

# IVa. Flächentragwerke

Objektyp: **Group**

Zeitschrift: **IABSE congress report = Rapport du congrès AIPC = IVBH  
Kongressbericht**

Band (Jahr): **2 (1936)**

PDF erstellt am: **21.07.2024**

## **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern.

Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden.

Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

## **Haftungsausschluss**

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

## IV

Neuere Gesichtspunkte für die Berechnung und Konstruktion von Eisenbeton-, Hoch- und Brückenbauten.

Tendances actuelles dans le calcul et la construction des ponts et charpentes en béton armé.

Recent points of view concerning the calculation and design of bridge and structural engineering in reinforced concrete.

### IVa

Flächentragwerke.

Surfaces auto-portantes.

Walled structures.



Leere Seite  
Blank page  
Page vide

## IVa 1

Einführung in die allgemeine Theorie der biegungsfreien Schalen.

Etude des voiles minces courbes ne subissant pas de flexion.

Theory of Thin Curved Shells not Subjected to Bending.

Dr. ès sciences F. Aimond,

Ingénieur des Ponts et Chaussées détaché au Ministère de l'Air, Paris.

### 1. Hinweis auf die allgemeinen Gleichgewichtsbedingungen der Schalen in geradlinigen Koordinaten.

Die Gleichung der Oberfläche in geradlinigen, jedoch nicht unbedingt rechtwinkligen Koordinaten sei  $z = f(x, y)$ . Der Spannungszustand in einem Punkte  $m$  der Schale wird durch die Spannungen  $n_1, n_2, \Theta$  bestimmt, die auf die zu den Ebenen  $zox$  und  $zoy$  parallelen Schnitte  $mm_1$  und  $mm_2$  wirken. Auf den Schnitt  $mm_2$  wirkt  $n_1$  parallel zur Ebene  $zox$ , auf den Schnitt  $mm_1$  wirkt  $n_2$  parallel zu  $zoy$  und  $\Theta$  wirkt sowohl auf den Schnitt  $mm_1$  parallel zu  $zox$  als auch auf  $mm_2$  parallel zu  $zoy$ . Die Richtungskoeffizienten der Tangenten an die Schnitte  $mm_1$  und  $mm_2$ , also die in Richtung  $ox, oy, oz$  projizierten Einheitsvektoren jeder dieser Tangenten bezeichnen wir mit  $\alpha_1, \beta_1, \gamma_1$  und  $\alpha_2, \beta_2, \gamma_2$ . Wir denken uns nun die Schale beliebig belastet. Dann sind  $X \cdot dx \cdot dy, Y \cdot dx \cdot dy, Z \cdot dx \cdot dy$  die Komponenten der aufgebrachten Last, die in den Richtungen  $ox, oy, oz$  auf das Element  $mm_1 m' m_2$  wirken, das parallel zur Ebene  $zox$  durch  $mm_1$  und  $m_2 m'$  und parallel zur Ebene  $zoy$  durch  $mm_2$  und  $m_1 m'$  begrenzt wird. Die Untersuchung der Gleichgewichtsbedingungen für diese Schnitte führt zu folgenden Gleichungen:

$$\frac{\delta v_1}{\delta x} + \frac{\delta \theta}{\delta y} = X \quad (1)$$

$$\frac{\delta \theta}{\delta x} + \frac{\delta v_2}{\delta y} = Y \quad (2)$$

$$r \cdot v_1 + 2s\theta + t v_2 = \zeta \quad (3)$$

Dabei bedeutet

$$p = \frac{\delta f}{\delta x}; \quad q = \frac{\delta f}{\delta y}; \quad r = \frac{\delta^2 f}{\delta x^2}; \quad s = \frac{\delta^2 f}{\delta x \cdot \delta y}; \quad t = \frac{\delta^2 f}{\delta y^2};$$

$$\zeta = Z - p \cdot X - q \cdot Y;$$

$$v_1 = n_1 \cdot \frac{\alpha_1}{\beta_2}; \quad v_2 = n_2 \cdot \frac{\beta_2}{\alpha_1}.$$

## 2. Geometrische Deutung der in den allgemeinen Gleichgewichtsbedingungen enthaltenen Größen.

Die Größe  $\zeta$  im zweiten Glied der Gleichung (3) ist die schiefe Projektion des Vektors  $(X, Y, Z)$  auf  $oz$ , wobei diese Projektion parallel zu der an die Oberfläche gelegten Tangentialebene erfolgt. Zur Deutung der Größen  $\nu_1, \nu_2$  und  $\Theta$ , die die Unbekannten in den Gleichgewichtsbedingungen sind, soll allgemein der Begriff der reduzierten Spannung definiert werden. Die an einem Bogenelement angreifende reduzierte Spannung ist die Projektion der an diesem Element angreifenden Kraft auf die  $xy$ -Ebene, dividiert durch die projizierte Länge des zugehörigen Elementes. Es läßt sich einfach feststellen, daß der Zusammenhang zwischen den in einem Punkt wirksamen reduzierten Spannungen denselben Gesetzen folgt wie bei den wirklichen Spannungen und im Besonderen, daß auch die *Mohr'sche* Darstellung auf sie anwendbar ist. Die Größen  $\nu_1, \nu_2, \Theta$  entsprechen den durch Parallelprojektion auf die  $x$  und  $y$ -Achse entstandenen reduzierten Spannungen, die zu den Schnitten gehören. Die Schubspannungen  $\Theta$  bleiben in der Projektion erhalten, während dies für die Spannungsgrößen  $n_1$  und  $n_2$  nicht der Fall ist.

## 3. Geometrische Deutung der Gleichgewichtsbedingungen.

Die Gleichungen (1) und (2) drücken augenscheinlich das Gleichgewicht in der Projektion auf die Tangentialebene aus. Die Gleichung (3) dagegen gibt das Gleichgewicht der normal zur Schale wirkenden Kräfte wieder. Um sie geometrisch zu deuten, legen wir den Ursprung  $O$  des Dreiflächners  $oxyz$  auf die Oberfläche und richten  $ox$  und  $oy$  nach den Richtungen von zwei willkürlich gewählten Schnitten. Der Dreiflächner  $oxyz$  wird nun vollends bestimmt, wenn man eine Annahme über die Richtung  $oz$  trifft. Die Gleichung (3) gibt den linearen Zusammenhang zwischen den Spannungen, welche auf die willkürlich gewählten Schnitte  $ox$  und  $oy$  wirken und der parallel zur Tangentialebene auf  $oz$  erfolgten Projektion  $\zeta$  der Dichte der aufgebrachten Last. Solange man bei festgehaltenem  $ox$  und  $oy$  die Richtung von  $oz$  ändert, ist nur jeder einzelne Ausdruck der linearen Gleichung mit demselben Faktor zu multiplizieren.

Man kann die Unbestimmtheit der Richtungen der Schnitte  $ox$  und  $oy$  zur Vereinfachung der Gleichung (3) benutzen. Richtet man nämlich diese Schnitte nach zwei konjugierten Richtungen der Oberfläche aus (konjugierte Richtungen im Verhältnis zur Indikatrix), so verschwindet der Koeffizient  $\Theta$  und die Gleichung (3) reduziert sich zu einer linearen Gleichung zwischen den Längsspannungen  $\nu_1$  und  $\nu_2$ . Man kann sich nun fragen, ob es nicht möglich ist, die Schnitte  $ox$  und  $oy$  so zu orientieren, daß in der Gleichung (3) überhaupt nur noch eine einzige Spannungsgröße verbleibt. Man sieht aber sofort, daß dies nicht möglich ist, solange die Oberfläche konvex ist, d. h. also, solange die Hauptkrümmungsradien von gleichem Sinn sind. Wenn die Oberfläche nicht konvex ist, wird dies im Gegensatz hierzu jedoch möglich.

Wenn wir uns mit der letzteren Annahme beschäftigen, so sind zwei Fälle zu unterscheiden, je nachdem ob die in der Gleichung (3) verbleibende Spannung eine Längsspannung oder eine Schubspannung  $\Theta$  ist. Der erste Fall ist nur dann möglich, wenn die Oberfläche abwickelbar ist, d. h. also, wenn man sie als die

Umhüllende einer Gruppe von Tangentialebenen auffassen kann, die von einem Parameter abhängen. Legt man den Schnitt  $ox$  in die Richtung der geradlinigen Erzeugenden, die durch  $O$  geht, so vereinfacht sich die Gleichung (3) zu

$$r \cdot v_1 = \zeta \quad (4)$$

Der zweite Fall bezieht sich auf die Oberflächen mit gegensätzlichen Krümmungen. Legt man  $ox$  und  $oy$  in die Richtung der Asymptoten, so vereinfacht sich die Gleichung (3) zu

$$2 \cdot s \cdot \Theta = \zeta \quad (5)$$

Die Gleichungen (4) und (5) sind einfach zu deuten. Betrachten wir zunächst Gleichung (4). Man sieht sofort, daß von den an einem unendlich kleinen Element der Fläche angreifenden Schnittkräften nur  $v_1$  eine Komponente ergibt, die nicht in der Tangentialebene liegt, und Gleichung (4) drückt nur die Gleichheit zwischen den parallel zur Tangentialebene erfolgten Projektionen der Spannungen  $n_1$  auf  $oz$  und der unter den gleichen Bedingungen erfolgten Projektion der aufgetragenen Last aus.

