

Zeitschrift: IABSE congress report = Rapport du congrès AIPC = IVBH
Kongressbericht

Band: 2 (1936)

Artikel: Theorie statisch unbestimmter Systeme

Autor: Melan, E.

DOI: <https://doi.org/10.5169/seals-2674>

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. [Mehr erfahren](#)

Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. [En savoir plus](#)

Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. [Find out more](#)

Download PDF: 12.07.2025

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>

Theorie statisch unbestimmter Systeme.

Théorie des systèmes hyperstatiques.

Theorie of Statically Indeterminate Systems.

Dr. Ing. E. Melan,

Professor an der Technischen Hochschule, Wien.

A) Idealplastischer Baustoff.

A) Matériau idéalement plastique.

A) Ideal Plastic Material.

I.

Die Baustatik befaßt sich mit der Aufgabe, die inneren Kräfte und die Formänderungen von Systemen zu bestimmen, welche aus dünnen Stäben bestehen. Zur Lösung dieser Aufgabe stehen drei Gruppen von Gleichungen zur Verfügung, von denen die erste das Gleichgewicht beschreibt, während die zweite die Bedingungen für den geometrischen Zusammenhang und die dritte Gruppe die Beziehung zwischen inneren Kräften und Formänderungen ausdrückt. Dabei genügt bekanntlich bei statisch bestimmten Systemen die erste Gruppe allein für die Bestimmung der inneren Kräfte; die beiden anderen Gruppen sind hier nur für die Ermittlung der Formänderungen notwendig. Hingegen ist es bei statisch unbestimmten Tragwerken nicht möglich, aus der ersten Gleichungsgruppe allein schon die inneren Kräfte zu bestimmen. Es ist vielmehr notwendig, die beiden anderen Gleichungsgruppen mit heranzuziehen und es muß insbesondere der Zusammenhang zwischen Formänderung und Spannung bekannt sein. Die übliche Theorie setzt hierbei die unbegrenzte Gültigkeit des Hooke'schen Gesetzes voraus und nimmt also an, daß die Längenänderungen eines Stabes proportional der Achsialkraft, die Krümmungsänderung oder der Kontingenzwinkel eines gebogenen Stabes proportional dem Biegemoment an der betreffenden Stelle ist.

Es ist an anderer Stelle¹ erwähnt worden, daß die Gültigkeit des Hooke'schen Gesetzes, wie die Erfahrung lehrt, begrenzt ist, die lineare Zuordnung zwischen Kraft und Formänderung demnach nur innerhalb gewisser Grenzen gilt. Dabei sind diese Grenzwerte aber nicht etwa unveränderlich; sie hängen vielmehr nicht nur von den in dem betreffenden Augenblick bereits vorhandenen Längenänderungen ab, sondern sind auch eine Funktion der Geschwindigkeit, mit welcher

¹ Siehe das Referat I 1.

sich die Belastung ändert. Überdies ist es ganz wesentlich, ob außerhalb des Hooke'schen Bereiches eine Zunahme oder Abnahme der Spannung vorliegt, so daß also die analytische Erfassung der tatsächlichen Verhältnisse nicht ganz einfach ist.

Will man demnach mit den tatsächlichen Verhältnissen übereinstimmende Ergebnisse erhalten, so muß man das Hooke'sche Gesetz außerhalb seines Geltungsbereiches durch eine andere, den Versuchsergebnissen besser entsprechende Annahme ersetzen. Bei statisch bestimmten Systemen wird sich dies nach den eingangs gemachten Bemerkungen nur auf die Berechnung der Formänderungen des Systemes auswirken; bei statisch unbestimmten Systemen führt der Ersatz des Hooke'schen Gesetzes durch eine andere Beziehung auch zu anderen inneren Kräften. Um hiebei aber zu praktisch verwertbaren Ergebnissen zu kommen, ist es notwendig diesen Zusammenhang gegenüber den wirklichen Verhältnissen mehr oder minder zu idealisieren. Vor allem pflegt man stets anzunehmen, daß die Geschwindigkeit, mit der sich die Belastung ändert, ohne Einfluß ist oder mit anderen Worten, daß sich die inneren Kräfte hinreichend langsam ändern, wie dies ja in der Statik überhaupt, wenn elasto-kinetische Überlegungen aus-

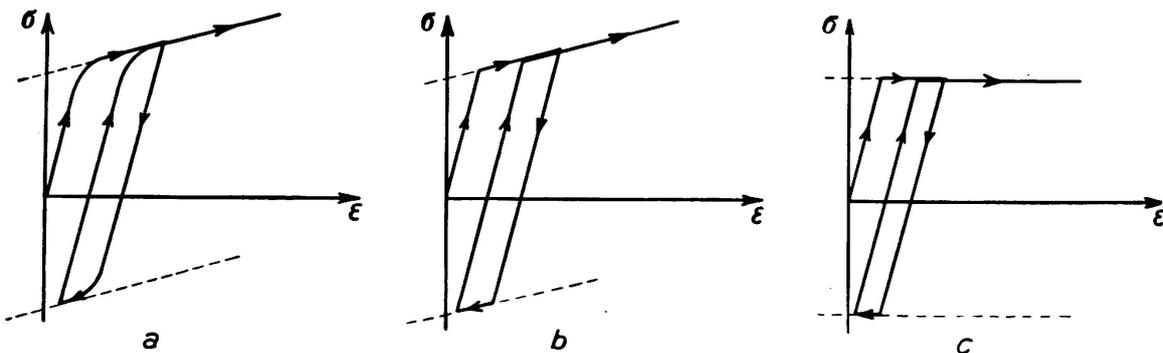


Fig. 1.

geschaltet werden sollen, erforderlich ist. Man kann dann etwa das in Abb. 1a dargestellte Schaubild der Theorie zu Grunde legen; begnügt man sich mit einer minder genauen Wiedergabe, so könnte der in Abb. 1b verzeichnete Verlauf des Spannungsdehnungsdiagrammes eingeführt werden. Darüber hinaus pflegt man aber in der technischen Theorie eine noch weiter gehende Idealisierung vorzunehmen, wie dies an Abb. 1c für den „ideal-plastischen“ Baustoff dargestellt ist. Diese letztere Annahme ist den meisten im Folgenden erwähnten Untersuchungen zu Grunde gelegt und wird in dem zweiten Teil des vorliegenden Referates entsprechend formuliert werden. Es möge darauf hingewiesen werden, daß sie sich mit der von Haar-Karman, v. Mises und Hencky² für den dreidimensionalen Spannungszustand gemachten Annahme deckt, wenn die entsprechenden Spezialisierungen in diesen Untersuchungen für den einachsigen Spannungszustand gemacht werden.

² A. Haar und Th. v. Karman, „Zur Theorie der Spannungszustände in plastischen und sandartigen Medien“. Nachr. der kgl. Ges. der Wiss., Göttingen 1909.

v. Mises, „Mechanik der festen Körper im plastisch-deformablen Zustand“, ebenda 1913.

H. Hencky, „Zur Theorie plastischer Deformationen und der hierdurch im Material hervorgerufenen Nachspannungen“. Zeitschr. für angew. Math. und Mech. 1924.

Die Ergebnisse des einachsigen Spannungsdehnung-Versuches können zunächst ohne weiteres auf Zugstäbe eines Fachwerkes übertragen werden. Bei Druckstäben wird die Grenzlast in der Regel durch die Knicklast gegeben sein. Will man daher den in Abb. 1c dargestellten Verlauf auch für negative Spannungen gelten lassen, so muß man annehmen, daß unter der Knicklast beliebige Verkürzungen der Stabachse (etwa durch die auftretende Krümmung der Stabachse) möglich sind; hiebei behält natürlich die Knicklast ihren kritischen Wert, den sie niemals übersteigen kann. Bei Entlastung tritt wieder eine lineare Zuordnung zwischen Stabkraft und Längenänderung ein.

Im übrigen erscheint die hier angedeutete Theorie des ideal-plastischen Fachwerkes von geringerer Bedeutung wie für Systeme mit biegungssteifen Stäben. Denn wie schon die allgemeinen Untersuchungen zeigen, besitzen Systeme aus einem ideal-plastischen Baustoff die bemerkenswerte Eigenschaft, daß Spannungsspitzen, die bei vollkommen elastischem Material auftreten würden, bei plastischem Material auf Kosten von Spannungserhöhungen an minder beanspruchten Stellen nach Möglichkeit abgebaut werden. Es heißt dies mit anderen Worten, daß unbedingt Materialreserven vorhanden sein müssen, die aber bei einem richtig dimensionierten Fachwerk natürlich in viel geringerem Ausmaße vorhanden sind wie bei einem über mehrere Öffnungen mit gleichem Querschnitt durchlaufenden Träger. Wenn trotzdem gerade die grundlegenden Untersuchungen an Fachwerken vorgenommen werden, so hat dies seine Ursache vor allem darin, daß hier die analytische Untersuchung im Gegensatz zu Systemen mit biegungssteifen Stäben auf Gleichungen mit einer endlichen Anzahl von Veränderlichen führt und demnach die Verhältnisse wenigstens für den mathematisch weniger geschulten Leser wesentlich übersichtlicher sind, eine Verallgemeinerung auf unendlich viele Veränderliche aber grundsätzlich möglich ist und so die am Fachwerk gewonnenen Ergebnisse auch auf das System mit biegungssteifen Stäben übertragen werden können.

Für die Untersuchung von Systemen mit biegungssteifen Stäben aus einem ideal-plastischen Material pflegt man im Allgemeinen mit hinreichender Genauigkeit dieselbe Zuordnung zwischen Moment und Krümmungsänderung oder Kontingenzwinkel anzunehmen wie dies in Abb. 1c für Spannung und Längenänderung dargestellt ist. Allerdings stehen diese beiden Annahmen nicht ganz miteinander im Einklang. Hierüber, sowie über andere damit im Zusammenhang stehende Fragen gibt eine lesenswerte Abhandlung von Eisenmann im Stahlbau 1933 Aufschluß. An dieser Stelle sei auch weiters auf eine Abhandlung von W. Prager im Bauingenieur 1933 („Über das Verhalten statisch unbestimmter Konstruktionen aus Stahl nach Überschreitung der Elastizitätsgrenze“) erwähnt, in der allerdings nur an einem bestimmten Beispiel gezeigt wird, daß in statisch unbestimmten Systemen die Verschiebungen weit mehr als wie die Momente durch die Annahme eines speziellen Elastizitätsgesetzes beeinflusst werden und die vereinfachende, vorerwähnte Annahme für den Zusammenhang zwischen innerem Moment und Krümmungsänderung als unbedenklich erachtet wird.

