

**Zeitschrift:** IABSE congress report = Rapport du congrès AIPC = IVBH  
Kongressbericht

**Band:** 2 (1936)

**Artikel:** Flexion et effort tranchant en dehors de la zone de déformation  
purement élastique

**Autor:** Eichinger, A.

**DOI:** <https://doi.org/10.5169/seals-3002>

### **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. [Siehe Rechtliche Hinweise.](#)

### **Conditions d'utilisation**

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. [Voir Informations légales.](#)

### **Terms of use**

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. [See Legal notice.](#)

**Download PDF:** 08.02.2025

**ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>**

## I 2

Flexion et effort tranchant en dehors de la zone  
de déformation purement élastique.

Biegung mit Querkraft, außerhalb des Gebietes  
der rein elastischen Formänderung.

Combined Bending and Shear Beyond the Range of Purely  
Elastic Deformation.

A. Eichinger,

Dipl.-Ingenieur, Wissenschaftlicher Mitarbeiter der E.M.P.A. Zürich.

### Introduction.

La déformation totale se compose ainsi qu'on le sait de deux fractions<sup>1</sup>:

a) La déformation élastique dont les composantes satisfont aux équations d'élasticité

$$e_1 = \frac{1}{E} \cdot \left[ \sigma_1 - \frac{1}{m} (\sigma_2 + \sigma_3) \right]; \quad e_2 = \text{etc.} \quad \text{et}$$

b) la déformation plastique dont les composantes suivent les équations de plasticité

$$\delta_1 = \frac{1}{D} \cdot \left[ \sigma_1 - \frac{1}{2} (\sigma_2 + \sigma_3) \right]; \quad \delta_2 = \text{etc.}$$

E est le module d'élasticité et D le module de plasticité. Le module d'allongement transversal m est égal à 2 pour une déformation plastique.

Jusqu'à maintenant on a exécuté en général les calculs statiques en admettant que les systèmes portants se comportent d'une manière purement élastique. Au cours de ces derniers temps on s'efforce de considérer aussi l'influence engendrée par la déformation plastique

- 1° sur la répartition des contraintes dans la poutre, respectivement dans la section des barres et
- 2° sur l'allure des forces dans le système portant (grandeurs hyperstatiques M, Q et N).

---

<sup>1</sup> M. Roš et A. Eichinger: Versuche zur Klärung der Frage der Bruchgefahr. Rapports du Laboratoire fédéral d'essai des matériaux, Zurich. No. 14, sept. 1926; No. 34, févr. 1929; No. 87, avril 1934.

## Principes de la théorie de la plasticité.

Rappelons<sup>2)</sup> que, dans le cas de l'action simultanée d'une contrainte normale et d'une contrainte de cisaillement, les équations suivantes sont valables (fig. 1):

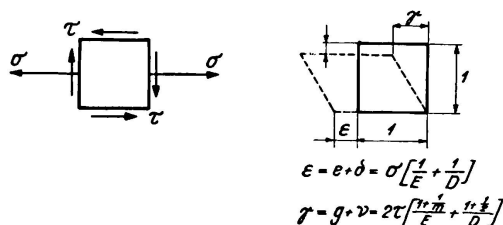


Fig. 1.

Etat de contrainte et de déformation d'un élément de corps.

## Déformation élastique

$$e_g = \sqrt{e^2 \cdot \left(1 + \frac{1}{m}\right)^2 + \frac{3}{4} \cdot g^2} = \frac{\sigma_g}{E} \cdot \left(1 + \frac{1}{m}\right);$$

par contre:

la déformation plastique

$$\delta_g = \sqrt{\delta^2 \cdot \left(1 + \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4} \nu^2} = \frac{\sigma_g}{D} \cdot \left(1 + \frac{1}{2}\right)$$

où  $\sigma_g = \sqrt{\sigma^2 + 3 \cdot \tau^2}$  = contrainte de comparaison.

L'allongement lui-même:

$$\text{élastique } e = \frac{\sigma}{E}$$

$$\text{plastique } \delta = \frac{\sigma}{D}$$

et le déplacement spécifique

$$\text{élastique } g = \frac{\tau}{E} \cdot 2 \cdot \left(1 + \frac{1}{m}\right)$$

$$\text{plastique } \nu = \frac{\tau}{D} \cdot 2 \cdot \left(1 + \frac{1}{2}\right).$$

La déformation totale est égale à la somme des déformations élastiques et plastiques, à savoir:

$$\begin{array}{ll} \text{déformation} & \dots \dots \dots \epsilon_g = e_g + \delta_g \\ \text{allongement} & \dots \dots \dots \epsilon = e + \delta \quad \text{et} \\ \text{glissement} & \dots \dots \dots \gamma = g + \nu \end{array}$$

Si maintenant le diagramme des contraintes-allongements d'un matériau est connu pour la traction et la compression ordinaires, il est possible de déterminer les relations fondamentales entre la contrainte de comparaison et la déformation

<sup>2)</sup> Contribution à la discussion de M. Roš et A. Eichinger: Knicken von in beiden Achsen zentrisch gedrückten, rechteckigen Platten im Gebiet oberhalb der E-Grenze.

