Etude du flambage d'ensemble de l'arc parabolique comprimé d'une poutre Vierendeel

Autor(en): **Desprets, R.**

Objekttyp: **Article**

Zeitschrift: **IABSE congress report = Rapport du congrès AIPC = IVBH Kongressbericht**

Band (Jahr): **2 (1936)**

PDF erstellt am: **21.07.2024**

Persistenter Link: https://doi.org/10.5169/seals-3093

V 17

Etude du flambage d'ensemble de l'arc parabolique comprimé d'une poutre Vierendeel.

Untersuchung über das Ausknicken des parabelförmigen Druckgurtes eines Vierendeel-Trägers.

Investigation of the Buckling of a Parabolic Arch in a Vierendeel Girder under Compression.

R. Desprets,
Professeur à l'Université de Bruxelles.

L'arc parabolique d'une poutre Vierendeel comme l'arc d'une poutre en bowstring se trouve au point de vue du flambage d'ensemble dans des conditions de sollicitation difficiles à définir avec précision; il est à la fois encastré dans ses culasses d'extrémité solidaires de la membrure inférieure (tirant) et du tablier et fixé d'une manière rigide à des montants très raides reliés au tablier en portiques renversés.

On peut cependant estimer qu'au moins dans sa partie centrale où la hauteur des montants varie peu, l'arc soit assimilable à une membrure droite simple butée sur les montants de hauteur constante. On obtiendra donc une limite de sollicitation en traitant l'arc dans cette zone comme une membrure droite ordinaire et en calculant la charge et la longueur de flambage suivant les méthodes connues d'*Engesser*, *Timoshenko*, *Pigeaud*, etc.

Toutefois, dans le but de serrer le problème de plus près on a essayé, en appliquant la méthode de *Timoshenko* de tenir compte des encastrements d'extrémité en adoptant une forme de fibre déformée adéquate mais assez simple pour ne pas compliquer inutilement les calculs. De plus, comme le phénomène de flambage aura tendance à se produire dans la zone centrale des montants les plus hauts, on a admis dans le même but de simplification que la hauteur des montants soit constante.

Les résultats numériques montrent que les longueurs d'onde calculées justifient sensiblement ces hypothèses. Dans l'étude du flambage ordinaire d'une pièce droite entre articulations on assimile la fibre déformée à une sinusoïde simple; pour tenir compte des conditions d'encastrements aux extrémités on a choisi pour la fibre déformée une équation de la forme

$$y = f\left(\sin \pi \frac{x}{L} - K \sin 3\pi \frac{x}{L}\right)$$

L'arc supposé rectifié dans le plan médian de la poutre est choisi comme axe des x, l'origine est à une des extrémités, l'axe des y (déformations) étant normal au plan de la poutre.

On admet également que la poussée soit constante dans l'arc entre les deux appuis.

Le principe de la méthode approchée de *Timoshenko* est d'établir l'équivalence entre le travail extérieur de la poussée et les travaux de butée des montants et des contraintes intérieures.

Travail de la poussée.

Le déplacement de la poussée est égal à la différence de longueur entre l'arc déformé et sa projection

$$\text{soit } \Delta x = \int_0^L (ds - dx), \quad ds = \left(1 + y'^2\right)^{\frac{1}{2}} dx \quad \text{ou approximativement}$$

$$ds = \left(1 + \frac{1}{2} y'^2\right) dx$$

$$ds - dx = \frac{1}{2} y'^2 \, dx$$

$$\int_0^L (ds - dx) = \Delta x = \frac{1}{2} \int_0^L y'^2 \, dx$$

$$T_Q = Q \cdot \Delta x.$$

Travail résistant des butées des montants.

Nous admettrons que cette butée soit continue le long de l'arc *(Engesser).* Il est à remarquer que dans la poutre Vierendeel, cette approximation est beaucoup mieux justifiée que dans une poutre en treillis. L'épanouissement des montants à la tête et au pied réalise en grande partie cette continuité et rend cette hypothèse plus probable que celle de réactions isolées. La butée du montant est déterminée par deux termes dépendant de l'inflexibilité propre du montant et de celle de la pièce de pont dont il est solidaire.

Si l'on ne tient pas compte du renforcement introduit par le gousset d'assemblage, h étant la hauteur du montant, p la portée de la pièce de pont, I_h et I_p les moments d'inertie de ces éléments ($\varepsilon = EI$) la flèche Σf de la tête du montant sous un effort d'une tonne sera:

$$\Sigma f = \frac{h^2 \cdot p}{2\,\varepsilon_p} + \frac{h^3}{3\,\varepsilon_h}.$$

D'autre part la réaction unitaire continûment répartie est Cy, y étant la déformation en un point; λ étant la largeur du panneau on en déduit

$$\lambda C \Sigma f = 1, \quad \text{d'où } C = \frac{1}{\lambda \Sigma f}.$$

Le travail des butées latérales sera

$$\int_0^y \int_0^L C\, y\, dy\, dx = \frac{C}{2} \int_0^L y^2 \, dx.$$

Travail des contraintes intérieures.