Im übrigen möge noch auf zwei wichtige Tatsachen hingewiesen werden, welche als Folge des Ersatzes des Hooke'schen Gesetzes durch eine nichtlineare Zuordnung gerade in manchen für den Ingenieur bestimmten Abhandlungen nicht genügend betont sind. Zunächst geht die Gültigkeit des Superpositions-

gesetzes zufolge der Nichtlinearität der Gleichungen verloren oder genauer, sie bleibt nur für die inneren Kräfte statisch bestimmter Systeme bestehen. Mit Ausnahme dieses Falles ist es daher unmöglich, Einflußlinien zu verzeichnen. Weiters ist es unmöglich, den Spannungszustand in einem unbestimmten System anzugeben, wenn nicht die vorhergegangenen Belastungen oder die „Vorgeschichte“ bekannt ist. Gerade diesem letzteren Punkte ist auch in allen Fällen, wo nur von einmaliger Belastung die Rede ist — wie etwa die Arbeiten von J. Fritsche, Schaim, Kazinczy, Girkmann³ —, welche spezielle Tragwerke aus ideal-plastischem Materiale behandeln — Beachtung zu schenken. Es ist bei diesen Untersuchungen zumeist stillschweigend vorausgesetzt, daß alle äußeren Kräfte verhältnismäßig von Null bis zu ihrem Endwert ansteigen. Das Gleiche gilt für Untersuchungen, die sich mit wiederholten Belastungen beschäftigen; hier ist vorausgesetzt, daß die Belastung in gleicher Weise zwischen zwei Grenzwerten schwankt. An dieser Stelle wäre in erster Linie die grundlegende Abhandlung von M. Grüning „Die Tragfähigkeit statisch unbestimmter Tragwerke aus Stahl mit beliebig häufig wiederholter Belastung“ Berlin 1926 zu nennen, als deren wichtigstes Ergebnis die Erkenntnis zu werten ist, daß bei hinreichend oftmaligem Pendeln der Lasten zwischen bestimmten Werten das System schließlich nur mehr begrenzte Formänderungen erfährt. Dabei setzen die Untersuchungen Grünings den minder spezialisierten Fall gemäß Abb. 1a voraus. Diesen allgemein gehaltenen Untersuchungen ist eine spezielle Arbeit von J. Fritsche über den Durchlaufträger bei wiederholter Belastung (Bauingenieur 1932) an die Seite zu stellen, die ideal-plastisches Material annimmt.

Eine Erweiterung der Ergebnisse von Grüning, allerdings ebenfalls für ideal-plastisches Material, verdanken wir H. Bleich (vergl. Bauingenieur 1932). In dieser Abhandlung wird gezeigt, daß es sich auch bei beliebig veränderlicher Belastung, also nicht bloßem Pendeln der äußeren Kräfte zwischen bestimmten Grenzwerten, unter gewissen Bedingungen stets durch eine entsprechende Bemessung erreichen läßt, daß das System schließlich wie ein solches aus vollkommen elastischem Material arbeitet, wenn nur hinreichend oftmalige Belastungsänderungen vor sich gegangen sind. Dieser Satz, mit dem sich der zweite Teil des vorliegenden Referates eingehender befaßt, bildet die Grundlage der Bemessung solcher statisch unbestimmter Systeme aus einem ideal-plastischen Baustoff; das auf ihm aufgebaute Verfahren, für das sich der Name Traglastverfahren eingebürgert hat, wird in dem Referate von F. Bleich noch näher erläutert werden, wenn sich der Leser nicht an anderer Stelle, z. B. in F. Bleich's „Stahlhochbauten“ Berlin 1932 über dasselbe orientieren will.

Die vorstehende Übersicht über die wichtigsten Arbeiten, welche die Theorie

³ J. Fritsche, „Die Tragfähigkeit von Balken aus Stahl mit Berücksichtigung des plastischen Verformungsvermögens“. Bautechnik 1930.

G. H. Schaim, „Der Durchlaufträger unter Berücksichtigung der Plastizität“. Stahlbau 1930.

G. v. Kazinczy, „Statisch unbestimmte Tragwerke unter Berücksichtigung der Plastizität“, Stahlbau 1931, sowie „Bemessung unvollkommen eingespannter Stahl-I-Deckenträger unter Berücksichtigung der plastischen Formänderungen“. Intern. Vereinigung für Brückenbau und Hochbau, Abhandlungen Bd. 2, 1933/34.

K. Girkmann, „Bemessung von Rahmentragwerken unter Zugrundelegung eines ideal-plastischen Stahles“. Sitzungsber. der Akademie der Wiss., Wien 1931, und „Über die Auswirkung der Selbsthilfe des Baustahles in rahmenartigen Stabwerken“, Stahlbau 1932.

statisch unbestimmter Systeme betreffen und die keinen Anspruch auf Vollständigkeit erheben will, ist noch durch die Erwähnung zweier Arbeiten zu ergänzen, die sich mit der Theorie dieser Systeme von einem allgemeineren Standpunkt befassen; es ist dies eine Abhandlung von J. Fritsche in der Zeitschrift für angewandte Mathematik und Physik 1931 und eine Arbeit von Hohenemser im Ingenieurarchiv 1931, die beide von Betrachtungen über die potentielle Energie solcher Systeme ausgehen. Im Gegensatz hierzu verwenden die folgenden Untersuchungen des Referenten, die in der Hauptsache einen allgemeinen Beweis des Satzes von H. Bleich zum Ziele haben, die eingangs erwähnten Gleichgewichtsbedingungen in Verbindung mit dem dem ideal-plastischen Baustoff entsprechenden Elastizitätsgesetz. Es möge schon an dieser Stelle vorweggenommen werden, daß die unter Umständen auftretende Unbestimmtheit der Längenänderungen, welche m. W. bislang nicht beachtet worden ist und die gewisse Einschränkungen hinsichtlich der Gültigkeit des Satzes von H. Bleich notwendig macht, eine Folge der besonderen Annahme des Spannungs-Dehnungs-Gesetzes außerhalb des Hooke'schen Bereiches ist. Ersetzt man das Diagramm etwa durch Abb. 1a oder 1b, so fallen mit diesen unbestimmten Lösungen auch die ganzen durch dieselben bedingten Überlegungen fort; diese Vereinfachung wird allerdings durch das Auftreten einer neuen Materialkonstanten, nämlich der Neigung der Grenzgeraden, erkauft.

II.

1. Der Beweis, den H. Bleich für seinen vorerwähnten Satz über statisch unbestimmte Systeme aus einem ideal-plastischen Baustoff in der zitierten Abhandlung gibt, ist nicht ganz einfach und nur für höchstens zweifach statisch unbestimmte Systeme durchgeführt. Eine Erweiterung des dort entwickelten Gedankenganges scheint für höher statisch unbestimmte Tragwerke wegen des Aufwandes an Rechenarbeit so gut wie ausgeschlossen.

Im Folgenden soll nun ein allgemein gültiger Beweis für beliebig vielfach statisch unbestimmte Systeme erbracht werden, der verhältnismäßig einfach zu führen ist, wenn man sich über gewisse grundlegende Eigenschaften solcher Systeme aus einem ideal-plastischen Baustoff Klarheit verschafft hat. Überdies werden die dem eigentlichen Beweis im Folgenden vorangestellten allgemeineren Erörterungen geeignet sein, einen tieferen Einblick in die Wirkungsweise solcher Tragwerke zu ermöglichen. Es sind hierzu nur einige einfache Sätze über lineare Gleichungssysteme erforderlich, die in jedem Lehrbuch der Algebra zu finden sind. Um nicht mit unendlich viel Veränderlichen zu tun zu haben, beschränken wir uns im Folgenden auf Fachwerke; der Übergang zu unendlich viel Veränderlichen, wie er für die Behandlung von Systemen mit biegungssteifen Stäben notwendig wird, ist etwa ähnlich wie in der Theorie der Integralgleichungen üblich zu führen und bietet keine grundsätzlichen Schwierigkeiten.

Vorerst sei daran erinnert, daß die Längenänderung eines Stabes aus einem ideal-plastischen Baustoff durch die Beziehung

$$\Delta s = v + \rho \cdot S \quad (1)$$

gegeben ist. Darin bedeutet ρ eine von Stablänge, Elastizitätsmodul und Querschnitt des Stabes abhängige Konstante, v die sogenannte „bleibende“ Längen-

unbestimmter Systeme die Stabkräfte B entstanden sein. S , B und v sind dann durch das Gleichungssystem

$$S_i + \sum q_{ik} v_k = B_i \quad (i = 1, 2, \dots, r) \quad (2)$$

verknüpft. Die Bedeutung der q_{ik} ist leicht einzusehen; q_{ik} stellt die Stabkraft im Stabe i vor, wenn in dem unbelasteten System (alle $B = 0$) alle bleibenden Längenänderungen v mit Ausnahme der des Stabes k gleich Null sind; in diesem ist $v_k = -1$ anzunehmen. Denn setzt man diese Werte in Gl. (2) ein, so ergibt sich sofort

$$S_i = q_{ik}$$

Man erkennt hieraus, daß für notwendige Stäbe $q_{ik} = 0$ wird und da, wie sofort gezeigt wird, $q_{ik} = q_{ki}$ wird, kann sich die Summe in Gl. (2) höchstens über alle nicht notwendigen Stäbe $1, 2, \dots, r$ erstrecken. Daß die Matrix ($q_{11} \dots q_{rr}$) symmetrisch, also $q_{ik} = q_{ki}$ ist, erkennt man aus einem Satz, der dem Maxwell'schen Theorem über die Gegenseitigkeit der Verschiebungen analog, sich auf die Gegenseitigkeit der Stabkräfte bezieht. Dieser Satz, der leicht durch Auflösen der Elastizitätsgleichungen bewiesen werden kann, besagt, daß die Stabkraft in dem Stabe i , hervorgerufen durch eine bleibende Längenänderung $v_k = -1$ des Stabes k , demnach q_{ik} , gleich der Stabkraft des Stabes k wird, die durch die Längenänderung $v_i = -1$ des Stabes i erzeugt wird, daß also $q_{ik} = q_{ki}$ wird. Dieser Satz beinhaltet natürlich nur bei statisch unbestimmten Systemen und nur bei nicht notwendigen Stäben eine nicht triviale Aussage, da sonst $q_{ik} = q_{ki} = 0$ wird.

Setzen wir $\sigma_i = B_i - S_i$, so erhalten wir aus (2) das Gleichungssystem

$$\sigma_i = \sum q_{ik} v_k \quad (i = 1, 2, \dots, r) \quad (3)$$

Das System der σ_i nennen wir ein System von Zwangskräften; es sind $-\sigma_i$ jene Stabkräfte, die in dem unbelasteten Fachwerk, welches infolge der vorhergegangenen Belastungen bereits die bleibenden Längenänderungen v_k erhalten hat, auftreten. Multiplizieren wir die einzelnen Gleichungen von (3) der Reihe nach mit v_i und addieren, so erhalten wir die „quadratische Form“

$$J = \sum_i \sigma_i v_i = \sum_i \sum_k q_{ik} v_i v_k \quad (4)$$

Es ist für den zu erbringenden Beweis wichtig, daß J stets wesentlich positiv ist, d. h. wie immer die v_k gewählt werden, J niemals negativ werden kann. Um dies einzusehen, geht man am einfachsten von dem Prinzip der virtuellen Verschiebungen aus, welches bekanntlich für ein Fachwerk in der Gestalt

$$\sum S \Delta s = \sum P \delta$$

angeschrieben werden kann. Die Summe rechter Hand ist hierbei über alle äußeren Kräfte, die linke über alle Stäbe des Fachwerkes zu nehmen. Die S und die P stellen ein Gleichgewichtssystem vor. Die Längenänderungen Δs können beliebig, nur mit den geometrischen Zusammenhangsbedingungen verträglich, angenommen werden, d. h. bei einem v -fach statisch unbestimmten System können sie nur bis auf v Werte willkürlich gewählt werden. Ein solches sicherlich verträgliches

System von Δs bilden die Werte $v + \rho S$ und auch die Werte ρB , nämlich die Längenänderungen des Systems aus ideal-plastischem und vollkommen elastischem Material. Sicher ist dann auch die Differenz $v + \rho (S - B) = v - \rho \sigma$ ein verträgliches System von Längenänderungen. Die Größen δ bedeuten schließlich die Verschiebungen der Angriffspunkte der äußeren Kräfte P in deren Richtung, wenn die einzelnen Fachwerksstäbe die Längenänderungen Δs erfahren haben.

