sur  $oz$  effectuées parallèlement au plan tangent et la projection effectuée dans les mêmes conditions de la charge appliquée.

Interprétons maintenant l'équation (5). Il suffit pour cela de considérer un quadrilatère élémentaire dont deux côtés consécutifs sont constitués par des arcs d'asymptotiques se croisant en  $o$ . Les contraintes longitudinales  $n_1$  et  $n_2$  appliquées à ce quadrilatère ont une résultante dans le plan tangent puisque cette résultante est la somme géométrique de la résultante des contraintes  $n_1$  et de la résultante des contraintes  $n_2$ , et que chacune de ces deux dernières résultantes est nécessairement dans le plan osculateur d'un arc d'asymptotique, plan osculateur qui coïncide avec le plan tangent en vertu de la définition même des asymptotiques. Donc, la composante  $\zeta$  des charges appliquées à la surface en dehors du plan tangent ne dépend que du cisaillement  $\Theta$ . Il lui est d'ailleurs proportionnel. Le coefficient de proportionnalité dont la valeur est  $2s$  a une signification géométrique excessivement simple. C'est le quotient du double de la distance du sommet opposé à  $o$  dans le quadrilatère au plan tangent en  $o$ , cette distance étant comptée parallèlement à la direction  $oz$ , par le produit des longueurs d'arcs d'asymptotiques formant les côtés du quadrilatère.

4° — *Classification des voiles minces au point de vue de leurs propriétés mécaniques.*

Les considérations précédentes conduisent à classer les voiles minces en trois groupes. Le premier groupe comprend les surfaces développables comme les cylindres et les cônes, le deuxième groupe comprend les surfaces convexes comme la sphère, le parabolôïde elliptique, l'ellipsoïde, l'hyperboloïde à deux nappes, et, d'une manière générale, toutes les surfaces à double courbure engendrées par une courbe dont la concavité est dirigée vers le bas et qui s'appuie sur une directrice courbe dont la concavité est également dirigée vers le bas. Le troisième groupe comprend les surfaces à courbures opposées comme le parabolôïde hyperbolique, l'hyperboloïde à une nappe, les conoïdes, toutes les surfaces réglées non développables, et d'une manière générale, toutes les surfaces qui peuvent être engendrées par une courbe dont la concavité est tournée vers le haut et qui s'appuie sur une directrice dont la concavité est tournée vers le bas.

Cette classification nous est suggérée par l'interprétation géométrique de l'équation (3). Les voiles du premier groupe sont ceux pour lesquels l'équation (3) peut être mise sous la forme (4), les voiles du second groupe sont ceux pour lesquels l'équation (3) peut être mise sous la forme

$$(6) \quad rv_1 + tv_2 = \zeta$$



$\tau$  et  $t$  étant de même signe, les voiles du troisième groupe sont ceux pour lesquels l'équation (3) peut se mettre sous la forme (5).

Observons que pour les voiles du troisième groupe l'équation (3) peut également se mettre sous la forme (6), mais  $r$  et  $t$  sont alors de signes contraires. Observons également que pour les voiles du deuxième groupe, l'équation (3) peut aussi être mise sous la forme (5), où  $\Theta$  représente encore le cisaillement sur les asymptotiques, mais l'équation (5) n'est plus alors une équation à termes réels,  $s$  et  $t$  sont deux expressions purement imaginaires.

Les voiles du premier groupe sont caractérisés par la propriété que la composante normale de la contrainte s'exerçant sur les génératrices rectilignes, est en chaque point proportionnelle à la composante normale de la densité de la charge appliquée. Les voiles du second groupe sont caractérisés par la propriété que la contrainte de cisaillement purement imaginaire s'exerçant sur les éléments imaginaires d'asymptotiques, est proportionnelle en chaque point à la composante normale de la densité de la charge appliquée. Les voiles du troisième groupe sont caractérisés par la propriété que la contrainte de cisaillement s'exerçant sur les éléments d'asymptotiques est proportionnelle en chaque point à la composante normale de la densité de la charge appliquée.