Nun zur Deutung der Gleichung (5): Es genügt hierfür, ein viereckiges Element zu betrachten, von dem zwei Seiten durch Asymptotenlinien gebildet werden, die sich in  $O$  kreuzen. Die Resultierende der an dem Viereck angreifenden Längsspannungen  $n_1$  und  $n_2$  liegt in der Tangentialebene. Diese Resultierende ist ja nur die geometrische Summe der Spannungsresultanten  $n_1$  und  $n_2$ , und jede dieser Spannungsresultanten liegt notwendigerweise innerhalb der Berührungsebene einer Asymptotenlinie, welche infolge der Definition der Asymptoten mit der Tangentialebene zusammenfallen muß. Die außerhalb der Tangentialebene liegende Komponente  $\zeta$  der auf die Oberfläche aufgetragenen Lasten hängt also nur von der Schubspannung  $\Theta$  ab und sie ist dieser auch direkt proportional. Der Proportionalitätskoeffizient hat den Wert  $2s$  und ist einfach geometrisch zu deuten. Er ist der Quotient aus dem doppelten Abstand der  $O$  gegenüberliegenden Ecke des Viereckes von der Tangentialebene durch  $O$ , parallel zur Richtung  $oz$  gemessen, dividiert durch das Produkt der Seitenlängen der Asymptotenlinien, welche das Viereck bilden.

#### 4. Einteilung der Schalen in Bezug auf ihre mechanischen Eigenschaften.

Die vorstehenden Betrachtungen führen zu einer Einteilung der Schalen in drei Gruppen. Die erste Gruppe umfaßt die abwickelbaren Oberflächen, wie Zylinder und Kegel. Die zweite Gruppe umschließt die konvexen Oberflächen, wie die Kugel, die elliptischen Paraboloiden, die Ellipsoide, die zweischaligen Hyperboloide und ganz allgemein alle doppelt gekrümmten Flächen, die durch eine nach unten konkave Kurve erzeugt werden, wenn diese auf einer Leitlinie mit ebenfalls nach unten konkaver Krümmung gleitet. Die dritte Gruppe umgrenzt die gegensätzlich gekrümmten Flächen, wie die hyperbolischen Paraboloiden, die einschaligen Hyperboloide, die Konoide, alle nicht abwickelbaren regelmäßigen Flächen und ganz allgemein alle Flächen, die durch eine nach oben konkave Kurve erzeugt werden können, wenn sie auf einer nach unten konkaven Leitlinie gleitet.

Zu dieser Einteilung wird man durch die geometrische Deutung der Gleichung (3) geführt. In der ersten Gruppe findet man jene Schalen, für welche die

Gleichung (3) in die Form der Gleichung (4) gebracht werden kann. Für die zweite Gruppe kann Gleichung (3) in folgende Form gebracht werden:

$$r \cdot v_1 + t \cdot v_2 = \zeta \quad (6)$$

wobei  $r$  und  $t$  vom gleichen Vorzeichen sind. Die Schalen der dritten Gruppe sind jene, für welche die Gleichung (3) in die Form (5) übergeführt werden kann.

Wir bemerken, daß für die Schalen der dritten Gruppe die Gleichung (3) ebenfalls in die der Gleichung (6) übergeführt werden kann; in diesem Falle sind jedoch  $r$  und  $t$  von verschiedenem Vorzeichen. Außerdem kann noch für die Schalen der zweiten Gruppe die Gleichung (3) die Form der Gleichung (5) annehmen, wobei wiederum  $\Theta$  die Schubspannung in den Asymptotenlinien bedeutet. In diesem Falle sind jedoch  $s$  und  $t$  imaginäre Ausdrücke und die Gleichung (5) stellt nicht mehr eine Bezeichnung zwischen reellen Größen dar.

Die Schalen der ersten Gruppe sind durch die Eigenschaft gekennzeichnet, daß die normal zu den geradlinigen Erzeugenden wirkende Komponente des Spannungszustandes in jedem Punkte proportional zur Normalkomponente der Dichte der aufgebrachten Last ist. Die Schalen der zweiten Gruppe sind durch die Eigenschaft gekennzeichnet, daß der rein imaginäre Schubspannungszustand, der auf die in den imaginären Asymptotenlinien liegenden Elemente wirkt, in jedem Punkte proportional zur Normalkomponente der Dichte der aufgebrachten Last ist. Die Schalen der dritten Gruppe zeichnen sich durch die Eigenschaft aus, daß der Schubspannungszustand, der auf die in den Asymptotenlinien liegenden Elemente wirkt, in jedem Punkte proportional zur Normalkomponente der Dichte der aufgebrachten Last ist.

Zwischen den Schalen der zweiten und dritten Gruppe kann man noch folgenden Unterschied beobachten: Wenn man an einem beliebigen Punkte die an zwei konjugierten Schnitten angreifenden Längsspannungen betrachtet, so kann man die Normalkomponente der aufgebrachten Last, die ein linearer Ausdruck dieser Längsspannungen ist, als den durch diese Längsspannungen hervorgerufenen, nach außen wirkenden Druck betrachten. Dieser Ausdruck enthält bei den Schalen der zweiten Gruppe Koeffizienten gleichen Vorzeichens und bei den Schalen der dritten Gruppe Koeffizienten von verschiedenem Vorzeichen. Daraus folgt, daß man bei den Schalen der zweiten Gruppe sich die Tragfähigkeit durch die auf zwei konjugierte Schnitte wirkenden gleichsinnigen Längsspannungen erzeugen denken kann. Bei einer Schale der dritten Gruppe dagegen denkt man sich die Tragfähigkeit in analoger Weise durch die auf zwei konjugierte Schnitte wirkenden gegensinnigen Längsspannungen erzeugt.

Handelt es sich um eine Schale der zweiten Gruppe, so kann man immer jene konjugierten Schnitte auswählen, die symmetrisch im Verhältnis zu den Hauptrichtungen liegen. Die zugehörigen Längsspannungskoeffizienten, die in dem linearen Ausdruck die Normalkomponente der Dichte der aufgebrachten Last darstellen, sind gleich. Man kann also sagen, daß bei den Schalen der zweiten Gruppe die Normalkomponente der Dichte der aufgebrachten Last proportional zu der Summe der Längsspannungen ist, welche auf die zu den Hauptrichtungen symmetrisch liegenden konjugierten Schnitte wirken.

Die Verschiedenheit der Eigenschaften, welche, wie wir gesehen haben, die Schalen der drei Gruppen unterscheidet, hat einen entscheidenden Einfluß auf die Art der Stützung, welche man den Schalen an ihren Rändern geben kann, um die Gleichgewichtsbedingungen zu erfüllen und desgleichen auch auf die Art der Berechnung der Spannungen, die wiederum eine Funktion der Randstützung sind.

##### 5. Untersuchung der Schalen der ersten Gruppe.

Das Studium der Schalen der ersten Gruppe kommt einer Verallgemeinerung der Untersuchung des Zylinders gleich. Die Gleichung (4) gibt für einen beliebigen Punkt der Schale jene Komponente des Spannungszustandes an, die normal zu der an diesem Punkt getroffenen geradlinigen Erzeugenden steht. Zieht man also auf der Oberfläche eine Gruppe von geodätischen Linien, die die verschiedenen geradlinigen Erzeugenden unter einem konstanten Winkel schneiden, so kennt man die Längsspannungen, die parallel zu diesen geodätischen Linien auf die geradlinigen Erzeugenden wirken. Aus Gleichung (2) erhält man durch eine Integration sofort den Wert der Schubspannung an den Erzeugenden und geodätischen Linien und durch eine weitere Integration erhält man aus Gleichung (1) die Längsspannungen, die auf die geodätischen Linien parallel zu den Erzeugenden wirken.

Der auf diese Weise bestimmte Spannungszustand ist erst dann vollständig, wenn man auf einer bestimmten Kurve, die jede Erzeugende nur ein einziges Mal trifft, eine Annahme über die Werte der auf die Schnittelemente dieser Kurve wirkenden Spannungen trifft. Man kann übrigens auch auf zwei Kurven, von denen beide jede Erzeugende nur ein einziges Mal schneiden, eine Annahme über den Zusammenhang zwischen den Komponenten des Spannungszustandes treffen, der auf jedes Schnittelement der beiden Kurven wirkt.

##### 6. Studium der Schalen der zweiten Gruppe.

Wir betrachten nun eine Schale der zweiten Gruppe. Wir haben schon gesehen, daß die Normalkomponente der Dichte der aufgebrachten Last an jedem Punkt proportional der Summe der Längsspannungen ist, die auf die zu den Hauptrichtungen symmetrisch liegenden konjugierten Schnitte wirken. Wir setzen nun voraus, daß diese Längsspannungen gleich seien. Dann ist ihr Wert in jedem Punkt durch die Größe der Normalkomponente der Dichte der Last bestimmt. Damit haben wir die Gleichung (3) erfüllt. Die Gleichungen (1) und (2), welche das Gleichgewicht in der Tangentialebene ausdrücken, sind allerdings erst dann erfüllt, wenn die Tangentialkomponente der Dichte der Last einen bestimmten Wert hat, welchen man dadurch erhält, daß man die Gleichgewichtsbedingungen parallel zur Tangentialfläche genau anschreibt. Wir wollen nun jedes Lastsystem mit „Grundsystem“ bezeichnen, das den vorgenannten Bedingungen entspricht, d. h. also, wenn gleich große Längsspannungen an den zu den Hauptrichtungen symmetrisch liegenden konjugierten Schnitten angreifen. Ein beliebiges Lastsystem kann man sich dann aus einem Grundsystem und einem zusätzlichen System zusammengesetzt denken, wobei das letztere nur Tangentialkräfte enthält und als das zu dem Grundsystem komplementäre Lastsystem bezeichnet wird.