Setzt man also $\Delta s = v - \rho \sigma$ und schreibt man das Prinzip der virtuellen Verschiebungen einmal für das ideal-plastische, das andere Mal für das vollkommen elastische System an und beachtet, daß sowohl zu den Stabkräften S als auch zu den Stabkräften B dieselben äußeren Lasten P gehören, während die δ in beiden Fällen dieselben sind entsprechend den Werten $v - \rho \sigma$, so erhält man durch Subtraktion beider Gleichungen

$$\sum (v - \rho \sigma) \sigma = 0$$

und daraus folgt, daß

$$J = \sum v \sigma = \sum \rho \sigma^2 \geq 0, \quad (4a)$$

womit die Behauptung, daß J nicht negativ werden kann, bewiesen ist, da ja $\rho = s/EF$ nicht negativ ist und die Summe $\sum \rho \sigma^2$ sich daher nur über positive Summanden erstreckt. J kann überhaupt nur dann verschwinden, wenn alle $\sigma = 0$ sind; daraus darf aber nicht geschlossen werden, daß dann unter allen Umständen auch alle $v = 0$ sein müssen.

Haben die Stabkräfte des ideal-plastischen Fachwerkes in einem bestimmten Augenblick die Werte S erreicht und sind in diesem Zeitpunkt gerade die Stäbe $1, 2, \dots, \mu$ mit ihren Stabkräften an die Fließgrenze gekommen, ist also $S_1 = T_1, S_2 = T_2, \dots, S_\mu = T_\mu$, so werden sich bei einer Änderung der äußeren Belastung die S in $S + \Delta S$, v in $v + \Delta v$ und B in $B + \Delta B$ geändert haben. Es gilt dann wiederum, entsprechend dem Gleichungssystem (2)

$$(S_i + \Delta S_i) + \sum q_{ik} (v_k + \Delta v_k) = (B_i + \Delta B_i)$$

und wenn hievon das Gleichungssystem (2) subtrahiert wird, erhält man

$$\Delta S_i + \sum q_{ik} \Delta v_k = \Delta B_i \quad (i = 1, 2, \dots, \mu) \quad (5)$$

bezw.

$$\Delta \sigma_i = \sum q_{ik} \Delta v_k \quad (6)$$

wobei jetzt $\Delta \sigma_i$ die Änderung der Zwangskräfte bedeutet. Die Summe $\sum q_{ik} \Delta v_k$ kann sich höchstens über die ersten μ -Stäbe erstrecken, denn es können gemäß der Definition eines ideal-plastischen Baustoffes nur jene Stäbe fließen, bei denen $S = T'$ oder $S = T$ war. Voraussetzung ist nur, daß ΔB hinreichend klein gewählt worden ist, so daß nicht etwa inzwischen andere Stäbe als die ersten μ an die Fließgrenze gelangt sind. Solange ein und dieselben Stäbe fließen, wollen wir von einer bestimmten „Phase“ sprechen; eine neue Phase beginnt also, wenn neue Stäbe zu fließen beginnen oder Stäbe zu fließen aufhören. Es gilt für die in dem betrachteten Augenblick folgende Phase das Gleichungssystem (5), wobei wir aber entsprechend den Eigenschaften eines ideal-plastischen Baustoffes noch folgende Alternative für die ersten μ -Stäbe zu beachten haben:

Entweder ist $\Delta S_i = 0$, dann hat Δv_i nicht entgegengesetztes Vorzeichen wie $S_i = T_i$ bzw. $S_i = T'_i$,

oder es ist $\Delta v_i = 0$, dann hat ΔS_i nicht dasselbe Vorzeichen wie $S_i = T_i$ bzw. $S_i = T'_i$. $(i = 1, 2, \dots, \mu)$ (5a)

Dabei sind nur die ersten μ -Gleichungen von (5) von Interesse, da ja aus den restlichen Gleichungen S_j ($\mu < j \leq r$) ohne Schwierigkeiten bestimmt werden kann, wenn aus den ersten μ -Gleichungen die Δv_k ermittelt worden sind. Liegt, wie wir voraussetzen, ein und dieselbe Phase vor, was durch hinreichend kleine ΔB stets zu erreichen ist, so gilt sicherlich $S_j + \Delta S_j \leq T_j$ bzw. T'_j und wir brauchen uns um diese Gleichungen vorderhand nicht zu kümmern.

3. Es läßt sich mittels des Prinzipes der virtuellen Verschiebungen leicht zeigen, daß die angeschriebene Alternative (5a) gerade ausreicht, die Lösungen ΔS des Systemes (5), nämlich von

$$\Delta S_i + \sum q_{ik} \Delta v_k = \Delta B_i \quad (i = 1, 2, \dots, r)$$

eindeutig zu bestimmen, vorausgesetzt, daß solche überhaupt existieren. Wären die ΔS nicht eindeutig, so müßten für die äußeren Lasten $\bar{P} = P + \Delta P$ sowohl Werte $S' = S + \Delta S'$ als auch Werte $S'' = S + \Delta S''$ möglich sein. Ebenso gäbe es dann Änderungen der Stablängen $v' + \rho S'$ und $v'' + \rho S''$. Schreibt man nun das Prinzip der virtuellen Verschiebungen in den vier möglichen Kombinationen an, wobei zu $v'' + \rho S''$ die Knotenpunktverschiebungen δ'' , zu $v' + \rho S'$ aber δ' gehören, so erhält man

$$\begin{aligned} \sum S'' (v'' + \rho S'') &= \sum \bar{P} \delta'' & \sum S' (v'' + \rho S'') &= \sum \bar{P} \delta'' \\ \sum S'' (v' + \rho S') &= \sum \bar{P} \delta' & \sum S' (v' + \rho S') &= \sum \bar{P} \delta' \end{aligned}$$

Subtrahiert man von der Differenz der beiden rechts stehenden Gleichungen die Differenz der beiden linken, so findet man

$$\sum (S'' - S') (v'' - v') + \rho (S'' - S')^2 = 0$$

oder

$$\sum (\Delta S'' - \Delta S') (\Delta v'' - \Delta v') + \sum (\Delta S'' - \Delta S')^2 \rho = 0. \quad (7)$$

Nun ist $\sum (\Delta S'' - \Delta S')^2 \rho$ wegen der quadratischen Summanden nicht negativ; dasselbe gilt von der Summe $\sum (\Delta S'' - \Delta S') (\Delta v'' - \Delta v')$. Denn fließt der Stab in beiden Fällen, so ist $\Delta S'' = \Delta S' = 0$ und fließt der Stab in keinem der beiden Fälle, so ist $\Delta v'' = \Delta v' = 0$, d. h. der betreffende Summand verschwindet also jedesmal. Fließt aber der Stab das eine Mal und das andere Mal nicht, so ist z. B. $\Delta S'' = 0$ und $\Delta v''$ hat nicht entgegengesetztes Vorzeichen wie $S = T$, während $\Delta v' = 0$ ist und $\Delta S'$ nicht dasselbe Vorzeichen wie $S = T$ hat. Das betreffende Glied reduziert sich in diesem Falle demnach auf $-\Delta S' \Delta v''$, wobei aber $\Delta S'$ und $\Delta v''$ nie dasselbe Vorzeichen haben können; mithin wird $-\Delta S' \Delta v''$ nicht negativ. Wenn also S'' und S' verschieden sind, besteht die Summe (7) nur aus nicht negativen Summanden und kann nur dann, wie gefordert, verschwinden, wenn $S'' = S'$ wird. Es kann also nur eine ganz bestimmte Phase folgen, wenn die ΔB (oder genauer die dB/dt in dem unmittelbar auf

den betrachteten Augenblick folgenden Zeitintervall dt) gegeben sind. Es sei aber darauf hingewiesen, daß hiedurch nur die Eindeutigkeit der Stabkräfte, nicht aber jene der bleibenden Längenänderungen erwiesen wurde. In der Tat können unter bestimmten Umständen mehrdeutige Lösungen Δv existieren.

In der betrachteten Phase, zu deren Beginn die ersten λ -Stäbe die Fließgrenze erreicht haben, sollen nun die ersten Stäbe wirklich fließen. Es handelt sich demnach um die Lösung des Gleichungssystems

$$\sum_1^{\lambda} q_{ik} \Delta v_k = \Delta B_i = \Delta \sigma_i \quad (i = 1, 2, \dots, \lambda) \quad (8a)$$

für die fließenden Stäbe und

$$\Delta S_j + \sum_1^{\lambda} q_{jk} \Delta v_k = \Delta B_j \quad (\lambda < j \leq r) \quad (8b)$$

für die nicht fließenden Stäbe.

Nach einem bekannten Satz der Algebra haben aber die Gleichungen (8a) dann und nur dann eindeutige Lösungen, wenn die Matrix $(q_{11} \dots q_{\lambda\lambda})$ nicht singulär ist, d. h. die Determinante

$$\begin{vmatrix} q_{11} & \dots & q_{1\lambda} \\ \dots & \dots & \dots \\ q_{\lambda 1} & \dots & q_{\lambda\lambda} \end{vmatrix}$$

nicht verschwindet. Hinreichend, aber nicht notwendig ist hierfür, daß auch $(q_{11} \dots q_{\mu\mu})$ nicht singulär ist. In diesem Falle gehört insbesondere zu den Werten *alle* $\Delta B = 0$ als einziges Lösungssystem *alle* $\Delta v = 0$; es ist dies zugleich die notwendige und hinreichende Bedingung, daß die quadratische Form

$$J = \sum \sum q_{ik} \Delta v_i \Delta v_k$$

verschwindet.