On peut encore faire observer la différence suivante entre les voiles du deuxième et du troisième groupe. Si l'on considère en un point les contraintes longitudinales s'exerçant sur deux éléments conjugués, la composante normale de la charge appliquée, que l'on peut considérer comme la poussée au vide produite par ces contraintes longitudinales, est une forme linéaire de ces contraintes. Cette forme est à coefficients de même signe pour les voiles du deuxième groupe et à coefficients de signes contraires pour les voiles du troisième groupe. Il en résulte que la portance d'un voile du deuxième groupe peut être considérée comme produite par des contraintes longitudinales de même sens s'exerçant sur deux éléments conjugués, et que la portance d'un voile du troisième groupe peut, d'une manière analogue, être considérée comme produite par des contraintes longitudinales de sens contraires, s'exerçant sur deux éléments conjugués.

Lorsqu'il s'agit d'un voile du second groupe, on peut toujours choisir les éléments conjugués de manière qu'ils forment un réseau orthogonal et isotherme sur la surface associée ayant pour carré de l'élément linéaire la forme quadratique

$$r dx^2 + 2 s dx dy + t dy^2.$$

Les coefficients des contraintes longitudinales correspondantes, dans la forme linéaire représentant la composante normale de la densité de la charge appliquée, sont alors égaux. On peut donc dire que dans les voiles du second groupe la composante normale de la densité de la charge à appliquer est proportionnelle à la somme des contraintes longitudinales s'exerçant suivant les éléments d'un système orthogonal et isotherme pour la surface associée.

Les différences de propriétés qui, nous venons de le voir, distinguent les voiles des trois groupes, ont une importance primordiale sur la nature des appuis que l'on peut se donner au pourtour des voiles pour parfaire leur

équilibre, et sur le mode de calcul effectif des contraintes dans les voiles en fonction des conditions au contour.

5° — *Etude des voiles du premier groupe.*

L'étude des voiles du premier groupe est une généralisation de l'étude des cylindres. L'équation (4) fait connaître, en chaque point du voile, la composante normale à la génératrice rectiligne passant en ce point, de la contrainte agissant sur un élément de cette génératrice. Par conséquent, si nous traçons sur la surface une famille de géodésiques coupant les différentes génératrices rectilignes sous un angle constant, nous connaissons la contrainte longitudinale agissant parallèlement à ces géodésiques sur les éléments de génératrices rectilignes. L'équation (2) nous fera alors connaître par une intégration immédiate la valeur du cisaillement sur les génératrices et les géodésiques, et la formule (1) par une nouvelle intégration, les contraintes longitudinales s'exerçant sur les éléments des géodésiques parallèlement aux génératrices.

La détermination des contraintes effectuée de cette manière n'est complète que si l'on se donne sur une courbe déterminée rencontrant une fois seulement chaque génératrice, les valeurs des contraintes s'exerçant sur les éléments de la dite courbe. On peut d'ailleurs aussi bien se donner sur deux courbes rencontrant chacune chaque génératrice une fois et une seule, une relation entre les composantes de la contrainte s'exerçant sur tout élément des deux courbes.

6° — *Etude des voiles du second groupe.*

Considérons un voile mince du second groupe. Nous avons vu que la composante normale de la densité de la charge appliquée était proportionnelle en chaque point à la somme des contraintes longitudinales s'exerçant sur des éléments d'un système orthogonal et isotherme pour la surface associée. Supposons que ces contraintes longitudinales soient égales. Leur valeur est alors bien déterminée en chaque point par la valeur de la composante normale de la densité de la charge. Nous avons ainsi satisfait à l'équation (3). Les équations (1) et (2) qui expriment l'équilibre dans le plan tangent ne seront alors satisfaites que si la composante tangentielle de la densité de la charge a une valeur déterminée, que l'on obtient en écrivant précisément les conditions d'équilibre parallèlement au plan tangent. Nous appellerons système fondamental de charges tout système de charges correspondant aux conditions précédentes, c'est-à-dire tel que les contraintes longitudinales s'exerçant sur des éléments d'un système orthogonal et isotherme pour la surface associée soient égales. Il est alors bien évident qu'un système quelconque de charges peut être considéré comme la somme d'un système fondamental et d'un système composé uniquement de charges tangentielles et que nous appellerons système complémentaire du système fondamental de charges.