Man wird dabei nun zu dem Studium der komplementären Systeme geführt, d. h. also jener Systeme, bei welchen die aufgebrachte Last tangential zur Oberfläche wirkt. Bei solchen Systemen sind die Längsspannungen, welche auf die symmetrisch zu den Hauptrichtungen liegenden konjugierten Schnitte wirken, gleich groß. Der Spannungszustand an einem beliebigen Schnitt hängt also nur von zwei Parametern ab, z. B. von den Komponenten des Spannungszustandes, die auf einen der beiden konjugierten Schnitte einwirken. Es ist augenfällig, daß man diese beiden Parameter beliebig wählen kann. Man sieht leicht, daß man zwei unbestimmte konjugierte Funktionen  $\varphi$  und  $\psi$  so bestimmen kann, daß die an einem beliebigen Element der Oberfläche angreifenden Kräfte eine lineare Form der Differentialausdrücke  $S_\varphi \cdot d\psi$  und  $S_\psi \cdot d\varphi$  ergeben, wenn man als Parameter zwei Größen wählt, die wir mit  $S_\varphi$  und  $S_\psi$  bezeichnen wollen. Die Gleichgewichtsbedingungen in der Tangentialebene zeigen dann, daß die partielle Ableitung von  $S_\varphi$  nach  $\varphi$  und die partielle Ableitung von  $S_\psi$  nach  $\psi$  lineare Funktionen von  $S_\varphi$  und  $S_\psi$  sind. Eliminiert man einen der beiden Parameter, z. B.  $S_\psi$  aus den beiden Gleichungen, so erhält man eine lineare partielle Differentialgleichung zweiter Ordnung mit unbestimmten Variablen, welcher Gleichung der noch enthaltene Parameter  $S_\varphi$  genügen muß.

Um eine Lösung dieser Gleichung zu erhalten, kann man den Wert von  $S_\varphi$  und einer Ableitung davon auf einer beliebig auf der Oberfläche gewählten Kurve annehmen, natürlich unter der Bedingung, daß gewisse analytische Bedingungen erfüllt sind, die damit zusammenhängen, daß es sich um eine Gleichung mit unbestimmten Variablen handelt. Da man mit Hilfe der längs einer Kurve angenommenen Werte von  $S_\varphi$  und einer Ableitung davon längs dieser Kurve  $S_\varphi$  und  $S_\psi$  bestimmen kann und damit auch den gesamten Spannungszustand für ein beliebiges Element dieser Kurve, so sieht man, daß man den gesamten Spannungszustand in der Schale erhält, sobald man die Spannungen längs einer Kurve kennt, immer unter der Voraussetzung, daß gewisse analytische Bedingungen erfüllt sind.

Diese analytischen Bedingungen sind nicht nur eine reine Formsache, sie entsprechen folgender physikalischer Tatsache: Man weiß, daß bei allen Problemen, wo eine Gleichung mit unbestimmten Variablen durch die Werte bestimmt ist, welche eine diese Gleichung befriedigende Funktion und eine Ableitung davon längs einer gegebenen Kurve annimmt, die Lösung keine stetige Funktion der Anfangswerte ist. Wenn man die eingesetzten Werte nur wenig ändert, so kann man an beliebigen Punkten beliebig große Werte der Funktion erhalten. Daraus ergibt sich, daß bei einer konvexen Schale die zu den längs einer Kurve gegebenen Spannungswerten gehörigen Gleichgewichtszustände im Verhältnis zu diesen Spannungswerten nicht stabil sind.

Um zu stabilen Lösungen zu kommen, muß man andere Grenzbedingungen untersuchen als die bisher angenommenen. Statt daß man eine Annahme über den Spannungszustand längs einer Kurve trifft, nehmen wir auf einer bestimmten Kurve einen Zusammenhang zwischen den Komponenten des auf die Elemente dieser Kurve wirkenden Spannungszustandes an. In diesem Falle ist das Problem eindeutig und seine Lösung eine stetige Funktion der angenommenen Größen. Der zugehörige Gleichgewichtszustand wird ebenfalls stabil sein. Wir wollen z. B. annehmen, daß die Normalkomponente des Spannungszustandes längs der



gegebenen Kurve Null sei. Mit Hilfe der relativen Unbestimmtheit der Parameter  $S_\varphi$  und  $S_\psi$  kann man diese so bestimmen, daß  $S_\varphi$  der Normalkomponente des Spannungszustandes längs der gegebenen Kurve entspricht. Die Theorie der Differentialgleichungen erlaubt eine Bestimmung der Funktion  $S_\varphi$  nach einer ähnlichen Methode, wie sie von *Fredholm* und seinen Nachfolgern zur Lösung ähnlich geformter Gleichungen mit unbestimmten Variablen angewandt wurde.

### 7. Studium der Schalen der dritten Gruppe.

Wir betrachten nun eine Schale der dritten Gruppe. Der Wert der Normalkomponente der Dichte der Last bestimmt in erster Linie den Schubspannungszustand für die in den Asymptotenlinien liegenden Schnitte. Wir wollen voraussetzen, daß der Spannungszustand in der Schale nur aus diesen Schubspannungen bestehe. Hierzu ist nur nötig und auch genügend, daß die Tangentialkomponente der an einem zwischen den Asymptotenlinien liegenden Viereck angebrachten Last in Gleichgewicht mit der Resultante der auf die Tangentialebene projizierten Tangentialbeanspruchungen steht. Wir wollen nun jedes Lastsystem, das den vorstehenden Bedingungen genügt, daß der an den Schnitt-Elementen der Asymptotenlinien angreifende Spannungszustand nur aus Schubspannungen besteht, als Grundsystem bezeichnen. Es ist nun leicht einzusehen, daß man sich jedes beliebige Lastsystem durch eine Superposition aus einem Grundsystem und einem anderen System, das wir Komplementärsystem nennen wollen, entstanden denken kann.

Wir werden hierdurch zum Studium der Komplementärsysteme geführt. Wir erinnern uns dabei, daß die an einem Schalenelement angreifende Schnittkraft als eine Linearkombination der Differentialausdrücke  $S_\varphi \cdot d\psi$  und  $S_\psi \cdot d\varphi$  dargestellt werden kann, wobei  $\varphi$  und  $\psi$  jetzt zwei reelle Funktionen sind und  $S_\varphi$  und  $S_\psi$  zwei reelle Parameter. Die Gleichgewichtsbedingungen in der Tangentialebene erlauben es nun, die partiellen Ableitungen von  $S_\varphi$  nach  $\varphi$  und von  $S_\psi$  nach  $\psi$  als lineare Funktionen von  $S_\varphi$  und  $S_\psi$  auszudrücken. Die Elimination von  $S_\psi$  führt zu einer linearen Differentialgleichung zweiter Ordnung von  $S_\varphi$  mit reellen Variablen. Die Variablen dieser Differentialgleichung stellen die Asymptotenlinien dar.

Um eine Lösung der vorstehenden Gleichung zu erhalten, die für den durch den Rand C begrenzten Bereich D gültig ist, zerlegen wir diesen Rand in zwei Folgen von Bogenstücken  $\Gamma$  und  $\Gamma'$  derart, daß die von jedem Punkt des Bereiches D ausstrahlenden Asymptotenlinien  $\Gamma$  nur ein einziges Mal treffen. Jetzt unterteilen wir noch  $\Gamma$  in zwei Folgen von Bogenstücken  $\Gamma_1$  und  $\Gamma_2$  derart, daß jeder gebrochene Zug von Asymptotenlinien, der irgend einen Punkt von  $\Gamma_1$  mit einem Punkt von  $\Gamma'$  verbindet, seine dazwischenliegenden Ecken auf  $\Gamma_2$  oder  $\Gamma'$  hat und gleichzeitig noch die Bedingung erfüllt ist, daß kein gebrochener Zug von Asymptotenlinien möglich ist, der seine Enden auf  $\Gamma_1$  und seine dazwischenliegenden Ecken auf  $\Gamma_2$  hat. Man wird eine für den Bereich D gültige eindeutige Lösung erhalten, wenn man auf  $\Gamma_1$  den Wert des auf die Schnittelemente  $\Gamma_1$  einwirkenden Spannungszustandes und auf  $\Gamma_2$  einen Zusammenhang zwischen den Komponenten des auf die Schnittelemente  $\Gamma_2$  wirkenden Spannungszustandes annimmt. Diese Lösung erhält man durch eine wiederholte Anwendung der *Riemann'schen* Formel auf die verschiedenen Unterbereiche des



Bereiches D. Hierbei sind keine besonderen analytischen Bedingungen zu erfüllen und die erhaltene Lösung ist immer eine stetige Funktion der Anfangswerte. Im allgemeinen gibt es jedoch keine Lösung, die zu einem Zusammenhang zwischen den Komponenten des auf die verschiedenen Schnittelemente der gegebenen Kurve C einwirkenden Spannungszustandes gehörte.