Ist aber $(q_{11} \dots q_{\lambda\lambda})$ singulär und hat diese Matrix etwa den Rang $\mathfrak{P} < \lambda$, d. h. verschwindet nicht nur ihre Determinante sondern auch alle Unterdeterminanten mit mehr als \mathfrak{P} -Zeilen, während mindestens eine \mathfrak{P} -zeilige ungleich Null ist, so sind die Δv nicht mehr eindeutig. Die Lösungen können vielmehr unter Benützung der willkürlichen Konstanten c_p in der Form

$$\Delta v_i = \Delta v_i^* + \sum_{p=\mathfrak{P}+1}^{\lambda} c_p v_{ip} \quad (9)$$

dargestellt werden, wobei die Δv_i^* die Lösungen des Systemes

$$\sum q_{ik} \Delta v_k^* = \Delta B_i = \Delta \sigma_i \quad (i = 1, 2, \dots, \mathfrak{P})$$

sind, während

$$\Delta v_k^* = 0 \quad \text{für } k = \mathfrak{P} + 1, \mathfrak{P} + 2, \dots, \lambda$$

ist. Da es mindestens eine nicht singuläre Matrix $(p_{11} \dots p_{\mathfrak{P}\mathfrak{P}})$ laut Voraussetzung geben muß, sind die Lösungen Δv_i^* bestimmt eindeutig. Die v_{ip} sind die Lösungen des homogenen Gleichungssystems

$$\sum q_{ik} v_{kp} = 0 \quad (i = 1, 2, \dots, \lambda)$$

welches bekanntlich $\lambda - \vartheta$ verschiedene „Fundamentalsysteme“ \mathbf{v}_{kp} ($p = \vartheta + 1, \vartheta + 2, \dots, \lambda$) als Lösung besitzt. Es läßt sich zeigen, daß diese \mathbf{v}_{kp} auch die restlichen Gleichungen

$$\sum q_{ik} \mathbf{v}_{kp} = 0 \quad (i = \lambda + 1, \lambda + 2, \dots, r)$$

erfüllen; dies folgt aus der Tatsache, daß die rechteckige Matrix

$$\begin{array}{cccc} q_{11} & \dots & q_{1\lambda} & \\ \dots & \dots & \dots & \\ \dots & \dots & \dots & \\ q_{r1} & \dots & q_{r\lambda} & \end{array} \quad (r > \lambda)$$

ebenfalls nur den Rang ϑ haben kann, d. h. daß alle aus diesen Elementen gebildeten Unterdeterminanten mit mehr als ϑ -Zeilen und Spalten höchstens den Rang ϑ besitzen können, wenn, wie dies in dem vorliegenden Falle zutrifft, die in der angeschriebenen Matrix enthaltene Hauptunterdeterminante den Rang ϑ hat, und die zugehörige quadratische Form $J = \sum \sum q_{ik} v_i v_k$ wesentlich positiv ist.

Es sind nun wiederum zwei Fälle möglich: entweder es ist unmöglich, in der allgemeinen Lösung die willkürlichen Werte c_p so zu wählen, daß bereits $\sum c_p \mathbf{v}_{ip}$ die durch die Alternative (5a) vorgeschriebenen Vorzeichen besitzt. Hat dann $\Delta v_i = \Delta v_i^* + \sum c_p \mathbf{v}_{ip}$ die geforderten Vorzeichen, so wird auch $\Delta v_i = \Delta v_i^* + \sum (c_p + \delta c_p) \mathbf{v}_{ip}$ dieselben Vorzeichen besitzen, wenn nur δc hinreichend klein gewählt worden ist; die Δv_i sind somit in diesem Falle nicht eindeutig, aber immerhin zwischen gewissen endlichen Grenzen eingeschlossen. Erfüllt aber $\sum c_p \mathbf{v}_{ip}$ allein schon die verlangten Vorzeichenbedingungen, so hat auch $\sum k c_p \mathbf{v}_{ip}$ mit einem beliebigen positiven k dieselben Vorzeichen und mit einem über alle Grenzen wachsenden k wird auch die Lösung $\Delta v_i = \Delta v_i^* + k \sum c_p \mathbf{v}_{ip}$ unendlich groß werden.

Für den Beweis des eingangs erwähnten Satzes ist schließlich noch die Kenntnis folgender Tatsache von Nutzen. Sind die Größen z_i und w_i durch das Gleichungssystem

$$z_i = \sum_{k=1}^r q_{ik} w_k \quad (i = 1, 2, \dots, r)$$

verknüpft, so gilt

$$\sum_{k=1}^r z_k \mathbf{v}_{kp} = 0 \quad (10)$$

Man erkennt sofort die Richtigkeit der vorstehenden Gleichung, wenn man in derselben die Werte $z_k = \sum_i q_{ki} w_i$ einsetzt. Denn damit wird

$$\sum_k z_k \mathbf{v}_{kp} = \sum_k \sum_i q_{ki} w_i \mathbf{v}_{kp}$$

und daraus mit Vertauschung der Summationsfolge $\sum_i w_i \sum_k q_{ik} \mathbf{v}_{kp}$.

Da definitionsgemäß $\sum_k q_{ik} \mathbf{v}_{kp} = 0$ ist, muß also auch $\sum_k z_k \mathbf{v}_{kp} = 0$ sein.

Der Vollständigkeit halber fügen wir noch die nachstehende Bemerkung an: Schreiben wir das Prinzip der virtuellen Verschiebungen mit den Längenänderungen ΔB_ρ an, welche sicherlich mit dem geometrischen Zusammenhänge des Fachwerkes verträglich sind und verwenden das eine Mal die zu der Belastung ΔP gehörenden Stabkräfte ΔS , das andere Mal die Stabkräfte ΔB , subtrahieren die beiden Gleichungen, so erhalten wir wegen $\sigma = \Delta S - \Delta B$ die Gleichung

$$\sum \Delta \sigma \Delta B_\rho = 0.$$

Daraus ergibt sich, daß $\Delta \sigma$ und ΔB niemals für alle Stäbe dasselbe Vorzeichen besitzen können, denn sonst wäre die Summe wegen der stets positiven ρ sicherlich positiv und könnte nicht, wie gefordert, verschwinden. Es ist dies der prägnante Ausdruck für die in der Praxis mehr gefühlsmäßig mit „Selbsthilfe“ des Materiales bezeichnete Eigenschaft ideal-plastischer Tragwerke, wonach eine Herabsetzung der Spannungen an gewissen Stellen durch ein Anwachsen derselben an anderen Stellen erreicht wird.

4. Die bisher erhaltenen Ergebnisse werden dem Ingenieur vielleicht anschaulicher und vertrauter werden, wenn wir durch gewisse Änderungen, die wir mit dem vorgegebenen Fachwerk vornehmen, die Verhältnisse, die in demselben während einer bestimmten Phase auftreten, erläutern. Zu diesem Zwecke bilden wir aus dem gegebenen Fachwerk ein neues, indem wir bestimmte nicht notwendige Stäbe durchschneiden und an den Schnittstellen solche Mechanismen einbauen, daß eine Bewegung der Schnitthufer gegeneinander nur in einem bestimmten Richtungssinn möglich wird. Bei einigen der geschnittenen Stäbe soll es also nur möglich sein, daß sich die Schnitthufer von einander entfernen; dies könnte etwa dadurch erreicht werden, daß die Stäbe senkrecht zur Achse geschnitten und die Schnittstellen ohne Verwendung eines Verbindungsmittels stumpf gestoßen sind. Bei anderen von den geschnittenen Stäben mögen sich die Schnittstellen nur einander nähern können, was dadurch zu erreichen wäre, daß der betreffende Stab durch ein Seil ersetzt wird.

Belastet man nun dieses Fachwerk mit den Kräften ΔP , so sind die Stabkräfte des neuen Systemes ΔS mit jenen des vorgegebenen ΔB offensichtlich durch das folgende Gleichungssystem miteinander in Beziehung gesetzt:

$$\Delta S_i + \sum q_{ik} \Delta v_k = \Delta B_i \quad (i = 1, 2, \dots, r)$$

wobei die Δv die gegenseitigen Verschiebungen der Schnitthufer der durchgeschnittenen ersten μ -Stäbe sind. Für die ersten μ -Stäbe gilt demnach das Gleichungssystem

$$\Delta S_i + \sum_{k=1}^{\mu} q_{ik} \Delta v_k = \Delta B_i \quad (i = 1, 2, \dots, \mu)$$

mit der Alternative entweder $\Delta B = 0$, dann ist $\Delta v \leq 0$
oder $\Delta S \leq 0$, dann ist $\Delta v = 0$

wobei der Sinn des Ungleichheitszeichens durch die Art des eingebauten Mechanismus bestimmt wird. Es sind dies dieselben Gleichungen mit derselben Alternative wie wir sie für unser vorgegebenes System aus einem ideal-plastischen Baustoff unter (5) und (5a) angeschrieben haben.

Sonach können wir sagen, daß das vorgegebene Fachwerk aus einem idealplastischen Baustoff am Beginne einer Phase durch ein neues Fachwerk ersetzt werden kann, bei welchem letzterem die im ursprünglichen Fachwerk an der Fließgrenze befindlichen Stäbe geeignete, wie vor beschriebene Mechanismen eingebaut erhielten. Belastet man dieses neue Fachwerk mit den auf die betreffende Phase entfallenden Änderung der äußeren Kräfte, so sind seine Stabkräfte ΔS gleich den während dieser Phase aufgetretenen Änderungen der Stabkräfte des ursprünglichen Fachwerkes. Haben hiebei die durchschnittenen Stäbe die nicht singuläre Matrix $(q_{11} \dots q_{\mu\mu})$, so bedeutet dies, daß das neue Fachwerk (ohne Rücksicht auf die eingebauten Mechanismen) unverschieblich ist; denn das homogene Gleichungssystem

$$\sum q_{ik} v_{kp} = 0$$

läßt in diesem Falle keine andere Lösung als alle $v = 0$ zu. Wir erkennen dann weiters, daß das System

$$\Delta S_i + \sum q_{ik} \Delta v_k = \Delta B_i$$

für beliebige Werte ΔB stets eine eindeutige Lösung für die ΔS und Δv besitzen muß. Ist aber die Matrix $(q_{11} \dots q_{\mu\mu})$ singulär, und hat sie etwa den Rang ϑ , so sind zwei Fälle möglich; entweder das neue Fachwerk ist durch die eingebauten Mechanismen „selbstgesperrt“, d. h. die Lösungen des homogenen Gleichungssystemes besitzen nicht die durch die Mechanismen vorgeschriebenen Vorzeichen; das System ist unverschieblich und für alle möglichen ΔB lösbar, wenn auch die Δv nicht eindeutig, sondern zwischen endlichen Grenzen eingeschlossen sind. Oder aber das neue Fachwerk ist trotz der eingebauten Mechanismen verschieblich und es existieren Lösungen des homogenen Gleichungssystemes mit den vorgeschriebenen Vorzeichen. Dann können die ΔB , damit überhaupt Lösungen existieren, nicht mehr beliebig vorgegeben sein, während die Δv hiebei über alle endlichen Grenzen anwachsen können. Man kann sich leicht durch ein-

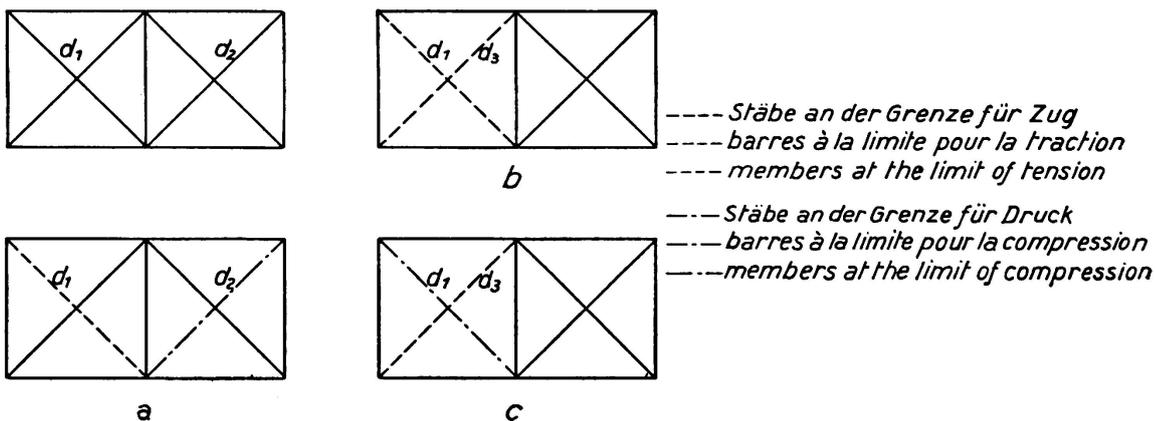


Fig. 3.