1<sup>er</sup> Congrès de l'Association internationale des ponts et charpentes, Rapport final.

résultant de cette seule contrainte (la variation de volume est toujours élastique) à l'aide des formules indiquées ci-dessous (fig. 2).

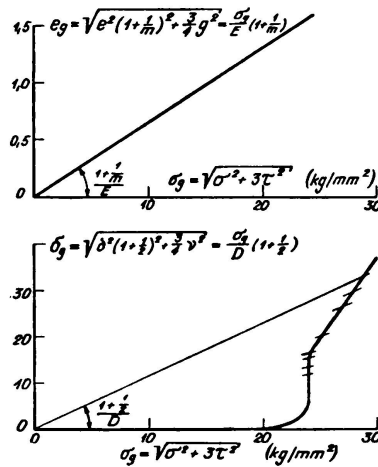


Fig. 2. Déformation élastique et plastique en fonction de la contrainte de comparaison.

Répartition des contraintes dans une section de poutre.

Avant d'entreprendre la détermination de l'influence de l'allure des forces il est nécessaire d'étudier l'influence de la déformation plastique sur la répartition des contraintes dans la section.

Avec l'hypothèse de la planéité de la section ou plus exactement de l'allure linéaire des déformations, on obtient l'allongement d'une fibre à la distance y de l'axe neutre avec la formule:

$$\epsilon = \epsilon_r \cdot \frac{y}{h/2}$$

où  $\epsilon_r$  représente l'allongement dans la fibre extrême (fig. 3). Comme dans la fibre extrême la contrainte de cisaillement, et par le fait même le glissement,

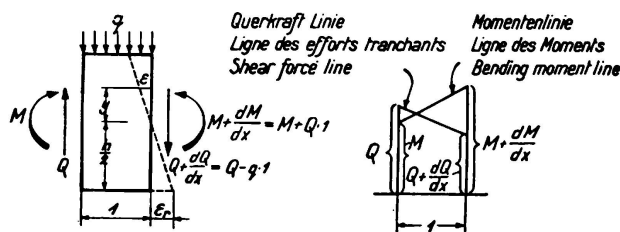


Fig. 3. Élément de poutre de longueur 1 sous l'effet de M, Q et q.

doivent être nuls, on peut déterminer la contrainte dans la fibre extrême  $\sigma_r$  en partant de la fig. 2.

En général, la répartition des contraintes normales dans la section est admise semblable à la branche du diagramme des  $\sigma$ - $\epsilon$  de  $\sigma = 0$  à  $\sigma = \sigma_r$  ce qui n'est valable que dans le cas où l'on a partout  $\tau = 0$ . Si par contre  $\tau$  est différent de 0, la répartition des contraintes normales dans la section peut fortement s'écarter de cette hypothèse, parce que l'allongement total  $\epsilon$  est influencé par une contrainte normale  $\sigma$ , d'autant plus faible que la contrainte de cisaillement  $\tau$  agissant sur le même élément est plus grande.

Au lieu de calculer la répartition des  $\sigma$  et des  $\tau$  pour un moment fléchissant et

un effort tranchant donné, nous nous contentons provisoirement d'une hypothèse sur la répartition des  $\sigma$  (fig. 4). De cette façon  $\tau$  est aussi déterminé en chaque point de la section. Du fait que

$$\varepsilon = \varepsilon_r \cdot \frac{y}{h/2} = \sigma \cdot \left[ \frac{1}{E} + \frac{1}{D} \right]$$

il résulte que

$$\frac{1}{D} = \frac{\varepsilon}{\sigma} - \frac{1}{E},$$

d'où le module de plasticité  $D$  est déterminé pour chaque  $y$ . Si l'on trace une droite, partant de l'origine du système de coordonnées et inclinée de  $\frac{1 + 1/2}{D}$  jusqu'à la courbe des  $\sigma_g - \delta_g$  de la fig. 2, on obtient aussi la contrainte de comparaison  $\sigma_g$  d'où l'on peut tirer la contrainte de cisaillement

$$\tau = \sqrt{\frac{\sigma_g^2 - \sigma^2}{3}}.$$

Dans les parties de sections à largeur constante

$$\frac{\partial \tau}{\partial y} = \frac{\partial \sigma}{\partial x}$$

donc l'allure des contraintes dans une section voisine serait ainsi déterminée, à savoir  $\sigma'$  et  $\tau'$  (fig. 4). Il en résulte que la répartition des contraintes normales

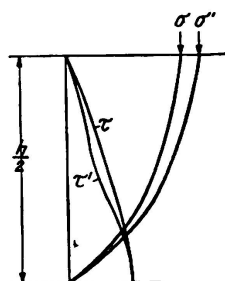


Fig. 4.