Ist die betrachtete Schale eine regelmäßige Fläche, so kann die partielle Differentialgleichung zweiter Ordnung auf eine lineare partielle Differentialgleichung erster Ordnung zurückgeführt werden, welche nur eine Ableitung enthält. Diese Gleichung kann integriert werden, da man sie als eine lineare Differentialgleichung auffassen kann. In dem Sonderfall der über einem Viereck errichteten regelmäßigen Flächen genügen zur Bestimmung der Parameter  $S_\varphi$  und  $S_\psi$  zwei Quadraturen.

### 8. Wahl der Stützungsarten bei den Schalen der dritten Gruppe.

Die Wahl der Stützungsarten hängt bei einer Schale wesentlich davon ab, zu welcher Gruppe sie gehört. Wir unterscheiden zwei Stützungsarten: die einfache Stützung, bei welcher die Stützkkräfte nur von einem Parameter abhängen, und die doppelte Stützung, bei welcher die Stützkkräfte von zwei Parametern abhängen. Die Spannungs-Komponenten, welche die Schale auf eine einfache Stützung überträgt, müssen infolgedessen einem schon im Voraus bekannten Zusammenhang genügen, während die Spannungs-Komponenten, welche auf eine doppelte Stützung einwirken, unabhängige Werte annehmen können. Übrigens können gewisse Randpartien der Schale auch ungestützt bleiben, so daß man einen freien Rand erhält.

Wir wollen nun untersuchen, wie man über den Rand einer Schale freie Ränder, einfache Stützungen und doppelte Stützungen verteilen kann, um noch einen eindeutigen und stabilen Gleichgewichtszustand zu erhalten.

Wir beschäftigen uns zuerst mit einer Schale der ersten Gruppe. Man kann einen freien Rand für jede Randpartie annehmen, die keine geradlinige Erzeugende enthält, und einmal oder mehrmals von jeder Erzeugenden geschnitten wird. Wenn der freie Rand von allen Erzeugenden geschnitten wird, ist die Verteilung der Spannungen innerhalb der Schale bestimmt und die anderen Ränder müssen doppelte Stützung erhalten. Der zugehörige Gleichgewichtszustand ist stabil. Nun nehmen wir zwei Ränder an, von denen jeder nur einmal alle Erzeugenden schneidet und einfach gestützt ist. Auch hier erhält man einen stabilen Gleichgewichtszustand der Schale, wenn man die übrigen Randpartien, welche nur noch Erzeugende enthalten, doppelt stützt.

Nun zu einer Schale der zweiten Gruppe. Hier sind keine freien Ränder möglich, da der zugehörige Gleichgewichtszustand nicht stabil wäre. Man kann aber den ganzen Rand der Schale einfach stützen. Der zugehörige Gleichgewichtszustand ist eindeutig und stabil.

Wenn wir nun eine Schale der dritten Gruppe betrachten und ihren Rand in drei Gattungen von Bogenstücken  $\Gamma_1$ ,  $\Gamma_2$  und  $\Gamma'$  unterteilen, die den Ausführungen des Abs. 7 entsprechen, so kann man längs  $\Gamma_1$  einen freien Rand, längs  $\Gamma_2$  einfache Stützung und längs  $\Gamma'$  doppelte Stützung annehmen. In diesem Falle erhält man einen eindeutigen und stabilen Gleichgewichtszustand.

### 9. Geometrische Eigenschaften und geometrische Berechnung der Schalen der dritten Gruppe.

Die Schalen der dritten Gruppe zeigen bemerkenswerte geometrische Eigenschaften, welche die Möglichkeit zu einer genauen graphischen Berechnung geben.

Es sollen zuerst die in Abs. 7 eingeführten Parameter  $S_\varphi$  und  $S_\psi$  und die Funktionen  $\varphi$  und  $\psi$  geometrisch gedeutet werden.  $S_\varphi$  und  $S_\psi$  sind die Längsspannungen, die bei einem komplementären Lastsystem auf die Asymptotenlinien einwirken.  $\varphi$  und  $\psi$  sind krummlinige Koordinaten der Fläche, für welche die Koordinatenlinien die Asymptotenlinien darstellen.

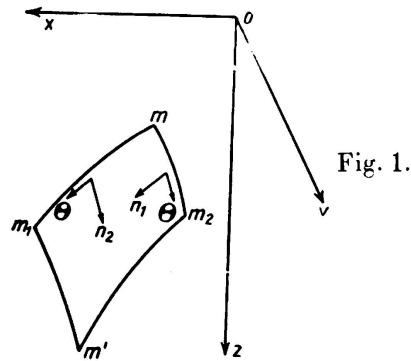
Wir ersetzen nun die Schale durch ein windschiefes Netz, dessen Maschen jene schiefwinkligen geradlinigen Vierecke sind, welche die Asymptotenlinien umgrenzen. Dieses System verhält sich gleich wie die gegebene Fläche und solange die Maschen genügend klein sind, kann man die beiden Systeme miteinander vertauschen. Die Lasten müssen an den Ecken dieses Netzwerkes tangential zur Oberfläche angebracht werden.

Die an einer beliebigen Ecke des Netzwerkes angreifende Einzellast  $F$  kann man nach den zwei Stabrichtungen von zwei verschiedenen Asymptotenlinien zerlegen, die sich in der betrachteten Ecke schneiden. Man überträgt damit die Last  $F$  nach zwei anderen Knotenpunkten der Fläche, wo man in derselben Weise verfährt und so fort. Ist nun der Rand der Fläche in drei Gattungen von Bogenstücken  $\Gamma_1$ ,  $\Gamma_2$  und  $\Gamma'$  entsprechend den im Vorstehenden angegebenen Bedingungen unterteilt und wählt man in passender Weise die beiden Anfangsstäbe, nach denen man die gegebene Kraft  $F$  zerlegt, so kann die Übertragung der Kraft  $F$  nach dem angegebenen Verfahren so erfolgen, daß kein freier Rand getroffen wird. Kommt man dabei zu einem einfach gestützten Rand  $\Gamma_2$ , so kann man hier die Zerlegung nach der Richtung des zweiten Stabes, welcher zu der auf  $\Gamma_2$  liegenden Ecke führt und nach der Richtung der Stützkraft vornehmen. Diesen Vorgang nennt man die Rückstrahlung an der einfachen Stützung. Wenn man in dieser Weise weiter fortfährt, überträgt man schließlich die Last  $F$  auf die doppelt gestützten Zonen. Man hat damit einen Gleichgewichtszustand des Systemes erhalten, der sich mit den Stützkraften verträgt, und damit also stabil ist. Wenn man in derselben Weise für jeden belasteten Knoten des Netzwerkes verfährt, bestimmt man durch eine einfache Zerlegung der Lasten nach der Parallelogrammregel den zu einem komplementären Lastsystem gehörigen Gleichgewichtszustand. Die zugehörige zeichnerische Darstellung kann leicht in der Projektion auf eine beliebige Ebene vorgenommen werden.

An Hand der eben besprochenen geometrischen Bestimmung des Kräfteverlaufes kann man sich das Gleichgewicht in einer Schale der dritten Gruppe als durch einen Kräftefluß in Richtung der Asymptotenlinien erzeugt denken, der von den freien Rändern ausstrahlt, an den einfachen Stützungen reflektiert wird, um an den doppelten Stützungen zu enden. Die gleiche Eigenschaft wird auch bei der Fortpflanzung von Wellen bei Erscheinungen beobachtet, die durch lineare partielle Differentialgleichungen zweiter Ordnung mit reellen Variablen bestimmt sind und wie diese hängt sie hauptsächlich damit zusammen, daß die Variablen der Gleichungen, die das Gleichgewicht der Spannungen in der betrachteten Schale bestimmen, reell sind.

### 10. Einfache Beispiele für Schalen der dritten Gruppe.

Das einfachste Beispiel einer Schale der dritten Gruppe liefert das hyperbolische Paraboloid. Diese Schale zeichnet sich durch die Eigenschaft aus, daß die Schubspannung längs der geradlinigen Erzeugenden, abgesehen von einem für die ganze Oberfläche nahezu konstanten Faktor, gleich der auf die Flächeneinheit der Projektion auf eine beliebige, nicht zur Achse parallele Ebene bezogenen Komponente der Last in Richtung der Achse des Paraboloids ist.



Andererseits pflanzen sich die aus dem Komplementärsystem der Lasten herrührenden Beanspruchungen längs der Erzeugenden fort, ohne andere Erzeugende in Mitleidenschaft zu ziehen. Die an einem kleinen Element der Schale angebrachte tangentiale Beanspruchung ist also nur in den durch die Erzeugenden gebildeten Streifen spürbar. Nach dem hyperbolischen Paraboloid ist die einfachste Schale der dritten Gruppe das einschalige Hyperboloid. Diese Schale hat mit dem Paraboloid die Eigenschaft gemein, daß die aus dem Komplementärsystem herrührenden Lasten sich längs einzelnen Erzeugenden fortpflanzen, ohne die anderen Erzeugenden in Mitleidenschaft zu ziehen. Sie unterscheidet sich von dem hyperbolischen Paraboloid nur durch den komplizierteren Faktor der Proportionalität zwischen der Schubspannung und der Dichte der aufgebrachten Last.