Nous sommes ramenés ainsi à l'étude des systèmes complémentaires, c'est-à-dire des systèmes où la charge appliquée est tangente à la surface. Dans de tels systèmes, les contraintes longitudinales sur des éléments d'un système orthogonal et isotherme pour la surface associée, sont égales, et par suite la contrainte sur un élément quelconque ne dépend plus que de deux paramètres, par exemple les composantes de la contrainte s'exerçant sur un des éléments conjugués

précédents. Il est bien évident que l'on peut choisir arbitrairement ces deux paramètres. On voit facilement que l'on peut déterminer deux fonctions imaginaires conjuguées  $\varphi$  et  $\psi$  de manière qu'en prenant pour paramètres deux quantités que nous désignerons par  $S_\varphi$  et  $S_\psi$ , les forces élastiques agissant sur un élément quelconque de la surface soient une forme linéaire des expressions différentielles  $S_\varphi d\psi$  et  $S_\psi d\varphi$ . Les équations d'équilibre dans le plan tangent montrent alors que la dérivée partielle de  $S_\varphi$  par rapport à  $\varphi$  et la dérivée partielle de  $S_\psi$  par rapport à  $\psi$  sont des fonctions linéaires de  $S_\varphi$  et  $S_\psi$ . En éliminant l'un des deux paramètres,  $S_\psi$  par exemple, entre ces deux relations, on obtient une équation aux dérivées partielles linéaire du second ordre à caractéristiques imaginaires, à laquelle doit satisfaire le paramètre conservé  $S_\varphi$ .

Pour déterminer une solution de cette équation, on peut se donner la valeur de  $S_\varphi$  et d'une de ses dérivées sur une courbe arbitraire de la surface, à condition toutefois, étant donné que l'équation est à caractéristiques imaginaires, que certaines conditions d'analyticité soient remplies. Si l'on remarque que se donner  $S_\varphi$  et une de ses dérivées sur une courbe revient à se donner  $S_\varphi$  et  $S_\psi$  sur cette courbe, et par suite la contrainte s'exerçant sur un élément quelconque de la courbe, on voit que, sous certaines réserves d'analyticité, on peut déterminer les contraintes dans le voile, à condition de connaître les contraintes s'exerçant sur les éléments d'une courbe.

Les réserves relatives à l'analyticité dont nous avons parlé ne sont pas des réserves de pure forme. Elles correspondent à une réalité physique qui est la suivante. On sait en effet que dans tous les problèmes où une fonction vérifiant une équation à caractéristiques imaginaires est déterminée par les valeurs qu'elle prend, ainsi qu'une de ses dérivées, sur une courbe donnée, la solution n'est pas une fonction continue des données c'est-à-dire qu'en faisant varier très peu les données, on peut obtenir des valeurs de la fonction aussi différentes que l'on veut en des points arbitrairement choisis. Il résulte de là que les états d'équilibre d'un voile convexe correspondant à des valeurs données des contraintes s'exerçant sur une courbe ne sont pas stables par rapport aux valeurs des contraintes sur cette courbe.

Pour obtenir des solutions stables, il faut envisager des conditions aux limites différentes de celles que nous avons envisagées. Au lieu de nous donner les valeurs des contraintes sur une courbe, donnons-nous sur une courbe fermée une relation entre les composantes des contraintes s'exerçant sur les éléments de la courbe. Si cette relation est convenablement choisie le problème pourra se trouver déterminé tout au moins à une ou plusieurs constantes près, la solution étant une fonction continue des données. L'équilibre correspondant sera un équilibre stable. Supposons par exemple que nous voulions que la contrainte, le long de la courbe donnée ait une composante donnée normalement à une direction donnée, direction variable avec chaque point de la courbe. L'indétermination relative des paramètres  $S_\varphi$  et  $S_\psi$  permet de les déterminer de manière que  $S_\varphi$  représente le long de la courbe donnée la valeur de la composante normale à une direction donnée de la contrainte s'exerçant sur les éléments de la courbe. La théorie des équations intégrales permet alors de déterminer la fonction  $S_\varphi$  par une méthode analogue à celle qu'ont employée Fredholm et ses successeurs pour résoudre les problèmes du même type relatifs aux équations caractéristiques imaginaires.