fache kinematische Überlegungen in einem bestimmten Fall Klarheit verschaffen, welcher der vorerwähnten Fälle vorliegt. Im übrigen seien diese Tatsachen an einem einfachen Beispiel, nämlich dem in Abb. 3 dargestellten Fachwerk kurz erläutert. Sind z. B. die beiden Stäbe d_1 und d_2 an die Fließgrenze gelangt, sieht

also das neue Fachwerk wie Abb. 3a aus, so ist das neue Fachwerk, wie immer auch die an den Schnittstellen eingebauten Mechanismen beschaffen sein mögen, unverschieblich. Die Matrix $\begin{matrix} q_{11} & q_{12} \\ q_{21} & q_{22} \end{matrix}$ ist keinesfalls singulär, und wie immer sich die Belastung in der nun folgenden Phase ändert, es wird stets einen Gleichgewichtszustand geben. Kommen aber die Stäbe d_1 und d_3 an die Fließgrenze (Abb. 3b), so ist die Matrix $\begin{matrix} q_{11} & q_{13} \\ q_{31} & q_{33} \end{matrix}$ singulär, denn das neue Fachwerk ist zunächst verschieblich. Kommen aber beide Stäbe an die Druckgrenze T' oder beide an die Zuggrenze T , dann heben die entsprechenden Mechanismen (es wären z. B. beide Stäbe durch Seile zu ersetzen) die Verschieblichkeit auf und es wird bei beliebiger Belastungsänderung Gleichgewicht möglich sein, da ein selbstgesperrtes System vorliegt. Kommt hingegen ein Stab an die Druckgrenze, der andere an die Zuggrenze (Abb. 3c) und folgt eine Belastungsänderung, bei welcher beide Stäbe wirklich fließen, so müssen die ΔB einer Bedingung genügen, damit überhaupt Gleichgewicht möglich ist und Lösungen überhaupt existieren. Hierbei können die Δv aber über alle endlichen Grenzen anwachsen.

5. Nach diesen Vorbemerkungen soll nun der eingangs erwähnte Satz bewiesen werden; derselbe besagt Folgendes: Wird ein statisch unbestimmtes Fachwerk aus einem ideal-plastischen Baustoff durch beliebig veränderliche Kräfte belastet, wobei nur die bei Voraussetzung eines vollkommen elastischen Materials auftretenden Stabkräfte innerhalb eines vorgegebenen bestimmten Intervalles $B_i^{\max} \geq B_i \geq B_i^{\min}$ liegen, so werden bei hinreichend oftmaligen Belastungsänderungen die bleibenden Längenänderungen endlichen Grenzwerten zustreben unter der Voraussetzung, daß sich ein solches System von Zwangskräften $\bar{\sigma}$ angeben läßt, für welches in allen Stäben

$$-\bar{\sigma}_i + B_i^{\max} \leq T_i \quad \text{und} \quad -\bar{\sigma}_i + B_i^{\min} \geq T'_i$$

ist. Bezeichnet man $B_i^{\max} - T_i = t_i$ und $B_i^{\min} - T'_i = t'_i$, so muß demnach ein System von Zwangskräften $\bar{\sigma}$ existieren, für welches

$$t'_i \leq \bar{\sigma}_i \leq t_i$$

gilt.

Nehmen wir an, wir hätten ein solches System der $\bar{\sigma}$ angegeben und bilden nunmehr die Werte $\bar{B}_i^{\max} = \bar{\sigma}_i + T_i$ bzw. $\bar{B}_i^{\min} = \bar{\sigma}_i + T'_i$, so ist es klar, daß der behauptete Satz, falls er richtig ist, auch für die veränderlichen Belastungen B_i

$$\bar{B}_i^{\max} \geq B_i \geq \bar{B}_i^{\min}$$

gelten muß, wobei $\bar{B}_i^{\max} \geq B_i^{\max}$ und $B_i^{\min} \geq \bar{B}_i^{\min}$ ist. (Vergl. Abb. 4.)

Wir betrachten nun das Fachwerk nach einer Reihe von Belastungsänderungen; es mögen etwa nach dem Ablauf von φ Phasen am Ende der φ -ten Phase für das System die Zwangskräfte $\sigma^{(\varphi)}$ vorliegen. Dann können während der nun beginnenden $(\varphi + 1)$ -ten Phase Stäbe, bei denen $\sigma^{(\varphi)} > \bar{\sigma}$ ist, wenn überhaupt, nur dann fließen, wenn die Stabkraft $S = T'$ geworden ist. Hingegen sind Werte $S = T$ ausgeschlossen; denn selbst wenn $B = \bar{B}^{\max}$ wird, so ist die Stabkraft

$S =: \bar{B}^{\max} - \sigma^{(\varphi)}$ kleiner als $T = \bar{B}^{\max} - \bar{\sigma}$. Es kann demnach ein solcher Stab, für den $\sigma^{(\varphi)} > \bar{\sigma}$ nur negative bleibende Längenänderungen $\Delta v^{(\varphi+1)}$ während der $(\varphi + 1)$ -ten Phase erfahren. Nun muß aber für einen während dieser Phase fließenden Stab die Bedingung $\sigma > \bar{\sigma}$ während der ganzen Phase erhalten bleiben; es gilt sonach überdies noch für das Ende der $(\varphi + 1)$ -ten Phase, bzw. den Beginn der $(\varphi + 2)$ -ten Phase $\bar{\sigma}^{(\varphi+1)} \geq \bar{\sigma}$. Umgekehrt kann für Stäbe, bei denen $\sigma^{(\varphi)} < \bar{\sigma}$ und auch $\sigma^{(\varphi+1)} \leq \bar{\sigma}$ nur $\Delta v^{(\varphi+1)} > 0$ sein. Zusammenfassend bemerken wir also für einen während der $(\varphi + 1)$ -ten Phase fließenden Stab

$$\left. \begin{aligned} z^{(\varphi)} = \bar{\sigma} - \sigma^{(\varphi)} > 0, \text{ dann auch } \Delta v^{(\varphi+1)} > 0 \text{ und überdies} \\ z^{(\varphi+1)} = z^{(\varphi)} - \Delta \sigma^{(\varphi+1)} \geq 0 \\ \text{und wenn} \\ z^{(\varphi)} = \bar{\sigma} - \sigma^{(\varphi)} < 0, \text{ dann auch } \Delta v^{(\varphi+1)} < 0 \text{ und überdies} \\ z^{(\varphi+1)} = z^{(\varphi)} - \Delta \sigma^{(\varphi+1)} \leq 0. \end{aligned} \right\} \quad (11)$$

Es ist selbstverständlich, daß in den weiterhin folgenden Phasen keine neuen Änderungen $\Delta \sigma$ der Zwangskräfte mehr auftreten können, wenn einmal für alle

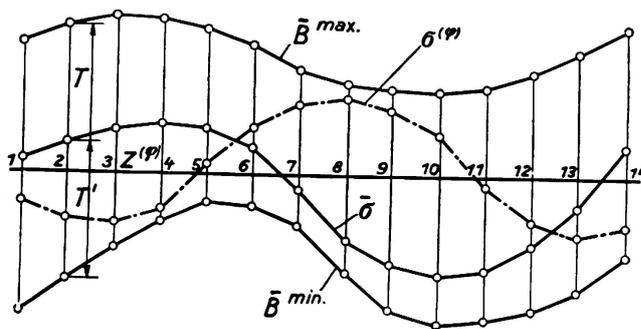


Fig. 4.

Stäbe die $z^{(\varphi)} = \bar{\sigma} - \sigma^{(\varphi)} = 0$ geworden sind. Unsere Beweisführung zerfällt demnach in zwei Teile: zunächst zeigen wir, daß tatsächlich der Zustand $\bar{\sigma} - \sigma^{(\varphi)} = z^{(\varphi)} = 0$ für alle Stäbe einmal sich einstellen wird und weiters, daß hierbei die bis dahin entstandenen bleibenden Längenänderungen $\bar{v} = \Sigma \Delta v$ nur einen endlichen Betrag annehmen konnten.

Zwischen den Größen $\bar{\sigma}$ und den hierbei aufgetretenen bleibenden Längenänderungen \bar{v} besteht selbstverständlich auch das Gleichungssystem

$$\bar{\sigma}_i = \sum q_{ik} \bar{v}_k, \quad (i = 1, 2, \dots, r)$$

während den Zwangskräften $\sigma^{(\varphi)}$ die Längenänderungen $v^{(\varphi)}$ am Beginne der $(\varphi + 1)$ -ten Phase zugeordnet sind entsprechend dem Gleichungssystem

$$\sigma_i^{(\varphi)} = \sum q_{ik} v_k^{(\varphi)}. \quad (i = 1, 2, \dots, r)$$

Dabei erstrecken sich die angeschriebenen Summen über alle Stäbe, wobei es natürlich ebenso wie bei den folgenden Summen nicht ausgeschlossen ist, daß im Besonderen einige der \bar{v}_k bzw. v verschwinden. Bezeichnet man weiters mit

$w^{(\varphi)} = \bar{v} - v^{(\varphi)}$ und $z^{(\varphi)} = \bar{\sigma} - \sigma^{(\varphi)}$, so gilt auch

$$z_i^{(\varphi)} = \sum q_{ik} w_k^{(\varphi)}$$

und ebenso für das Ende der $(\varphi + 1)$ -ten Phase.

$$z_i^{(\varphi+1)} = \sum q_{ik} w_k^{(\varphi+1)}$$

wobei, wie man sofort bestätigt findet

$$z_i^{(\varphi+1)} = z_i^{(\varphi)} - \Delta\sigma_i^{(\varphi+1)} \quad \text{und} \quad w_i^{(\varphi+1)} = w_i^{(\varphi)} - \Delta v_i^{(\varphi+1)} \quad (12)$$

Betrachten wir nun die Differenz der beiden quadratischen Formen

$$\Delta K^{(\varphi+1)} = K^{(\varphi+1)} - K^{(\varphi)} = \sum (z^{(\varphi+1)} w^{(\varphi+1)} - z^{(\varphi)} w^{(\varphi)})$$

und setzen hierin $z^{(\varphi+1)}$ und $w^{(\varphi+1)}$ gemäß Gleichung (12) ein, so erhalten wir

$$\Delta K^{(\varphi+1)} = - \sum z^{(\varphi)} \Delta v^{(\varphi+1)} - \sum \Delta \sigma^{(\varphi+1)} w^{(\varphi)} + \sum \Delta v^{(\varphi+1)} \Delta \sigma^{(\varphi+1)}$$

Nun sind aber die beiden ersten Summen einander gleich, wie man sofort erkennt, wenn man in der ersten $z^{(\varphi)} = \sum q_{ik} w_k^{(\varphi)}$ und in der zweiten $\Delta \sigma^{(\varphi+1)} = \sum q_{ik} \Delta v_k^{(\varphi+1)}$ einsetzt, da man dann in beiden Fällen die bilineare Form

$$\sum \sum q_{ik} \Delta v_i^{(\varphi+1)} w_i^{(\varphi)}$$

erhält; es ist also

$$\Delta K^{(\varphi+1)} = \sum (-2z^{(\varphi)} + \Delta \sigma^{(\varphi+1)}) \Delta v^{(\varphi+1)} = - \sum (z^{(\varphi+1)} + z^{(\varphi)}) \Delta v^{(\varphi+1)}$$

Es hat aber nach Früherem $z^{(\varphi+1)}$ nie entgegengesetztes und $z^{(\varphi)}$ stets dasselbe Vorzeichen wie $\Delta v^{(\varphi+1)}$, so daß also $\Delta K^{(\varphi+1)}$ nicht positiv werden kann. Somit kann der Ausdruck für K von Phase zu Phase niemals zunehmen; ändern sich die bleibenden Längenänderungen, so nimmt K ab und nur wenn das System aller v während einer Phase unverändert bleibt, bleibt auch K konstant. Da demnach K , wenn es sich ändert, nur abnehmen und gemäß der Gleichung (4 bzw. 4a) nicht negativ sein kann, muß es schließlich einmal Null werden. Ist aber K gleich Null, so sind sicherlich alle $z = 0$ und von diesem Augenblick an können keine neuen Änderungen $\Delta \sigma$ eintreten.