Nun zu den regelmäßigen, nicht abwickelbaren Flächen und in erster Linie zu den Konoiden. Für diese Flächen hat der Koeffizient der Proportionalität zwischen der Schubspannung auf die Asymptotenlinien und der Dichte der aufgebrachten Last eine bedeutend kompliziertere Form als für die zuerst betrach-

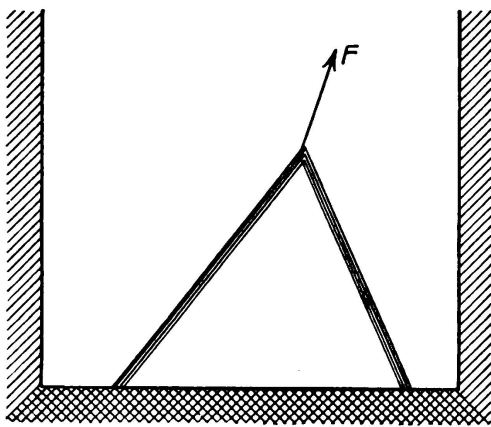


Fig. 2.

Fortpflanzungsart der Tangentialkräfte in einem Regelmäßigen Viereck.

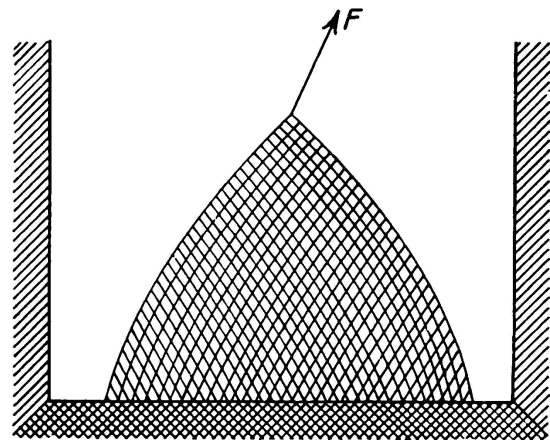


Fig. 3.

Fortpflanzungsweise der Tangentialkräfte in irgend einer Oberfläche der 3. Gruppe.

teten Flächen; sie zeichnen sich aber vor diesen Flächen dadurch aus, daß die aus dem Komplementärsystem herrührenden Kräfte sich bei der Fortpflanzung über die Oberfläche ausbreiten, wobei sich die krummen Asymptotenlinien auf die geradlinigen Erzeugenden der Fläche abstützen, so daß die an einem kleinen Element angreifende Tangentialkraft einen fächerförmigen Bereich der Oberfläche zur Mitwirkung heranzieht, genau wie bei den allgemeinsten Flächen der dritten Gruppe.

Die Fig. 2 und 3 zeigen den Unterschied zwischen den regelmäßigen über einem Viereck errichteten Flächen und den anderen Flächen der dritten Gruppe in Bezug auf den soeben besprochenen letzteren Punkt.

### 11. *Schlußfolgerungen.*

Wenn man von den regelmäßigen abwickelbaren Flächen, wie Zylinder und Kegel absieht, die für sich eine besondere Klasse von Schalen bilden, so scheidet sich die Gesamtzahl der übrigen doppelt gekrümmten Schalen je nach dem Vorzeichen der Krümmungen in zwei große Gruppen. Bei diesen beiden Gruppen von Schalen spielen die Asymptotenlinien die wesentliche Rolle bei der Übertragung der Tangentialkräfte und infolgedessen auch bei der Bestimmung der Art der zu einem eindeutigen und stabilen Gleichgewicht gehörigen Stützkräfte. Wenn die Asymptotenlinien imaginär sind, kann die Schale keine freien Ränder haben, sie kann jedoch am ganzen Umfang durch einfach gestützte Ränder begrenzt werden. Das einfachste Beispiel einer solchen Stützung bildet eine ebene Scheibe, die eine große Steifigkeit in Richtung der Ebene und keine nennenswerte Steifigkeit normal zu der Ebene aufweist. Sind die Asymptotenlinien jedoch reell, so kann man die Ränder der Schale in freie Ränder, einfach gestützte Ränder und doppelt gestützte Ränder, wie im Vorstehenden angegeben, nach bestimmten Regeln unterteilen. Da die doppelt gestützten Ränder vom konstruktiven Standpunkt aus Schwierigkeiten bieten können, ist es von Vorteil, ihre Bedeutung auf ein Minimum einzuschränken. Dies kann auf verschiedene Weise durch entsprechende Formung der Fläche erreicht werden.

Im Hinblick auf die einfachste Form der Berechnung der Schale kann man auf Grund der vorstehenden Betrachtungen ersehen, daß unter den doppelt gekrümmten Schalen besonders die über einem Viereck errichteten regelmäßigen Flächen zu ganz einfachen Rechenmethoden führen.

### Zusammenfassung.

Bei der Konstruktion von Schalengewölben in Eisenbeton handelt es sich zunächst um statisch bestimmte, von der Elastizitätstheorie unabhängige Probleme. Der Gesamtbereich dieser Fragen wird unter Ausschluß anderer Probleme behandelt, die bei der Ausführung von Schalen infolge der entstehenden Verformungen auftauchen, vor allem aber auch unter Ausschluß der Probleme der Verträglichkeit jener Verformungen, welche der auf statisch bestimmtem Wege errechnete Spannungszustand bedingt.

Die allgemein angenommene Hypothese einer gleichmäßigen Verteilung der Spannungen über die Querschnittsdicke wird benutzt, so daß man sich die Schale in ihrer Mittelfläche vereinigt denken kann.

Leere Seite  
Blank page  
Page vide

## IVa 2

# Die Flächentragwerke des Eisenbetonbaues.

Les surfaces portantes dans la construction en béton armé.

Shell Construction in Reinforced Concrete.

Dr. Ing. Fr. Dischinger,

Professor an der Technischen Hochschule, Berlin.

Nachdem vor ca. 12 Jahren von der Dyckerhoff & Widmann AG. in Verbindung mit der Firma Zeiß, Jena die Schalenbauweise geschaffen wurde, bei welcher die Lastübertragung im wesentlichen nur durch Dehnungskräfte erfolgt, hat diese Bauweise in der Zwischenzeit einen gewaltigen Aufschwung genommen, der nur dadurch ermöglicht wurde, daß nach großzügigen Versuchen die Theorie dieser räumlichen Gebilde in überraschend kurzer Zeit weitgehend ausgebaut wurde. In noch viel höherem Maße als durch die Theorie der kreuzweis gespannten Platten und Pilzdecken wurden hierdurch dem monolithischen Eisenbeton auf dem Gebiet der weitgespannten Hallen neue Arbeitsgebiete geschaffen. Mittels der Schalen und Faltwerke, die beide unter dem Namen Flächentragwerke zusammengefaßt werden, lassen sich Spannweiten erzielen, deren Verwirklichung man früher in der Massivbauweise für unmöglich gehalten hätte. Hierbei ist zu berücksichtigen, daß seit der Erfindung der Schalenbauweise erst ein Jahrzehnt verflossen ist. In dieser kurzen Zeit wurden hunderttausende von Quadratmetern große Hallen mit Spannweiten bis zu 100 m erstellt.

Das nachstehende Referat zerfällt in zwei Teile. In dem ersten Teil wird ein Überblick über die Entwicklung der Theorie seit dem letzten Kongreß gegeben und die bauliche Entwicklung an Hand einiger Ausführungen gezeigt. In dem zweiten Teil dagegen wird das Problem der durchlaufenden Zylinderschalen bzw. Rohre behandelt.

### 1. *Die Entwicklung der Theorie der Schalen seit dem letzten Kongreß in dem Jahre 1932.*

Bezüglich der verschiedenen Schalenformen, die nachstehend besprochen werden, wird auf das Referat von *W. Petry* II/4 für den Kongreß Paris 1932 hingewiesen. In dem im gleichen Jahre erschienenen Bd. 1 der „Abhandlungen“ hat *U. Finsterwalder*<sup>1</sup> das Problem der Zeiß-Dywidag-Tonne behandelt. Diese setzt sich zusammen aus einer zylindrischen Schale und den beiderseitigen Randbalken. Hierdurch ergibt sich ein einheitlicher Raumträger, den man auch als räumlichen Plattenbalken bezeichnen kann, bei dem die Schale die Druckplatte darstellt. Im Gegensatz zu den gewöhnlichen Plattenbalken, bei welchen bei größeren Abständen der Stege, die Platte sich nur in beschränktem Maße an der

Übernahme der Druckkräfte beteiligt, wirkt bei diesen räumlichen Plattenbalken die gesamte Schale als Druckplatte mit. Das hängt damit zusammen, daß bei den gewöhnlichen Plattenbalken nach Fig. 1 a die Mitwirkung der Platte an der Übernahme der Druckkräfte  $N_x$  durch Schubkräfte  $N_{xy}$  zwischen den Balken und der Platte erzwungen werden muß. Die mitwirkende Breite ist deshalb eine Funktion der Trägerlänge. Die Druckspannungen verteilen sich aber nicht gleichmäßig auf die gesamte Breite der Platte, weil sich die von den Balken weiter entfernten Plattenstreifen infolge der Schubverzerrungen der Mitarbeit entziehen.

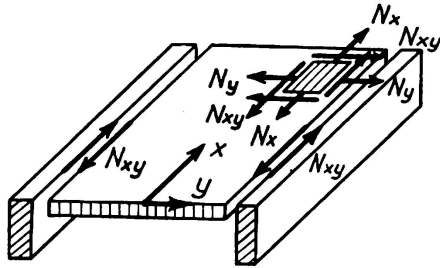


Fig. 1 a.