En ne considérant que le travail élastique de flexion suivant une expression connue

$$T_i = \frac{1}{2}\int_0^L \frac{M^2}{\varepsilon}\,dx$$

ou, en exprimant M en y''

$$T_i = \frac{1}{2}\int_0^L \varepsilon y''^2 dx = \frac{\varepsilon}{2}\int_0^L y''^2 dx,$$

I étant supposé constant.

Equation générale.

Comme il a été indiqué ci-dessus, on a adopté pour la fibre moyenne déformée l'équation suivante:

$$y = f\left(\sin \pi \frac{x}{L} - K \sin 3\pi \frac{x}{L}\right)$$

$y = 0$ aux deux extrémités et $y = f\,(1 + K)$ au milieu

$$y' = f\frac{\pi}{L}\left(\cos \pi \frac{x}{L} - 3\,K \cos 3\pi \frac{x}{L}\right)$$

$$\int_0^L y'^2\,dx = f^2\frac{\pi^2}{L^2}\cdot\frac{L}{2}(1 + 9\,K^2)$$

$$\int_0^L y^2\,dx = f^2\frac{L}{2}(1 + K^2)$$

$$y'' = -f\frac{\pi^2}{L^2}\left(\sin \pi \frac{x}{L} - 9\,K \sin 3\pi \frac{x}{L}\right)$$

$$\int_0^L y''^2\,dx = f^2\frac{\pi^4}{L^4}\cdot\frac{L}{2}(1 + 81\,K^2).$$

La relation fondamentale peut s'écrire:

$$P\cdot\frac{1}{4}\frac{f^2\pi^2}{L}(1 + 9\,K^2) = \frac{C f^2 L}{4}(1 + K^2) + \frac{1}{4}f^2\frac{\pi^4}{L^3}\varepsilon(1 + 81\,K^2)$$

Finalement:

$$P = \frac{\varepsilon\pi^2}{L^2}\,\frac{1 + 81\,K^2}{1 + 9\,K^2} + C\frac{L^2}{\pi^2}\,\frac{1 + K^2}{1 + 9\,K^2}.$$

Dans le cas du flambage simple, cette relation prend la forme:

$$P = \frac{\varepsilon\pi^2}{L^2} + C\frac{L^2}{\pi^2}.$$

comprenant un 1[er] terme général de la formule d'*Euler* et un terme complémentaire provenant de la butée des montants. En déterminant le minimum de P suivant la règle connue $\frac{dP}{dL} = 0$, on obtient les résultats suivants:

L, étant la longueur de flambage,

$$C \cdot \frac{L_1^2}{\pi^2} = \frac{\varepsilon \pi^2}{L_1^2}$$

La charge de flambage

$$P_1 = 2\frac{\varepsilon\pi^2}{L_1^2} = 2\frac{C \cdot L_1^2}{\pi^2}; \quad P_1 = 2\sqrt{C \cdot \varepsilon}; \quad L_1 = \pi\sqrt[4]{\frac{\varepsilon}{C}}, \text{ ou } \varepsilon = E \cdot I.$$

Pour déterminer les conditions du minimum de P suivant la nouvelle hypothèse on écrira:

$$P = \frac{\varepsilon\pi^2}{L^2} \cdot A + \frac{CL^2}{\pi^2} \cdot B.$$

La condition $\frac{dP}{dL} = 0$ s'exprime par

$$B \cdot \frac{CL_2^2}{\pi^2} = A \cdot \frac{\varepsilon\pi^2}{L_2^2}$$

$$L_2^4 = \pi^4 \cdot \frac{A}{B} \cdot \frac{\varepsilon}{C}$$

$$L_2 = \pi \cdot \sqrt[4]{\frac{A}{B}} \cdot \sqrt[4]{\frac{\varepsilon}{C}}$$

$$P_2 = \frac{\varepsilon\pi^2}{L_2^2}\left(1 + \frac{A}{B}\right)$$

$$A = \frac{1 + 81\,K^2}{1 + 9\,K^2}$$

$$B = \frac{1 + K^2}{1 + 9\,K^2}$$

$$\frac{A}{B} = \frac{1 + 81\,K^2}{1 + K^2}.$$

En rapprochant ces résultats des précédents on remarque que:

$$L_2 = L_1 \sqrt[4]{\frac{A}{B}}$$

$$P_2 = \frac{\varepsilon\pi^2}{L_1^2}\sqrt{\frac{B}{A}}\left(1 + \frac{A}{B}\right) = P_1 \cdot \frac{1}{2}\sqrt{\frac{B}{A}}\left(1 + \frac{A}{B}\right)$$