Nun ist noch zu zeigen, daß die hierbei auftretenden bleibenden Längenänderungen $\bar{v} = \sum \Delta v$ endlich sind. Solange die $\Delta z^{(\varphi)} = \sigma^{(\varphi)} - \sigma^{(\varphi+1)}$ endlich sind, werden auch die Δv endlich sein, mit Ausnahme des Falles, daß eine Matrix, die singular ist, vorkommt, bei der schon die Eigenlösungen $\sum_{\varphi} c_p v_{ip}$ die vorgeschriebenen Vorzeichenbedingungen erfüllen. Denn nur in diesem Falle könnten bei endlichen $\Delta z^{(\varphi)}$ unendliche Δv auftreten. Dieser Fall ist aber auf Grund der Voraussetzung über die Existenz eines Systemes von Zwangskräften $\bar{\sigma}$ nur möglich, wenn alle $z = 0$ sind. Denn die z_i müssen ja stets dieselben Vorzeichen wie die Δv_i haben, d. h. in dem vorliegenden Falle auch schon wie die $\sum_p c_p v_{ip}$ aufweisen. Nun ist aber $\sum_p \sum_i c_p v_{ip} z_i = \sum_p c_p \sum_i z_i v_{ip} = 0$ weil ja

$\sum_i z_i v_{ip}$ nach Gleichung (10) bereits Null ist. Es kann demnach z_i und $\sum_p c_p v_{ip}$ nicht für alle i dasselbe Vorzeichen besitzen, denn sonst wäre $\sum_p \sum_i c_p v_{ip} z_i$ sicher-

lich positiv und nicht Null. Der Fall, daß Phasen vorkommen, in denen die Δv über alle Grenzen anwachsen, ist daher im allgemeinen nicht möglich. Nur wenn bereits alle z gleich Null sind, also der Zustand der Zwangskräfte $\bar{\sigma}$ schon erreicht ist, können unendliche Δv dann auftreten, wenn die Belastung B die Grundwerte \bar{B}^{\max} oder \bar{B}^{\min} an μ -Stellen bei einem ν -fach statisch unbestimmten System erreicht hat, deren Matrix $(q_{11} \dots q_{\mu\mu})$ singulär ist und überdies das zugeordnete neue Fachwerk nicht selbst gesperrt ist. Um diesen Fall auszuschließen, müßte man vereinbaren, daß sich die B zwar beliebig nahe den Grenzwerten \bar{B}^{\max} oder \bar{B}^{\min} nähern können, ohne sie zu erreichen oder daß sie dieselben nur während eines unendlich kleinen Zeitintervalles dt erreichen, während welchem bei einer endlichen Fließgeschwindigkeit noch keine endlichen bleibenden Längenänderungen auftreten können. Im übrigen werden in Wirklichkeit solche über alle Grenzen anwachsenden bleibenden Längenänderungen auch durch die sich einstellende Verfestigung des Materials ausgeschlossen sein.

Es wurde bereits in der Einleitung darauf hingewiesen, daß sich die vorstehende Beweisführung auch für Systeme mit biegesteifen Stäben ähnlich durchführen läßt. Es ist übrigens sehr wahrscheinlich, daß der hier für das Fachwerk bewiesene Satz auch für das Kontinuum aus plastischem Material gilt, wenn man nur die Eigenschaften des idealplastischen Mediums entsprechend definiert.

B) Baustoff mit linearem Verfestigungsbereich.

B) Matériau à zone de solidification linéaire.

B) Material with Linear Range of Hardening.

Der Verfasser hat in dem Referat über die Theorie statisch unbestimmter Systeme aus einem ideal-plastischen Baustoff darauf hingewiesen, daß die Wahl des Elastizitätsgesetzes von wesentlichem Einfluß ist und will im folgenden untersuchen, welche Formulierung der Satz von *H. Bleich* und das auf demselben beruhende Traglastverfahren erhält, wenn ein Baustoff mit linearem Verfestigungsbereich verwendet wird. Es handelt sich demnach um eine Verallgemeinerung der Untersuchungen von *M. Grüning* für beliebig veränderliche Belastung, wobei ebenso wie in dem erwähnten Referat eine Neubegründung der Theorie, die trotz der Verallgemeinerung gegenüber der bisherigen Beweisführung eine wesentliche Vereinfachung ergibt, gegeben werden soll.

Die nachstehenden Untersuchungen befassen sich also mit statisch unbestimmten Tragwerken, welche einer beliebig veränderlichen Belastung ausgesetzt

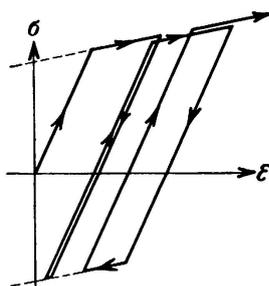


Fig. 1.

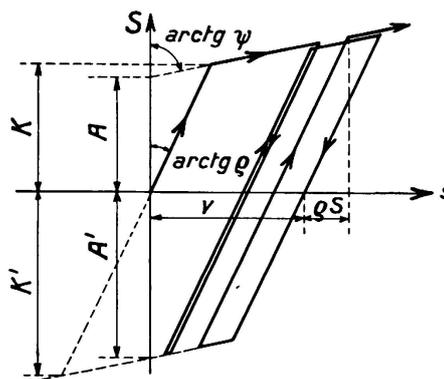


Fig. 2.

sind und aus einem Baustoff bestehen, dessen Spannungsdiagramm in Fig. 1 veranschaulicht ist. Im Interesse der Vereinfachung der Rechnung ist also eine etwas weitergehende Idealisierung gegenüber der Voraussetzung von *M. Grüning* gemacht.

Wenn wir, wie dies auch die beiden vorgenannten Verfasser tun, unsere Untersuchungen auf Fachwerke beschränken, um mit einer endlichen Zahl von Veränderlichen auszukommen, so sind auch die Stabkräfte S und die Längenänderungen s der Stäbe durch denselben Zusammenhang wie Spannung und Dehnung, also gemäß Fig. 2 miteinander verknüpft und es ist demnach die Längenänderung s , die bei einer bestimmten Stabkraft S auftritt, durch die Beziehung

$$s = v + \rho S \quad (1)$$

gegeben; dabei soll v die „bleibende“ und ρS die „elastische“ Längenänderung genannt werden. $\rho = 1/EF$ ist eine von Stablänge l , Stabquerschnitt F und Elastizitätsmodul E abhängige Konstante, die natürlich stets positiv ist. Wie

aus Fig. 2 hervorgeht, bleibt v solange ungeändert, als S innerhalb des Intervalles

$$cv + K' < S < cv + K \quad (2)$$

liegt, wobei, wie man leicht bestätigt findet, die Konstanten

$$c = \frac{1}{\psi - \rho}, \quad K' = A' \frac{\psi}{\psi - \rho} \quad \text{und} \quad K = A \frac{\psi}{\psi - \rho}$$

bedeuten; c ist jedenfalls positiv, während K' negativ, K positiv wird.

Erreicht S einen dieser Grenzwerte, so bleibt in dem folgenden Zeitintervall v nur dann konstant, wenn der absolute Wert von S nicht zunimmt, also die Änderung ΔS nicht dasselbe Vorzeichen wie $S = cv + K'$ bzw. $S = cv + K$ hat. Nimmt aber der absolute Wert von S zu, hat demnach ΔS dasselbe Vorzeichen wie S , so nimmt auch Δv dem absoluten Wert nach zu und zwar gilt für die Änderung Δv die Gleichung

$$\Delta S = c \Delta v \quad (2a)$$

wobei also Δv wegen des positiven c stets dasselbe Vorzeichen wie ΔS und auch S besitzen muß.

Gilt das *Hooke'sche* Gesetz unbeschränkt, so wollen wir im folgenden das Material vollkommen elastisch bezeichnen. In diesem Falle würden bei einer bestimmten Belastung die Stabkräfte B auftreten, wie sie durch die übliche Theorie statisch unbestimmter Tragwerke geliefert werden. Diese B stehen mit den Stabkräften S , die bei derselben Belastung in unserem Tragwerk auftreten, in der Beziehung

$$S_i + \sum q_{ik} v_k = B_i \quad (3)$$

Die Bedeutung der q_{ik} ist leicht zu erkennen. In dem unbelasteten, vollkommen elastischen System (also alle $B = 0$) stellt q_{ik} die Stabkraft im Stabe i vor, wenn alle v gleich Null sind und nur ein einziger Stab k die bleibende Längenänderung $v_k = -1$ erhalten hat. Man kann in einfacher Weise zeigen, daß $q_{ik} = q_{ki}$ ist, weil nach einem dem *Maxwell'schen* Satz ähnlichem Theorem die Stabkraft S_i , hervorgerufen durch $v_k = -1$, also q_{ik} gleich der Stabkraft S_k im Stabe k , erzeugt durch eine Längenänderung $v_i = -1$ des Stabes i , d. i. q_{ki} ist. Es ist also die Matrix

$$\begin{pmatrix} q_{11} & - & q_{1r} \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ q_{r1} & - & q_{rr} \end{pmatrix}$$

symmetrisch; sie hat aber noch eine andere prägnante Eigenschaft, nämlich daß die „quadratische Form“

$$J = \sum \sum q_{ik} v_i v_k \geq 0$$

„semi-definit positiv“ ist, d. h. wie immer die v_i gewählt werden, der Ausdruck für J keinesfalls negativ werden kann. Der Beweis hiefür, der mittels des Prinzipes der virtuellen Verschiebungen uns schwer zu erbringen ist, möge dem eingangs erwähnten Referat entnommen werden.

Ändern sich die äußeren Kräfte, so werden sich im vollkommen elastischen System die Stabkräfte B um ΔB , im elastisch-plastischen System die Stabkräfte S um ΔS und die bleibenden Längenänderungen v um Δv ändern.