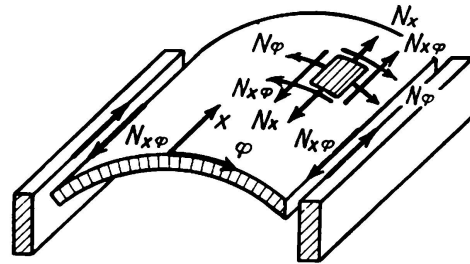


Fig. 1 b.

Die Wirkungsweise bei den räumlichen Plattenbalken nach Fig. 1 b ist eine wesentlich andere, denn in den Schalen sind, wie aus den Gl. 2 des nachfolgenden Abschnittes II hervorgeht, auch bei Vernachlässigung der Schubkräfte  $N_{x\varphi}$  zwischen Schale und Randbalken, in den Schalen Druckkräfte  $N_x$  vorhanden, die bedingt sind durch die Massen- oder Flächenlasten der Schale und infolgedessen beteiligt sich die Schale in ihrer ganzen Breite an der Übernahme der Druckkräfte und zwar in um so höherem Maße je mehr die Querschnittslinie der Schale gegenüber der Seillinie überhöht ist. Deshalb besitzen die Schalenträger, deren Querschnittslinie nach flachen Ellipsensegmenten geformt sind, eine wesentlich bessere Trägerwirkung von Binderscheibe zu Binderscheibe als die Kreiszyinderschalen. Des weiteren ergeben sich für diese stark überhöhten Schalenträger auch viel geringere Biegemomente in der Gewölberichtung, weil bei ihnen die zur Übernahme des äußeren Biegemomentes notwendigen Druckkräfte  $N_x$  zum weitaus größten Teil durch die Flächenlasten der Schale selbst und nicht durch die Schubkräfte  $N_{x\varphi}$  erzeugt werden. Die Größe der auftretenden Biegemomente in der Gewölberichtung sind abhängig von dem Anteil der Druckkräfte  $N_x$ , die durch die Schubkräfte  $N_{x\varphi}$  unter Zwang erzeugt werden müssen. Aus diesen Überlegungen ergibt sich ohne weiteres, daß sich bei den Schalenträgern mit stark überhöhten Querschnittslinien wesentlich geringere Biegemomente ergeben, als bei den Kreiszyinderschalen. Ich komme auf diesen Punkt später nochmals zu sprechen.

Zwischen der Schale und dem Randträger ergeben sich vier statisch unbestimmte Kräfte. Diese sind: 1. Die Gewölbekraft  $N_\varphi$ , die Querkraft  $Q_\varphi$ , das Biegemoment  $M_\varphi$ , und die Schubkraft  $N_{x\varphi}$ . Für die beiden Ränder zusammen haben wir also acht statisch unbestimmte Größen, und infolgedessen muß dem Schalenproblem eine Diff.-Gl. achter Ordnung oder ein dieser entsprechendes System von drei Diff.-Gl. zugrunde liegen, denn wir benötigen, entsprechend den acht statisch unbestimmten Größen, für die Schließung der beiden Fugen



zwischen der Schale und den Randträgern acht Konstante. Bei seiner Lösung ging *U. Finsterwalder* davon aus, daß bei größeren Binderabständen die Schale nicht in der Lage ist, durch Biegemomente  $M_x$  Lasten nach den Binderscheiben abzutragen und setzte dementsprechend das Moment  $M_x$  und die zugehörige Querkraft  $Q_x$ , sowie das Drillungsmoment  $M_{x\varphi}$  zu Null. Infolge dieser Annäherung gelang es, das Problem in Form einer Diff.-Gl. achter Ordnung unter Einführung einer Spannungsfunktion darzustellen, bei der sich die inneren Kräfte der Schale in gleicher Weise wie bei der *Airy'schen* Spannungsfunktion der Scheibe als Ableitungen dieser Spannungsfunktion darstellen ließen.

Bei kleinen Binderabständen im Verhältnis zu dem Krümmungsradius der Kreiszyinderschale sind die von *U. Finsterwalder* getroffenen Vernachlässigungen  $M_x = Q_x = M_{x\varphi} = 0$  nicht mehr zulässig. Aus diesem Grunde bemühte sich der Verfasser, für diese Fälle, die für Hallenbauten mit großen Gewölbspannweiten von Bedeutung sind, für die Kreiszyinderschale eine strenge Lösung zu schaffen. Da bei diesen weitgespannten Gewölben die Schale mit Rücksicht auf die Knicksicherheit durch Rippen verstärkt werden muß, habe ich meine Untersuchungen auch auf anisotrope Schalen ausgedehnt.<sup>2</sup> Es ergeben sich hierbei drei lineare simultane Diff.-Gl. mit konstanten Koeffizienten. Particulare Lösungen dieser Diff.-Gl. erhält man nach *H. Reißner*<sup>3</sup> dadurch, daß man die Flächenlasten durch Kreisfunktionen in Form doppelter trigonometrischer Reihen darstellt. Die Untersuchungen zeigen nun, daß bei einem in sich geschlossenen Rohr drei Möglichkeiten für die Lastübertragung bestehen. Diese sind: 1. Die Übertragung der Lasten nach den Binderscheiben durch Dehnungskräfte (Membrantheorie), 2. die Übertragung der Lasten nach den Bindern durch Biegemomente  $M_x$  in der Schale (Plattenwirkung), 3. ein Ausgleich der Lastanteile der höheren Harmonischen durch Biegemomente in der Ringrichtung. Dieser Ausgleich in der Ringrichtung ist nur deshalb möglich, weil den höheren Harmonischen bezogen auf den gesamten Ringquerschnitt keine tatsächliche vertikale Lastresultante entspricht. Die tatsächliche Belastung wird durch die Wirkungen 1 und 2 nach den Binderscheiben übertragen. Um bei den Zeiß-Dywidag-Tonnen die Randbedingungen an den beiderseitigen Randbalken zu erfüllen, muß die obige Particular-Lösung durch eine Lösung des homogenen Systems der Diff.-Gl. ergänzt werden. Das homogene System der Diff.-Gl. wird in gleicher Weise wie bei dem weiter unten zu besprechenden schon 1930 gelösten Problem von *K. Miesel*<sup>3</sup> erfüllt durch den Exponential-Ansatz  $e^{m\varphi} \cos \lambda x$ . Damit gehen die drei Diff.-Gl. in drei gewöhnliche homogene Gleichungen über, die auf eine Gleichung achten Grades führen, aus deren Lösung wir die Wellenlängen und die Dämpfungen der von den beiden Rändern ausgehenden Doppelschwingungen erhalten. Diese Gleichung achten Grades wurde für ca. hundert verschiedene Fälle gelöst. Die sich daraus ergebenden Werte der Wellenlängen und Dämpfungen wurden in Diagrammen aufgetragen, die ein Abgreifen dieser Werte ohne jede Rechnung ermöglichen. Durch den obigen Ansatz lassen sich jedoch nicht nur die acht Randbedingungen an den Rändern längs der Erzeugenden, sondern zugleich auch die Randbedingungen an die Binderscheiben erfüllen.

Das Randproblem des geschlossenen Kreiszyinderrohres an den Binderscheiben wurde, wie oben erwähnt, schon 1930 von *K. Miesel* für eine ganz beliebige Randstörung behandelt. Hierbei berücksichtigte *K. Miesel* auch zugleich die Nach-



giebigkeit der aussteifenden Scheiben, ein Problem, das bei dem U-Boot-Bau eine große Rolle spielt. Auch *U. Finsterwalder* hat sich in seiner unter 1. angezogenen Arbeit mit diesem Problem beschäftigt und dafür eine Näherungslösung geschaffen, wieder in Form einer Spannungsfunktion, wobei jetzt im Gegensatz zu der entsprechenden Lösung für die Zeiß-Dywidag-Schalen, nicht die Größen  $M_x$ ,  $Q_x$ ,  $M_{x\varphi}$ , sondern die Werte  $M_\varphi$ ,  $Q_\varphi$ ,  $M_{x\varphi}$  vernachlässigt wurden. Diese Näherungslösung ergibt bei wesentlich geringerer Rechenarbeit für nicht allzu große Werte der Harmonischen eine sehr gute Übereinstimmung mit der strengen Lösung von *K. Miesel*. Für unsere Bauaufgaben kommen jedoch keine sehr hohen Werte der Harmonischen in Frage.

Je biegesteifer die Schale in der Gewölberichtung ausgebildet wird, umso mehr nähert sich bei den Zeiß-Dywidag-Tonnen das Gesetz der Spannungsverteilung der  $N_x$ -Kräfte dem *Navier'schen* Geradlinien-Gesetz, weil dann die Formänderungsarbeit der Biegemomente in der Gewölberichtung gegenüber der der Dehnungskräfte keine Rolle mehr spielt. Je dünner aber die Schale ist, um so mehr hat sie das Bestreben, die Biegemomente zu verkleinern bei entsprechend ungünstiger Verteilung der Dehnungskräfte. Um trotzdem eine günstigere Verteilung der  $N_x$ -Kräfte zu erhalten, müssen diese dünnen Schalen mit entsprechend hohen Randbalken kombiniert werden.