Pour évaluer ces expressions il faut choisir la valeur de K. Si on s'impose strictement la condition $y' = 0$ aux extrémités

$$f\frac{\pi}{L}(1 - 3\,K) = 0; \qquad K = \frac{1}{3}.$$

Cette valeur de K donnerait la valeur 5 au coefficient A du terme $\frac{\varepsilon\pi^2}{L^2}$ de P; il semble que dans les circonstances les plus favorables la valeur maximum de A ne puisse dépasser 4 correspondant à un encastrement parfait.

Cela reviendrait à admettre une valeur de $K^2 = \frac{1}{15}$ soit $K = \frac{1}{4}$ environ. En appliquant ces valeurs de K on trouve les résultats suivants:

1. $K^2 = \frac{1}{9}, \quad \frac{A}{B} = 9, \quad \sqrt[2]{\frac{B}{A}} = \frac{1}{3}$

$$P_2 = \frac{\varepsilon\pi^2}{L_1^2} \cdot \sqrt[2]{\frac{B}{A}} \left(1 + \frac{A}{B}\right) = \frac{\varepsilon\pi^2}{L_1^2} \cdot \frac{10}{3}$$

$$L_2 = L_1 \cdot \sqrt[4]{\frac{A}{B}} = L_1 \sqrt[2]{3} = L_1 \cdot 1{,}73$$

2. $K^2 = \frac{1}{15}, \quad \frac{A}{B} = 6, \quad \sqrt[2]{\frac{B}{A}} = \sqrt{\frac{1}{6}} = \frac{1}{2{,}45}$

$$P_2 = \frac{\varepsilon\pi^2}{L_1^2} \cdot \frac{7}{2{,}45} = 2{,}85 \cdot \frac{\varepsilon\pi^2}{L_1^2}$$

$$L_2 = L_1 \cdot \sqrt{2{,}45} = L_1 \cdot 1{,}565$$

3. Si $K^2 = 0, \quad L_1 = L_2, \quad P_2 = 2 \cdot \varepsilon \frac{\pi^2}{L_1^2}.$

Application numérique.

Une application numérique de ces résultats a été faite pour le cas d'une poutre Vierendeel parabolique d'un pont de chemin de fer à voie unique de 100,10 m de portée et de 14,30 m de flèche ($^1/_7$) à 11 panneaux de 9,10 m de largeur.

L_1 = environ 34 m

$P_1 \approx 2 \cdot 1500$ t $\approx$ *3000 t.*

Dans l'hypothèse d'encastrements, en supposant $K^2 = \frac{1}{15}$,

$$L_2 = L_1 \cdot 1{,}565 = 53 \text{ m} = L_2$$

$$P_2 = \frac{\varepsilon\pi^2}{L_1^2} \cdot 2{,}85 = 4250 \text{ t}$$

Si $K^2 = \frac{1}{9}, \quad L_2 = L_1 \cdot 1{,}73 = 58{,}5 \text{ m} = L_2$

$$P_2 = \frac{\varepsilon\pi^2}{L_1^2} \cdot \frac{10}{3} = 1500 \cdot \frac{10}{3} = 5000 \text{ t.}$$

Dans l'arc en question, la poussée axiale sous surcharge complète atteint 1035 t à la clef et 1230 t aux naissances compte tenu de la majoration dynamique des surcharges.

Ces évaluations montrent que dans le cas le plus défavorable limite d'une poutre non encastrée de hauteur constante, la charge critique au flambage d'ensemble assure encore un coefficient de sécurité de près de 3. En adoptant l'hypothèse plus réelle que les extrémités soient largement encastrées dans les culasses et maintenues fermement par les berceaux extrêmes des montants et pièces de pont avec $K^2 = \frac{1}{15}$, le coefficient de sécurité s'élèverait au moins à 4.

On constate que l'arc est à peu près d'égale résistance suivant ses modes de liaison critiques soit entre montants, soit sur la longueur totale entre appuis de naissances.

On peut également conclure de ces résultats que la rigidité des montants apporte à la poutre un surcroît de résistance latérale considérable. Ce supplément est d'autant plus important que les montants sont plus rigides et que leur liaison à l'arc est plus continue. Ces conditions sont remplies le mieux possible dans le type de poutre Vierendeel en question.