## 7° — Etude des voiles du troisième groupe.

Considérons un voile mince du troisième groupe. La valeur de la composante normale de la densité de la charge détermine tout d'abord en chaque point du voile les contraintes de cisaillement sur les éléments d'asymptotiques. Supposons que les contraintes dans le voile se réduisent à ces cisaillements. Il faut et il suffit pour cela, que la composante tangentielle de la charge appliquée à un quadrilatère élémentaire d'arcs d'asymptotiques fasse équilibre à la projection sur le plan tangent de la résultante des efforts tangentiels appliqués aux éléments du quadrilatère. Nous appellerons système fondamental de charges, tout système de charges correspondant aux conditions précédentes, c'est-à-dire tel que les contraintes s'exerçant sur les éléments d'asymptotiques se réduisent à des cisaillements. Il est bien évident qu'un système quelconque de charges peut être considéré comme la superposition d'un système fondamental de charge et d'un système que nous appellerons encore système complémentaire et composé uniquement de charges tangentielles.

Nous sommes ainsi ramenés à l'étude de l'action des systèmes complémentaires. Pour cela nous remarquons encore que la force élastique s'exerçant sur un élément du voile peut encore se mettre sous la forme d'une forme linéaire d'expressions différentielles telles que  $S_\varphi d\psi$  et  $S_\psi d\varphi$ ,  $\varphi$  et  $\psi$  étant maintenant deux fonctions réelles,  $S_\varphi$  et  $S_\psi$  deux paramètres réels. Les équations d'équilibre suivant le plan tangent permettent alors d'exprimer les dérivées partielles de  $S_\varphi$  par rapport à  $\varphi$  et de  $S_\psi$  par rapport à  $\psi$  en fonction linéaire de  $S_\varphi$  et  $S_\psi$ . L'élimination de  $S_\psi$  entre ces équations conduit à une équation en  $S_\varphi$  linéaire aux dérivées partielles du second ordre à caractéristiques réelles. Les caractéristiques de cette équation aux dérivées partielles sont précisément les lignes asymptotiques.

Pour déterminer une solution de l'équation précédente valable dans un domaine  $D$  limité par un contour  $C$  décomposons ce contour en deux suites d'arcs  $\Gamma$  et  $\Gamma'$  tels que de tout point de  $D$  soient issues deux asymptotiques rencontrant  $\Gamma$  une fois et une seule, puis décomposons  $\Gamma$  en deux suites d'arcs  $\Gamma_1$  et  $\Gamma_2$  tels que toute ligne brisée d'arcs d'asymptotiques joignant tout point de  $\Gamma_1$  à un point de  $\Gamma'$  ait ses sommets intermédiaires sur  $\Gamma_2$  ou  $\Gamma'$ , et qu'il n'existe aucune ligne brisée d'arcs d'asymptotiques ayant ses extrémités sur  $\Gamma_1$  et ses sommets intermédiaires sur  $\Gamma_2$ . On obtiendra une solution unique valable dans  $D$ , en se donnant sur  $\Gamma_1$  la valeur de la contrainte s'exerçant sur les éléments de  $\Gamma_1$  et en se donnant sur  $\Gamma_2$  une relation entre les composantes de la contrainte s'exerçant sur les éléments de  $\Gamma_2$ . La valeur de la solution sera donnée par la formule de *Riemann* appliquée successivement à différents sous-domaines du domaine  $D$ . Aucune condition d'analyticité n'est ici requise et la solution obtenue est toujours une fonction continue des données. Par contre il n'existe pas en général de solution correspondant à une relation entre les composantes des contraintes s'exerçant sur les différents éléments de la courbe fermée  $C$ .