Ich habe schon im Anfang meiner Darlegungen darauf hingewiesen, daß sich bei den stark überhöhten Querschnittskurven, wie z. B. bei dem flachen Ellipsensegment geringere Biegemomente bei wesentlich günstigerer Trägerwirkung ergeben. Je größer die Schalentonnen werden, umso notwendiger wird es, die Kreiszyinderschalen durch stärker überhöhte Schalenformen zu ersetzen. Bei den großen Hallenbauten des Reichsluftfahrtministeriums wurden deshalb fast ausschließlich Schalen mit elliptischer Querschnittslinie verwendet, die nach einem Vorschlag von *U. Finsterwalder* mittels der Theorie der Kreiszyinderschale berechnet wurden, dadurch, daß das Ellipsensegment durch drei Kreis-Korbbögen angenähert wurde. Damit ergibt sich naturgemäß eine sehr verwickelte Rechnung, da sich hierbei vier Ränder ergeben und die von den Rändern ausgehenden Schwingungen sich gegenseitig beeinflussen. Es ist deshalb ein starkes Bedürfnis für eine geschlossene strenge Lösung dieser Querschnittskurven vorhanden. Diese ist einem meiner Assistenten gelungen und wird demnächst in einer Dissertation veröffentlicht werden.

Die Schalenträger werden vielfach als durchlaufende Träger über mehrere Felder ausgeführt. Da diese Schalenträger im Verhältnis zur Trägerspannweite eine große Höhe besitzen, werden die Stützmomente durch die Schubverzerrungen teilweise stark beeinflußt. Hierauf hat schon *W. Flügge*<sup>4</sup> hingewiesen. Bei den schlanken Trägern werden bekanntlich die Einflüsse der Schubverzerrungen bewußt als bedeutungslos vernachlässigt. Bei den Schalenträgern ist diese Vernachlässigung nicht immer zulässig. Im Abschnitt II meines Referates habe ich den Einfluß dieser Schubverzerrungen auf die Stützmomente ausführlich nachgewiesen und mittels Dreimomentengleichungen ein Verfahren entwickelt, bei dem die Stützmomente bei beliebigen Trägerspannweiten und bei beliebigen Belastungen sowohl in der Gewölbe- als auch in der Längsrichtung für isotrope und anisotrope Schalenträger ermittelt werden können.

Mit den zunehmenden Spannweiten der Schalenträger gewinnt das Knick-

problem immer mehr an Bedeutung. Hierbei haben wir zwei Fälle zu unterscheiden: a) Das Knicken der Schale in der Gewölberichtung, und b) das Knicken in Richtung der Erzeugenden. Das erste Problem wurde schon 1914 von *R. von Mises*<sup>5</sup> und das zweite noch früher von *Lorenz*<sup>6</sup> und *Timoschenko*<sup>7</sup> behandelt. Bei den Schalenträgern mit großen Gewölbe- und Trägerspannweiten treten aber diese beiden Probleme in Kombination auf, sodaß man bei einer gesonderten Berechnung der beiden Knickfälle zu günstige Resultate erhalten würde. Dieser für die Schalentonnen so wichtige kombinierte Knickfall hat *W. Flügge*<sup>8</sup> im Jahre 1932 gelöst und in einer sehr ausführlichen für die Praxis gut verwendbaren Form dargestellt. Es zeigt sich hierbei, daß sich der Einfluß der kombinierten Knickung in ungünstiger Weise bemerkbar macht. Die Untersuchungen *Flügges* erstrecken sich auch auf den Fall der anisotropen Kreiszyinderschale, auf die man bei großen Spannweiten unbedingt angewiesen ist. Durch einen Grenzübergang zeigt *W. Flügge*, daß sich seine Gleichungen auch auf den Sonderfall der Plattenknickung überführen lassen.

Da bei der Ableitung der Knickbedingungen vorausgesetzt ist, daß die Formänderungen der Schale klein sind im Verhältnis zu den Schalenstärken, daß aber andererseits bei den praktischen Ausführungen diese Bedingung sehr schwer einzuhalten ist, weil sich bei den großen Spannweiten schon sehr merkbare Deformationen ergeben, muß verlangt werden, daß bei der Knicksicherheit der Schalen wesentlich höhere Sicherheiten in Rechnungen gestellt werden, als bei den einfachen Gewölben. Diese Sicherheiten lassen sich leicht erreichen durch eine Verstärkung der Schale mittels Rippen. Diese Rippen haben zugleich den Vorteil, daß durch sie die Deformationen sehr stark vermindert werden, und daß sie zugleich auch die Biegemomente der Schale aufnehmen.

In den letzten Jahren haben sich die Schalentonnen in immer größerem Maßstab in fast allen Ländern durchgesetzt. Es sind zylindrische Schalen mit Trägerspannweiten bis zu 60 m und Gewölbespannweiten bis zu 45 m, also bei Grundflächen von 2700 qm zur Ausführung gelangt. Aus den obengenannten Gründen wurden bei den Schalen mit großer Gewölbe- und großer Spannweite elliptische Querschnittslinien verwendet. Andererseits wurden eine Anzahl Hallen mit Gewölbespannweiten bis zu 100 m bei verhältnismäßig kleinen Binderabständen ausgeführt. Die Fig. 2 zeigt eine derartige Flugzeughalle mit großer Gewölbespannweite in der Außenansicht, die Fig. 3 dagegen die Innenansicht einer Flugzeughalle mit großer Gewölbe- und Trägerspannweite, deren Wiedergabe mir von dem Reichsluftfahrtministerium in entgegenkommender Weise gestattet wurde. Die Fig. 4 und 5 zeigen die Verwendung der Schalen bei Industriebauten und zwar ist in der Fig. 4 die Innenansicht der Postkraftwagenhalle Bamberg und in der Fig. 5 die Verwendung der Kreiszyinderschalen in Form von Sheddächern für eine Blechfabrik in Buenos Aires dargestellt.

## 2. Die Faltwerksdächer.

Bei den Faltwerksdächern wird die gekrümmte Querschnittskurve der Schalen durch ein Vieleck und damit die Schale durch ein Scheibenwerk ersetzt. Das Problem ist naturgemäß genau das gleiche wie bei der Zylinderschale. An Stelle der Diff.-Gl. treten Differenzgleichungen von der gleichen Ordnung. Hierbei



Fig. 2.

kommen zu den Biegemomenten aus der Schalenwirkung noch solche aus der Plattenwirkung hinzu, da die einzelnen Scheiben zuerst ihre Lasten durch Biegemomente nach den Kanten des Falterkes übertragen müssen, von wo sie dann durch die Schalen- bzw. Falterkswirkung mittels Dehnungskräften nach den aussteifenden Binderscheiben übertragen werden. Dieses Problem wurde unter Berücksichtigung der Biegemomente aus der Schalenwirkung zuerst von *E. Gruber*<sup>9</sup> und *G. Grüning*<sup>10</sup> behandelt. Beide Verfasser haben hierbei den Einfluß der Verdrehungssteifigkeit der Randbalken vernachlässigt.



Fig. 3.

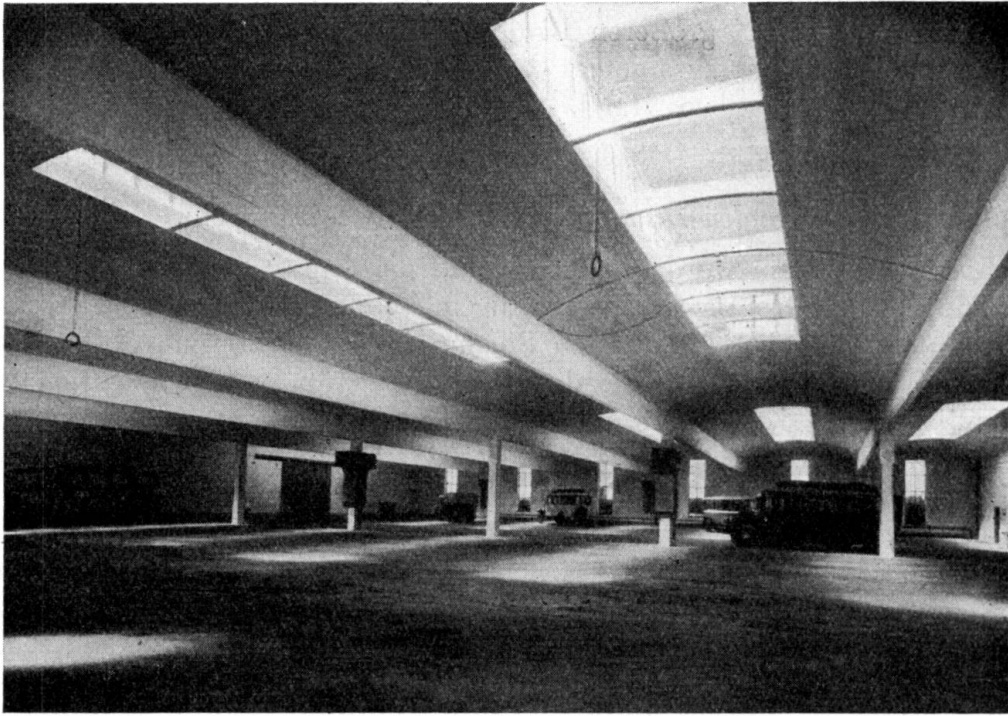


Fig. 4.