Solange die ΔB innerhalb hinreichend kleiner Grenzen liegen, werden nur bei ein- und denselben Stäben Δv auftreten; wir sprechen dann von einer bestimmten „Phase“; eine neue Phase beginnt demnach, wenn bei neuen, anderen Stäben sich die bleibenden Längenänderungen zu ändern beginnen oder für bestimmte Stäbe Δv verschwindet.

Wir nehmen nun an, daß am Ende einer bestimmten Phase (φ) die Werte $S^{(\varphi)}$, $B^{(\varphi)}$ und $v^{(\varphi)}$ gegeben sind und daß hiebei die ersten μ -Stäbe des Fachwerkes gerade die Grenzwerte $S^{(\varphi)} = cv^{(\varphi)} + K$ bzw. $S^{(\varphi)} = cv^{(\varphi)} + K'$ erreicht haben. Ändert sich nun $B^{(\varphi)}$ um $\Delta B^{(\varphi+1)}$ in der folgenden $(\varphi+1)^{\text{ten}}$ Phase, so wird sich im allgemeinen bei allen Stäben $S^{(\varphi)}$ um $\Delta S^{(\varphi+1)}$ ändern; neue bleibende Längenänderungen können aber, wenn überhaupt, nur in den ersten μ Stäben aufgetreten sein. Es gilt sonach das Gleichungssystem

$$S^{(\varphi)} + \Delta S^{(\varphi+1)} + \sum q_{ik} (v_k^{(\varphi)} + \Delta v_k^{(\varphi+1)}) = B_i^{(\varphi)} + \Delta B_i^{(\varphi+1)} \quad (4)$$

und wenn hievon die Gleichungen (3) abgezogen werden, bekommt man

$$\Delta S_i^{(\varphi+1)} + \sum q_{ik} \Delta v_k^{(\varphi+1)} = \Delta B_i^{(\varphi+1)} \quad (i = 1, 2, \dots, r) \quad (5)$$

Es genügt hiebei die ersten μ -Gleichungen zu betrachten, die aber 2μ Unbekannte, nämlich die Werte ΔS und Werte Δv enthalten. Man kann nun zeigen, daß die für die ersten Stäbe bestehende Alternative nämlich

$$\begin{aligned} &\text{entweder } \Delta S \text{ entgegengesetztes Vorzeichen wie } S, \text{ dann } \Delta v = 0, \\ &\text{oder } \Delta S \text{ dasselbe Vorzeichen wie } S, \text{ dann } \Delta v \text{ gemäß} \end{aligned} \quad (6)$$

Gleichung (2a) $\Delta S = c \Delta v$, also auch Δv dasselbe Vorzeichen wie ΔS und auch S ,

gerade notwendig und hinreichend ist, eindeutige Lösungen des Gleichungssystems (5) zu erzwingen. Der Beweis kann ähnlich wie bei dem ideal-plastischen Baustoff [vergleiche die unter (3) genannte Abhandlung] geführt werden.

Erhalten nun während der $(\varphi+1)^{\text{ten}}$ Phase die ersten λ -Stäbe von den erwähnten μ -Stäben wirklich neue bleibende Längenänderungen, so handelt es sich um die Auflösung des Gleichungssystems:

$$c_i \Delta v_i^{(\varphi+1)} + \sum q_{ik} \Delta v_k^{(\varphi+1)} = \Delta B_i^{(\varphi+1)}, \quad (i = 1, 2, \dots, \lambda) \quad (7)$$

welches aus (5) durch Einsetzen von $\Delta S_i = c_i \Delta v_i$ hervorgeht. Natürlich muß hiebei Δv_i ($i = 1, 2, \dots, \lambda$) dasselbe Vorzeichen wie $S_i^{(\varphi)} = c_i v_i^{(\varphi)} + K_i$ bzw. wie $S_i^{(\varphi)} = c_i v_i^{(\varphi)} + K'_i$ am Ende der Phase (φ) besitzen. Dabei ist die zu der Matrix

$$\begin{pmatrix} q_{11} + c_1 & \dots & q_{1\lambda} \\ \dots & \dots & \dots \\ q_{\lambda 1} & \dots & q_{\lambda\lambda} + c_\lambda \end{pmatrix}$$

gehörende quadratische Form

$$J = \sum \sum q_{ik} v_i v_k + \sum c_i v_i^2$$

sicherlich „positiv definit“, d. h. wie immer die v auch gewählt werden, hat J einen positiven Wert und kann nur dann verschwinden, wenn alle v gleich Null sind. Denn wenn schon die erste Summe für von Null verschiedene v verschwinden

sollte, wird J wegen der zweiten Summe, die stets positiv sein muß, ebenfalls positiv werden. Es gibt demnach nach einem bekannten Satze der Algebra über lineare Gleichungssysteme zu allen Wertsystemen ΔB_i nur ein einziges lösendes System von Δv_k ; insbesondere gehört in diesem Falle zu „alle $\Delta B_i = 0$ “ auch alle $\Delta v_i = 0$ als einzige Lösung. Sind die Δv aus den Gleichungen (7) ermittelt, so gibt $\Delta S_i^{(\varphi+1)} = c_i \Delta v_i^{(\varphi+1)}$ die Stabkräfte in den Stäben $i = 1, 2, \dots, \lambda$. Für die restlichen Stäbe gilt

$$\Delta S_j^{(\varphi+1)} = \Delta B_j^{(\varphi+1)} - \sum q_{jk} \Delta v_k^{(\varphi+1)} \quad (j = \lambda + 1, \lambda + 2, \dots, \mu)$$

wobei für die Stäbe $\lambda + 1, \lambda + 2, \dots, \mu$ $\Delta S_j^{(\varphi+1)}$ nicht dasselbe Vorzeichen wie $S_j^{(\varphi)}$ besitzen darf. Für die Stäbe $\mu + 1, \mu + 2, \dots, r$ muß schließlich

$$K'_i + c_i (v_i^{(\varphi)} + \Delta v_i^{(\varphi+\lambda)}) \leq S_i^{(\varphi)} + \Delta S_i^{(\varphi+1)} \leq c_i (v_i^{(\varphi)} + v_i^{(\varphi+1)}) + K_i$$

sein. Wir fügen noch hinzu, daß die Größen $-\sigma_i^{(\varphi)}$, die wir als „Zwangskräfte“ bezeichnen wollen und die durch

$$\sigma_i^{(\varphi)} = -\sum q_{ik} v_k^{(\varphi)}$$

gegeben sind, die Stabkräfte in dem vollkommen elastischen Tragwerk vorstellen, wenn die einzelnen Stäbe die bleibenden Längenänderungen $v_k^{(\varphi)}$ erfahren haben. Es gilt selbstverständlich auch

$$\Delta \sigma_i^{(\varphi+1)} = \sum q_{ik} \Delta v_k^{(\varphi+1)}$$

Wir zeigen nun, daß für unser System der dem Satze von *H. Bleich* analoge Satz für Systeme aus einem ideal-plastischen Baustoff wie folgt lautet:

Bei einem Fachwerk, bei welchem zwischen Stabkraft und Längenänderung der in Fig. 2 gekennzeichnete Zusammenhang besteht, werden sich bei einer beliebig veränderlichen Belastung nach hinreichend oftmaligen Belastungsänderungen bestimmte endliche Grenzwerte \bar{v} der bleibenden Längenänderungen einstellen, die sich bei weiteren Belastungsänderungen nicht mehr ändern, wenn nur für jeden Stab die Bedingung

$$B_i^{\max} - B_i^{\min} \leq K_i - K'_i$$

erfüllt ist. Dabei bedeuten B^{\max} und B^{\min} die Größt- und Kleinstwerte der Stabkräfte bei vollkommen elastischem Material. Es wird sich also nach Erreichen der bleibenden Längenänderungen \bar{v} das System wie ein Tragwerk aus einem vollkommen elastischen Baustoff verhalten.

Dieser Satz wird in ähnlicher Weise bewiesen, wie dies von dem Verfasser in der genannten Abhandlung für einen ideal-plastischen Baustoff geschehen ist. Ersetzen wir das Ungleichheitszeichen durch das Gleichheitszeichen, so muß der Satz auch für den Grenzfall

$$\bar{B}_i^{\max} - \bar{B}_i^{\min} = K_i - K'_i$$

Geltung haben; es ist sicher, daß er dann auch für die kleineren Werte $B_i^{\max} - B_i^{\min}$ gilt.

In der Fig. 3 sind an den Stellen 1, 2, \dots, r die Stabkräfte \bar{B}^{\max} und \bar{B}^{\min} aufgetragen. Ferner ist der Zustand am Ende der φ -ten Phase dargestellt; es

mögen in diesem Augenblick die Werte $B_i^{(\varphi)}$ vorliegen. Entsprechend den eben vorhandenen bleibenden Längenänderungen $v_i^{(\varphi)}$ möge das System der Zwangskräfte $\sigma_i^{(\varphi)}$ vorhanden sein. Die tatsächlichen Stabkräfte in dem vorgelegten Tragwerk sind dann durch $S_i^{(\varphi)} = B_i^{(\varphi)} - \sigma_i^{(\varphi)}$ gegeben. In der folgenden Phase $(\varphi + 1)$ werden nur jene Stäbe neue bleibende Längenänderungen $v_i^{(\varphi)} + \Delta v_i^{(\varphi+1)} = v_i^{(\varphi+1)}$ erhalten können, bei welchen $B_i^{(\varphi)}$ mit einer Grenze des Intervalles $\sigma_i^{(\varphi)} + c_i v_i^{(\varphi)} + K_i$ oder $\sigma_i^{(\varphi)} + c_i v_i^{(\varphi)} + K'_i$ zusammenfällt; dabei ist voraussetzungsgemäß die Größe dieses Intervalles

$$(\sigma_i^{(\varphi)} + c_i v_i^{(\varphi)} + K_i) - (\sigma_i^{(\varphi)} + c_i v_i^{(\varphi)} + K'_i) = K_i - K'_i = \bar{B}_i^{\max} - \bar{B}_i^{\min}.$$

Dies ist z. B. für den besonders dargestellten Stab j nur für die obere Grenze möglich, wo $\bar{B}_j^{\max} - (\sigma_j^{(\varphi)} + c_j v_j^{(\varphi)} + K_j) > 0$ ist, während die untere Grenze

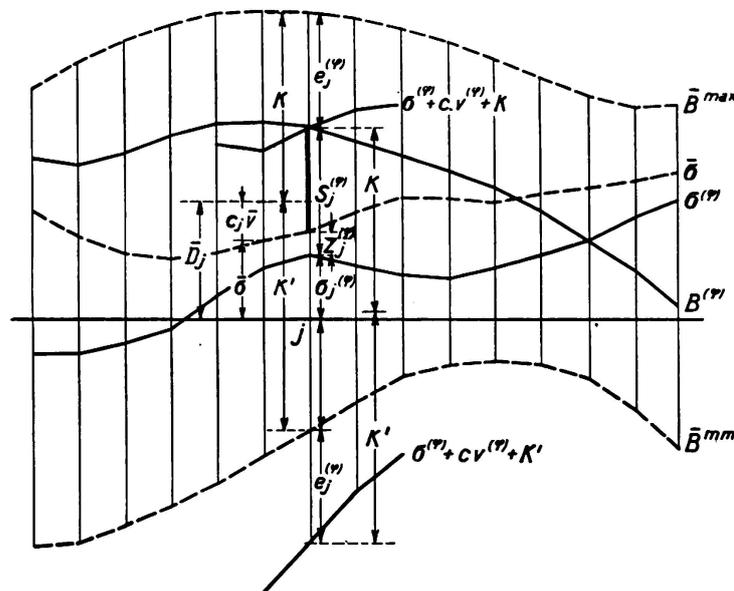


Fig. 3.

nicht von $B_j^{(\varphi)}$ erreicht werden kann. Demnach sind also in der $(\varphi + 1)$ Phase für den Stab j nur positive $\Delta v_j^{(\varphi+1)}$ möglich.