Répartition des contraintes sur la moitié supérieure de la section.

$\sigma$  dans une section ne dépend pas seulement du moment  $M$  dans cette section, comme c'est le cas dans la zone élastique, mais elle est aussi influencée par l'effort tranchant  $Q$  ainsi que par la charge répartie  $q = \frac{dQ}{dx}$ .

Strictement parlant, ces explications ne sont cependant valables que dans le cas d'une sollicitation unique au-dessus de la limite du comportement purement élastique. Elles n'ont par conséquent qu'une valeur limitée pour la pratique.

Tandis que le dépassement unique de la limite d'écoulement est accompagné d'une grande déformation plastique, le même matériau se rompt en service pour une charge alternée répétée — et par suite de la fatigue — souvent sans accuser aucune déformation permanente importante.

Remarquons aussi que, malgré une limite supérieure de charge et une limite de contrainte modifiées des éléments de construction les plus sollicités (par suite de la déformation plastique), l'amplitude de la variation de charge:  $(B-A)$ ,

où B est la limite supérieure et A la limite inférieure de charge, reste invariable même en cet endroit. Mais comme, dans la plupart des types de construction, la résistance à la fatigue dépend fortement de l'amplitude de la variation de contrainte mais par contre très peu de la contrainte fondamentale  $\frac{A + B}{2}$ , le gain est toutefois plus faible que le laisse prévoir la réduction de la limite supérieure de contrainte (fig. 5).

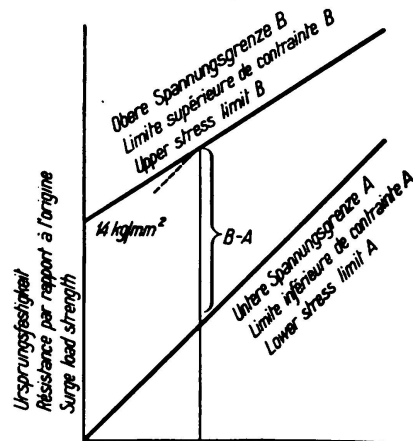


Fig. 5. Essais d'endurance à la traction sur des soudures bout à bout (LFEM Zurich).

Pour ces raisons, la déformation plastique devrait être considérée provisoirement, partout où la fatigue entre en ligne de compte (le flambage est une exception), comme une réserve pour le cas d'une surcharge exceptionnelle imprévisible (avarie). Par contre, le calcul du degré de sécurité vis-à-vis de la fatigue devrait se faire d'après les principes de la loi d'élasticité (comme jusqu'à maintenant). Il ne faudrait faire exception que lorsque les essais prolongés et les essais de fatigue (et non pas des essais rapides) l'autorisent.

$\frac{y}{h/2}$	$\sigma$	$\epsilon$	$\frac{\epsilon}{\sigma}$	$\frac{1}{D} \cdot 10^8$	$\sigma_g$	$\tau$	$\frac{\partial \tau}{\partial y}$	$\sigma'$	$\epsilon'$	$\frac{\epsilon'}{\sigma'}$	$\frac{1}{D} \cdot 10^8$	$\sigma'_g$	$\tau'$
	kg/mm <sup>2</sup>	‰	·10 <sup>3</sup>	mm <sup>2</sup> /kg	kg/mm <sup>2</sup>	kg/mm <sup>2</sup>	kg/mm <sup>3</sup>	kg/mm <sup>2</sup>	‰	·10 <sup>3</sup>	mm <sup>2</sup> /kg	kg/mm <sup>2</sup>	kg/mm <sup>2</sup>
1,0	25,0	14,58	0,584	0,534	25,0	0	0,40	29,0	23,5	0,810	0,760	29,0	0
0,8	23,2	11,66	0,503	0,453	24,2	4,0	0,35	26,7	18,8	0,705	0,655	27,1	2,7
0,6	20,8	8,75	0,421	0,371	24,0	6,9	0,29	23,7	14,1	0,595	0,545	25,1	4,8
0,4	17,0	5,84	0,343	0,293	24,0	9,8	0,28	19,8	9,4	0,475	0,425	24,1	7,9
0,2	10,5	2,92	0,278	0,228	24,0	12,5	0,20	12,5	4,7	0,376	0,326	24,0	11,8
0	0	0	—	—	—	13,8	0	0	0	—	—	—	13,8

Remarque: Section de  $\sigma' - \tau'$  distante de  $\frac{h}{10}$  de la section de  $\sigma - \tau$ . Voir Fig. 4.