Lorsque le voile mince considéré est une surface réglée, l'équation aux dérivées partielles du second ordre peut se ramener à une équation linéaire aux dérivées partielles du premier ordre ne contenant qu'une dérivée, équation dont l'intégration est immédiate étant donné qu'on peut la considérer comme une équation

différentielle linéaire. Dans le cas où le voile mince est une quadrique réglée, la détermination des paramètres  $S_\varphi$  et  $S_\psi$  se réduit à deux quadratures.

8° — *Choix du système d'appuis dans les voiles minces des trois groupes.*

Le choix du système d'appuis dans un voile mince dépend essentiellement du groupe auquel il appartient. Nous distinguerons deux catégories d'appuis, les appuis simples pour lesquels les réactions dépendent d'un seul paramètre, et les appuis doubles pour lesquels les réactions dépendent de deux paramètres. Les composantes des contraintes que le voile transmet à un appui simple satisfont par conséquent à une relation connue a priori, tandis que les composantes des contraintes que le voile transmet à un appui double peuvent prendre des valeurs indépendantes. Par ailleurs, certaines parties du voile sur son contour peuvent ne comporter aucun appui, le bord est dit libre.

Nous nous proposons de rechercher comment il faut répartir les bords libres, les appuis simples et les appuis doubles au contour d'un voile mince pour que celui-ci soit soumis à un équilibre unique et stable.

Plaçons-nous tout d'abord dans le cas d'un voile du premier groupe. On pourra se donner un bord libre sur toute partie du contour ne comprenant pas de génératrice rectiligne, et rencontré une fois au plus par toute génératrice. Si le bord libre rencontre toutes les génératrices, la répartition des contraintes dans le voile est déterminée, et par suite, les autres bords devront comporter des appuis doubles. Le système d'équilibre correspondant est stable. Donnons-nous au contraire deux bords rencontrant chacun une seule fois toutes les génératrices et aménagés en appuis simples. On obtiendra encore un état d'équilibre stable du voile, à condition d'aménager le reste du contour, composé exclusivement de génératrices, en appuis doubles.

Considérons maintenant un voile du second groupe. Ce voile ne peut admettre de bords libres, car l'équilibre correspondant n'est pas stable. Mais on peut aménager l'ensemble du pourtour du voile en appuis simples, l'équilibre correspondant est bien déterminé et stable.

Considérons enfin un voile du troisième groupe et décomposons le contour en trois catégories d'arcs  $\Gamma_1$ ,  $\Gamma_2$ ,  $\Gamma'$  définis comme il a été indiqué au 7°. On pourra se donner un bord libre suivant  $\Gamma_1$ , des appuis simples suivant  $\Gamma_2$ , et des appuis doubles suivant  $\Gamma'$ . L'équilibre correspondant est bien déterminé et c'est un équilibre stable.

9° — *Propriétés géométriques et calculs géométriques des voiles du troisième groupe.*

Les voiles du troisième groupe présentent des propriétés géométriques remarquables qui permettent d'en faire un calcul graphique précis.

Interprétons tout d'abord géométriquement les paramètres  $S_\varphi$  et  $S_\psi$  et les fonctions  $\varphi$  et  $\psi$  introduits au 7°.  $S_\varphi$  et  $S_\psi$  sont les contraintes longitudinales s'exerçant sur les asymptotiques pour un système complémentaire de charges.  $\varphi$  et  $\psi$  sont des coordonnées curvilignes de la surface pour lesquelles les lignes de coordonnées sont les lignes asymptotiques.

Remplaçons les voiles minces par un système réticulaire gauche dont les mailles sont des quadrilatères rectilignes gauches formés par des cordes de lignes asymptotiques. Le système obtenu travaille comme la surface donnée, et l'assimilation des deux systèmes est légitime si les mailles sont suffisamment petites. Les charges appliquées au système réticulaire doivent être appliquées aux sommets du système réticulaire suivant le plan tangent à la surface.