Es sei $\bar{\sigma}$ jenes System der Zwangskräfte, welches zu den schon erwähnten \bar{v} gehört, welches sich also nach hinreichend oftmaliger Belastungsänderung schließlich einstellen wird; aus der Fig. 3 ergibt sich dann ohne weiters für jeden Stab i

$$\bar{\sigma}_i + c_i \bar{v}_i = \bar{B}_i^{\max} - K_i = \bar{B}_i^{\min} - K'_i = \bar{D}_i.$$

Nachdem $\bar{\sigma}_i = \sum q_{ik} \bar{v}_k$ ist, erhält man für die \bar{v} das Gleichungssystem

$$c_i \bar{v}_i + \sum q_{ik} \bar{v}_k = \bar{D}_i$$

und nach den früheren Bemerkungen ist es sicher, daß dieses Gleichungssystem für beliebige Werte von \bar{D}_i eindeutige Lösungen \bar{v}_i besitzen muß. Es wird also ganz sicher ein solches System von \bar{v}_i und $\bar{\sigma}_i$ existieren. Betrachten wir schließlich noch den Wert $e_j^{(\varphi)}$, der sich gemäß der Abbildung mit

$$e_j^{(\varphi)} = \bar{D}_j - (\sigma_j^{(\varphi)} + c_j v_j^{(\varphi)})$$

rechnet und für den Stab j positiv ausfällt, so können wir folgende Alternative aufstellen:

entweder ist $\Delta v_i^{(\varphi+1)} > 0$, dann ist auch $e_i^{(\varphi)} > 0$ und am Ende der $(\varphi + 1)$ ten Phase auch $e_i^{(\varphi+1)} \geq 0$

oder es ist $\Delta v_i^{(\varphi+1)} < 0$, dann ist auch $e_i^{(\varphi)} < 0$ und am Ende der $(\varphi + 1)$ ten Phase auch $e_i^{(\varphi+1)} \leq 0$.

Unser Satz ist offenbar bewiesen, wenn wir zeigen, daß bei hinreichend oftmaligen Belastungsänderungen, etwa nach dem Ablauf von ε Phasen, $e^{(\varphi+\varepsilon)} = \bar{e} = 0$ für alle Stäbe verschwinden muß. Denn wenn dies für alle Stäbe zutrifft, kann die Stabkraft S_i die Grenzen des Intervalles

$$\bar{\sigma}_i + c_i \bar{v}_i + K_i \leq S_i \leq \bar{\sigma}_i + c_i \bar{v}_i + K_i,$$

die dann mit \bar{B}_i^{\max} und \bar{B}_i^{\min} zusammenfallen, nicht mehr überschreiten. Um nun zu zeigen, daß $e_i^{(\varphi)}$ bei wachsendem φ für alle Stäbe gegen Null strebt, setzen wir

$$\bar{v}_i - v_i^{(\varphi)} = w_i^{(\varphi)}$$

ferner

$$\bar{\sigma}_i - \sigma_i^{(\varphi)} = z_i^{(\varphi)},$$

so daß also $\Delta w_i^{(\varphi+1)} = w_i^{(\varphi+1)} - w_i^{(\varphi)} = -\Delta v_i^{(\varphi+1)}$

und $\Delta z_i^{(\varphi+1)} = z_i^{(\varphi+1)} - z_i^{(\varphi)} = -\Delta \sigma_i^{(\varphi+1)}$

wird und wegen der Gleichungssysteme

$$\sum q_{ik} \bar{v}_k = \bar{\sigma}_i \text{ und } \sum q_{ik} v_k^{(\varphi)} = \sigma_i^{(\varphi)}$$

auch das System

$$\sum q_{ik} w_k^{(\varphi)} = z_i^{(\varphi)} \text{ und } \sum q_{ik} \Delta w_k^{(\varphi+1)} = \Delta z_i^{(\varphi+1)}$$

besteht. Betrachten wir die quadratische Form

$$J^{(\varphi)} = \sum (z_i^{(\varphi)} + c_i w_i^{(\varphi)}) w_i^{(\varphi)} = \sum \sum q_{ik} w_i^{(\varphi)} w_k^{(\varphi)} + \sum c_i w_i^{(\varphi)^2}$$

welche nach Früherem für beliebige Werte von w stets positiv wird und nur für alle $w = 0$ verschwinden kann, ferner $J^{(\varphi+1)}$ am Ende der $(\varphi + 1)$ ten Phase

$$J^{(\varphi+1)} = \sum (z_i^{(\varphi+1)} + c_i w_i^{(\varphi+1)}) w_i^{(\varphi+1)}$$

so wird die Änderung von J während der $(\varphi + 1)$ ten Phase

$$\begin{aligned} \Delta J^{(\varphi+1)} &= \sum [(z_i^{(\varphi+1)} + c_i w_i^{(\varphi+1)}) w_i^{(\varphi+1)}] - (z_i^{(\varphi)} + c_i w_i^{(\varphi)}) w_i^{(\varphi)} \\ &= \sum z_i^{(\varphi)} \Delta w_i^{(\varphi+1)} + \Delta z_i^{(\varphi+1)} w_i^{(\varphi)} + \Delta z_i^{(\varphi+1)} \Delta w_i^{(\varphi+1)} \\ &\quad + c_i (2 w_i^{(\varphi)} + \Delta w_i^{(\varphi+1)} + \Delta w_i^{(\varphi+1)^2}) \end{aligned}$$

Nun ist aber $\sum z_i^{(\varphi)} \Delta w_i^{(\varphi+1)} = \sum \Delta z_i^{(\varphi+1)} w_i^{(\varphi)}$, wie man leicht bestätigt findet, wenn man $z_i^{(\varphi)} = \sum q_{ik} w_k^{(\varphi)}$ und $\Delta z_i^{(\varphi+1)} = \sum q_{ik} \Delta w_k^{(\varphi+1)}$ einsetzt, wodurch in beiden Fällen die bilineare Form $\sum \sum q_{ik} w_i^{(\varphi)} \Delta w_k^{(\varphi+1)}$ entsteht, so daß also

$$\Delta J^{(\varphi+1)} = \sum [2 z_i^{(\varphi)} + \Delta z_i^{(\varphi+1)} + c_i (2 w_i^{(\varphi)} + \Delta w_i^{(\varphi+1)})] \Delta w_i^{(\varphi+1)}$$

wird. Schließlich ist

$$z_i^{(\varphi)} = \bar{\sigma}_i - \sigma_i^{(\varphi)} = (\bar{D}_i - c_i \bar{v}_i) - (\bar{D}_i - c_i v_i^{(\varphi)} - e_i^{(\varphi)}) = e_i^{(\varphi)} - c_i w_i^{(\varphi)}$$

und ebenso

$$z_i^{(\varphi+1)} = e_i^{(\varphi+1)} - c_i w_i^{(\varphi+1)},$$

demnach

$$\Delta J^{(\varphi+1)} = - \sum (e_i^{(\varphi+1)} + e_i^{(\varphi)}) \Delta v_i^{(\varphi+1)}.$$

Da aber $e_i^{(\varphi+1)}$ und $e_i^{(\varphi)}$ dasselbe Vorzeichen wie $\Delta v_i^{(\varphi+1)}$ haben müssen, wird $\Delta J^{(\varphi+1)}$ stets negativ sein. Mithin wird der Ausdruck für J , der immer positiv ist, von Phase zu Phase stets abnehmen, und nur, wenn alle Stäbe dieselbe Längenänderung während einer Phase behalten, unverändert bleiben. Nach Ablauf einer hinreichenden Anzahl von Phasen muß demnach J gleich Null werden. Dies verlangt aber unbedingt $w^{(\varphi+\varepsilon)} = 0$, also $v^{(\varphi+\varepsilon)} - \bar{v} = 0$, demnach auch $\bar{\sigma} - \sigma^{(\varphi+\varepsilon)} = 0$. Es stellt sich sonach tatsächlich ein System von Zwangskräften ein, bei welchem die bleibenden Längenänderungen sich nicht mehr ändern können und das Tragwerk verhält sich von nun an wie ein solches aus einem vollkommen elastischen Material.

Verglichen mit Tragwerken aus einem ideal-plastischen Baustoff ergibt sich die bemerkenswerte Tatsache, daß es auf die Untersuchung von Zwangskraftsystemen überhaupt nicht ankommt. Es ist vielmehr in diesem Falle ausreichend, wenn für jeden Stab die Bedingung $B^{\max} - B^{\min} \leq K - K'$ erfüllt ist. Ferner ist es wegen des Gliedes $c_i w_i^2$, das in der quadratischen Form vorkommt, unmöglich, daß semi-definite Formen auftreten, die, wie bei dem ideal-plastischen Baustoff gesonderte Untersuchungen hinsichtlich der Eindeutigkeit der Lösungen notwendig machen. Es ist vielmehr sicher, daß zu jedem endlichen Wert $\bar{\sigma} - \sigma^{(\varphi)}$ auch nur endliche, eindeutige $\bar{v} - v^{(\varphi)}$ gehören können. Natürlich ist es eine andere Frage, ob die schließlich auftretenden Gesamtänderungen \bar{v} nicht bereits unzulässige Werte erreichen und vielleicht jenseits der Bruchdehnung liegen, eine Frage, die ebenso auch bei dem ideal-plastischen Baustoff gestellt werden kann. Ihre Beantwortung in allgemeiner Form ist recht schwierig.

Zusammenfassung.

Nach einem kurzen Überblick über die wichtigsten bisherigen Arbeiten wird im Teil A ein allgemeiner Beweis eines Satzes von H. Bleich für Fachwerke aus ideal-plastischem Baustoff gebracht. Dieser Satz, der die Grundlage für die Dimensionierung statisch unbestimmter Systeme bildet und der unter dem Namen „Traglastverfahren“ z. T. in behördlichen Vorschriften Aufnahme gefunden hat, stützt sich im wesentlichen auf die Tatsache, daß eine bestimmte positive quadratische Form stets nur abnehmen kann, demnach einmal Null werden muß. Über die bekannten Ergebnisse hinaus werden aber gewisse Einschränkungen für die Gültigkeit des erwähnten Satzes aufgestellt, die darin bestehen, daß gewisse Belastungsfälle ausgeschlossen werden müssen, sobald das System vollkommen elastisch geworden ist, es sei denn, daß man diese Belastungsfälle auf eine unendlich kurze Zeitdauer bei Annahme einer endlichen Fließgeschwindigkeit beschränkt. Im Teil B werden die Untersuchungen erweitert für ein Material mit linearem Verfestigungsbereich.