Appliquons une force unique  $F$  en un sommet quelconque du système réticulaire. Cette force peut se décomposer suivant deux des barres passant en ce point et correspondant à deux lignes asymptotiques différentes. On transporte ainsi la force  $F$  à deux autres noeuds de la surface où on opère de même, et ainsi de suite. Si l'on suppose le contour de la surface divisé en trois catégories d'arcs  $\Gamma_1$ ,  $\Gamma_2$  et  $\Gamma'$  dans les conditions indiquées précédemment, et si l'on choisit convenablement les deux barres initiales suivant lesquelles on décompose la force donnée  $F$ , la transmission de la force  $F$  se fera par le processus indiqué sans qu'on rencontre jamais un bord libre. Si l'on rencontre un bord de  $\Gamma_2$  supposé aménagé en appui simple, on pourra encore faire la décomposition entre la seconde barre aboutissant au sommet considéré sur  $\Gamma_2$  et la direction de la réaction de l'appui simple. L'opération qu'on effectue ainsi est ce qu'on appelle une réflexion sur l'appui simple. En la continuant ainsi, on transmettra finalement la force  $F$  à toute une zone d'appuis doubles. On aura ainsi obtenu un équilibre du système compatible avec les réactions d'appuis, et cet équilibre sera stable. En opérant de la même manière pour chaque noeud chargé du système réticulaire, on aura déterminé l'état d'équilibre relatif au système complémentaire de charges en ne faisant intervenir que des décompositions de forces suivant la règle du parallélogramme. L'épure correspondante peut se faire facilement en projection sur un plan arbitraire.

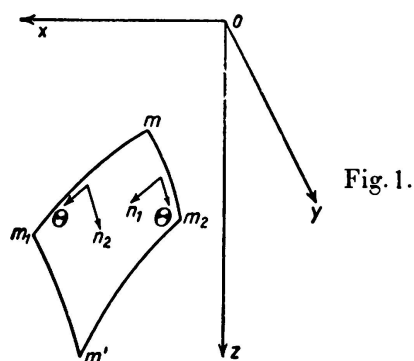
La détermination géométrique des efforts dont nous venons de parler permet d'envisager l'équilibre d'un voile du troisième groupe comme résultant d'une propagation d'efforts s'effectuant suivant les arcs d'asymptotiques en partant des bords libres pour aboutir aux appuis doubles en se réfléchissant sur les appuis simples. Cette propriété est analogue à la propagation par ondes des phénomènes régis par des équations linéaires aux dérivées partielles du second ordre à caractéristiques réelles et comme elle, est due essentiellement à la nature réelle des caractéristiques des équations régissant l'équilibre des contraintes dans le voile considéré.

#### 10° — Exemples simples de voiles du troisième groupe.

L'exemple le plus simple de voile du troisième groupe est fourni par le parabolôïde hyperbolique. Ce voile est caractérisé par la propriété que le cisaillement suivant les génératrices rectilignes est, à un facteur près, constant sur toute la surface, égal à la composante suivant l'axe du parabolôïde de la charge appliquée rapportée à l'unité de surface en projection sur un plan quelconque non parallèle à l'axe. D'autre part, les efforts dus au système complémentaire de charges se propagent suivant chaque génératrice sans qu'il se produise d'interférences entre les génératrices, de telle sorte qu'un effort tangentiel appliqué à un petit élément du voile ne fait sentir son effet que sur les bandes engendrées par les génératrices rencontrées. Après le parabolôïde hyperbolique, le voile du troisième groupe le

plus simple est l'hyperboloïde à une nappe. Ce voile possède en commun avec le parabolôïde la propriété que les efforts dus au système complémentaire se propagent suivant chaque génératrice sans interférence avec les autres génératrices. Il ne diffère du parabolôïde hyperbolique que par l'expression plus compliquée du coefficient de proportionnalité entre le cisaillement et la densité de la charge appliquée.

Viennent ensuite les surfaces réglées non développables et en premier lieu les conoïdes. Pour ces surfaces, le coefficient de proportionnalité entre le



cisaillement sur les asymptotiques et la densité de la charge appliquée, a une expression beaucoup plus compliquée que pour les premières surfaces envisagées, mais ce qui les distingue surtout de ces surfaces, c'est que les efforts dus au système complémentaire se propagent en s'épanouissant sur la surface, les asymptotiques non rectilignes s'arc-boutant sur les génératrices rectilignes de la surface, de telle sorte qu'une force tangentielle appliquée à un petit élément intéresse toute une zone en éventail de la surface, comme dans les surfaces les plus générales du troisième groupe.

Les figures 2 et 3 montrent la différence entre les quadriques réglées et les autres surfaces du troisième groupe au dernier point de vue qui vient d'être signalé.

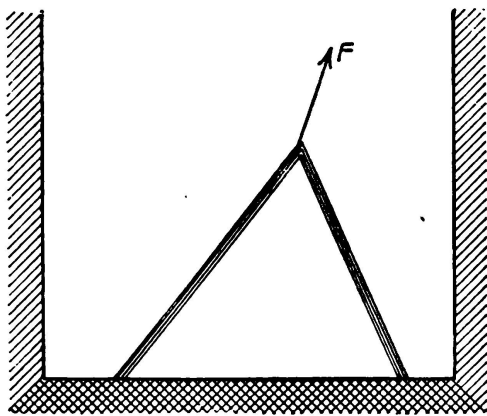


Fig. 2.

Mode de propagation des efforts tangentiels dans une quadrique réglée.

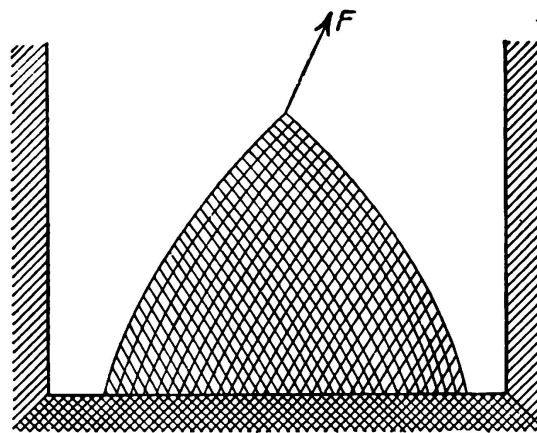


Fig. 3.

Mode de propagation des efforts tangentiels dans une surface quelconque du 3<sup>e</sup> groupe.



11° — *Conclusion.*

Si l'on excepte les voiles réglés développables comme les cylindres et les cônes qui forment une classe très particulière de voiles, l'ensemble des voiles à double courbure se divise en deux grandes familles suivant le signe de la courbure totale. Dans les deux familles de voiles, ce sont les lignes asymptotiques qui jouent le rôle essentiel dans la transmission des efforts tangentiels, et par suite dans la détermination de la nature des réactions d'appuis correspondant à des équilibres bien déterminés et stables. Lorsque les asymptotiques sont imaginaires, le voile ne peut admettre de bords libres, mais peut être limité à des bords aménagés tous en appuis simples. L'exemple courant d'appuis de cette sorte est constitué par un tympan plan à grande raideur dans son plan et sans raideur appréciable perpendiculairement à ce plan. Lorsque les asymptotiques sont réelles, on doit décomposer les bords du voile en bords libres, en bords avec appuis simples, et en bords avec appuis doubles suivant les règles déterminées que nous avons indiquées. Comme les appuis doubles peuvent constituer une difficulté au point de vue constructif, il y a avantage à chercher à en diminuer l'importance le plus possible, ce qui peut se faire de différentes manières en choisissant convenablement le tracé de la surface.

Si l'on se place strictement au point de vue de la facilité de calcul, les considérations qui précèdent laissent entrevoir que, parmi les voiles à double courbure, ceux donnant lieu à des calculs vraiment élémentaires sont les quadriques réglées.

### Résumé.

Dans la construction des voiles minces en béton armé il s'agit d'abord de problèmes statiquement déterminés, indépendants de la théorie de la plasticité. La totalité de ces questions est traitée en liaison avec d'autres problèmes qui se présentent lors de l'exécution des voiles minces et avant tout en liaison avec les problèmes de la compatibilité des déformations conditionnées par l'état de tension calculé d'une manière isostatique.

L'auteur utilise l'hypothèse d'une répartition uniforme des tensions sur toute l'épaisseur de la section de telle façon que l'on peut admettre le voile concentré en sa surface moyenne.



Leere Seite  
Blank page  
Page vide