Postkraftwagenhalle Bamberg

In dieser Hinsicht wurden die obigen Arbeiten durch *R. Ohlig*<sup>11</sup> vervollkommenet, der in gleicher Weise, wie dies bei den Schalenträgwerken schon immer durchgeführt wurde, auch die Verdrehungssteifigkeit der Randbinder mit berücksichtigte. Die Scheibenträgwerke sind infolge ihrer größeren Biegemomente

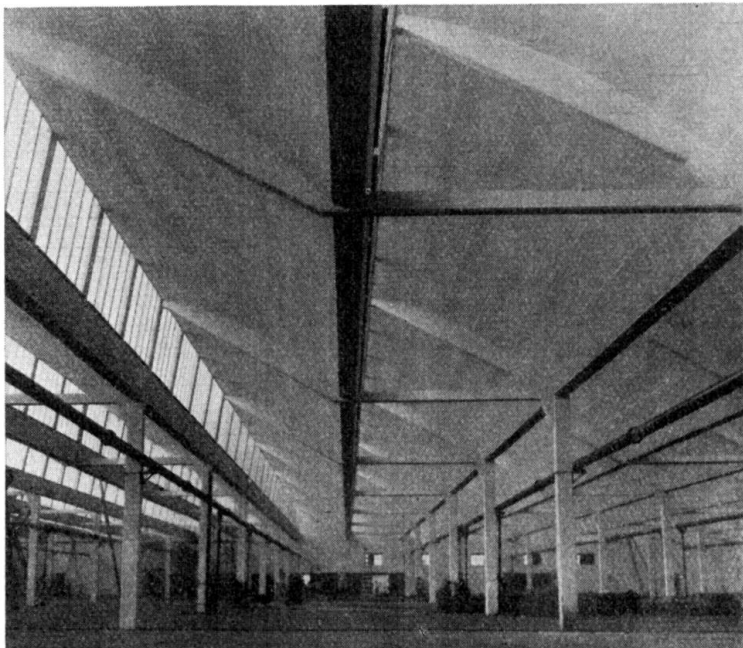


Fig. 5.

gegenüber den Schalen weniger wirtschaftlich, und da das Bessere der Feind des Guten ist, bis heute bei größeren Bauten nicht ausgeführt worden. Das hängt naturgemäß auch damit zusammen, daß sich die Patente für die Schalen und die Faltwerke in derselben Hand — der Dyckerhoff & Widmann AG. — befinden.

### 3. Die aus Zylinderschalen zusammengesetzten Vieleckskuppeln.

Nach diesem System wurden, wie bekannt, die größten bis jetzt vorhandenen Massivkuppeln der Großmarkthalle Leipzig mit 76 m Spannweite und die Kuppel der Großmarkthalle Basel mit 60 m Spannweite in Form von Klostergewölben ausgeführt. Während die Theorie dieser Klostergewölbe schon lange gelöst und veröffentlicht ist,<sup>12</sup> ist dies bezüglich der Theorie der Kreuzgewölbe nicht der Fall. Mit diesen Kreuzgewölben lassen sich architektonisch sehr schöne und in akustischer Hinsicht einwandfreie Kuppeln herstellen. Die Fig. 6 zeigt eine derartige Kuppel in Achteckform. Abgesehen von der guten Akustik besitzen diese Kuppeln eine sehr schöne und gute Beleuchtung durch die großen in den Kappen anzuordnenden Fenster, durch die das Licht durch Spiegelung an den Zylinderschalen bis in die Mitte des Raumes getragen wird. Die Theorie dieser Kuppeln habe ich im Jahre 1930 anlässlich des Preisausschreibens der Akademie des Bauwesens entwickelt und dabei gezeigt, daß es möglich ist, die aussteifenden Grate von Biegemomenten frei zu halten. Da mir im Rahmen des vorliegenden Referates zu wenig Raum zur Verfügung steht, soll die Veröffentlichung dieser Theorie demnächst in einer Zeitschrift erfolgen.

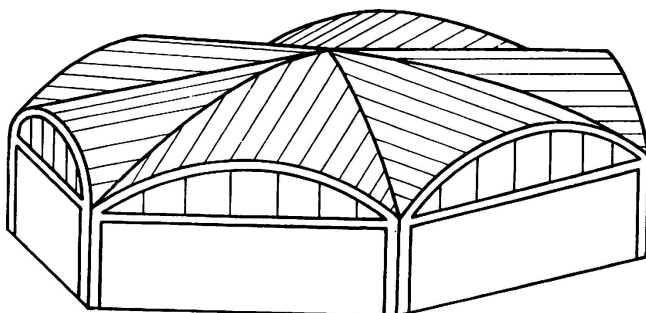


Fig. 6.

### 4. Die doppelt gekrümmten Schalen.

Die Membran- und die Biegungstheorie der am Kämpfer laufend unterstützten Rotationsschale ist schon lange gelöst. Bei der weiteren Entwicklung der doppelt gekrümmten Schalen sind die nachstehenden Formen von Bedeutung: a) Die nur auf wenigen Punkten gelagerten Rotationsschalen, bei denen die Kuppelwirkung durch eine Trägerwirkung der Schale überlagert wird, wodurch diese befähigt wird, ihre Lasten nach den in großer Entfernung angeordneten Tragsäulen zu übertragen; b) die Rotationsschalen und Translationsschalen mit rechteckigen oder vieleckigen Grundrissen; c) die Absidenkuppeln.

Die Theorie dieser verschiedenen doppelt gekrümmten Schalenformen wurde von mir im Jahre 1930 gelegentlich der schon erwähnten Preisarbeit entwickelt. Die Veröffentlichung dieser Arbeiten, die in Form eines Buches von der Akademie



vorgesehen war, mußte leider aus Mangel an Mitteln unterbleiben. Ich habe deshalb diese Veröffentlichungen in verkürzter Form im „Bauingenieur“ durchgeführt.<sup>13</sup> Bezüglich der Rotationsschalen auf Einzelstützen ist zu bemerken, daß sich für die Trägerwirkung dieser Schalen das überraschende mit den bekannten Scheibenwirkungen übereinstimmende Resultat ergibt, daß die Trägerhöhe und damit die Hebelarme der inneren Kräfte zum Abtragen der Lasten nach den Säulen proportional den Trägerabständen sind, sodaß also die Spannungen aus der Trägerwirkung unabhängig von der Trägerspannweite sind. Daraus folgt, daß sich mit diesen Schalen ebenso wie bei den Vieleckskuppeln sehr große Trägerspannweiten erreichen lassen. Die Schalen bleiben hierbei jedoch nicht biegungsfrei. Durch die Arbeit von A. Havers<sup>14</sup>, die das Problem der Randstörung am Breitenkreis einer Kugelschale für eine beliebige Harmonische mittels Kugelfunktion behandelt und löst, ist es nunmehr möglich, auch die in den Schalen entstehenden Biegemomente zu berechnen, deren Kenntnis für Großausführungen eine unbedingte Notwendigkeit darstellt. Die Durchrechnung eines Beispiels, die natürlich viel Mühe macht, wäre sehr wünschenswert, um Klarheit zu erhalten, welche Spannweiten sich mit diesen Schalenformen erreichen lassen und ob sie wirtschaftlich sind im Vergleich mit denen unter b) genannten Schalenformen, bei denen die Lastübertragung fast ausschließlich durch Dehnungskräfte erfolgt und bei denen also die Stärke der Schale nur von der Knicksicherheit abhängig ist, denn selbst bei den größten Spannweiten können bei diesen Schalenformen die zulässigen Spannungen nicht ausgenützt werden. Die Berechnung dieser Rotationsschalen mit rechteckigem oder vieleckigem Grundriß läßt sich von dem vom Verfasser angegebenen Verfahren in sehr einfacher Weise mittels der Diff.-Gl. des Membranspannungszustandes durchführen.

Die Fig. 7 zeigt eine derartige, sehr flache Schale mit rechteckigem Grundriß, die für ein Gebäude der Technischen Hochschule Danzig ausgeführt wurde. Bei 12 m Spannweite besitzt die Schale nur einen Pfeil von 0,77 m. Das Pfeilverhältnis  $l/f$  beträgt 15,6, ist also geringer als bei den flachsten Brücken. Diese Figur läßt klar erkennen, daß ein derartiger Schalenträger nichts anderes ist, als ein räumlicher Plattenbalken, der sich von dem gewöhnlichen Plattenbalken aber dadurch unterscheidet, daß die gesamte Schale als Druckplatte wirksam ist. In der Fig. 8 ist die Verwendung dieser doppelt gekrümmten Schalen mit rechteckigem Grundriß für eine Klinkerhalle in Beocin dargestellt. Diese Figur zeigt auch die Anwendung der unter c) genannten Apsidenschalen. Wie ich in dem obengenannten Aufsatz im „Bauingenieur“<sup>13</sup> dargelegt habe, ist in diesen halben Kuppeln ein Membranspannungszustand vorhanden, wenn die Schale am Kämpfer durch Ringe ausgesteift wird. Da diese Halbkuppeln als selbständige Bauglieder hergestellt werden können, sind sie für den Hallenbau ein sehr wichtiges neues Bauglied, da sie mit zylindrischen Tonnen zusammengesetzt die Herstellung von Kuppeln mit annähernd ovalen Grundrissen ermöglicht. Diese Halbkuppeln wurden deshalb auch in großem Umfang für Flugzeughallen als Abschlußbauten und zwar mit Spannweiten bis zu 40 m verwendet. Die in der Fig. 3 dargestellte Flugzeughalle, die aus einer großen Längstonne besteht, ist in dieser Weise an den Enden durch Apsidenkuppeln abgeschlossen. Die Fig. 9 endlich zeigt eine weitere derartige Apsidenkuppel für den Musikpavillon des Bades Schwalbach.

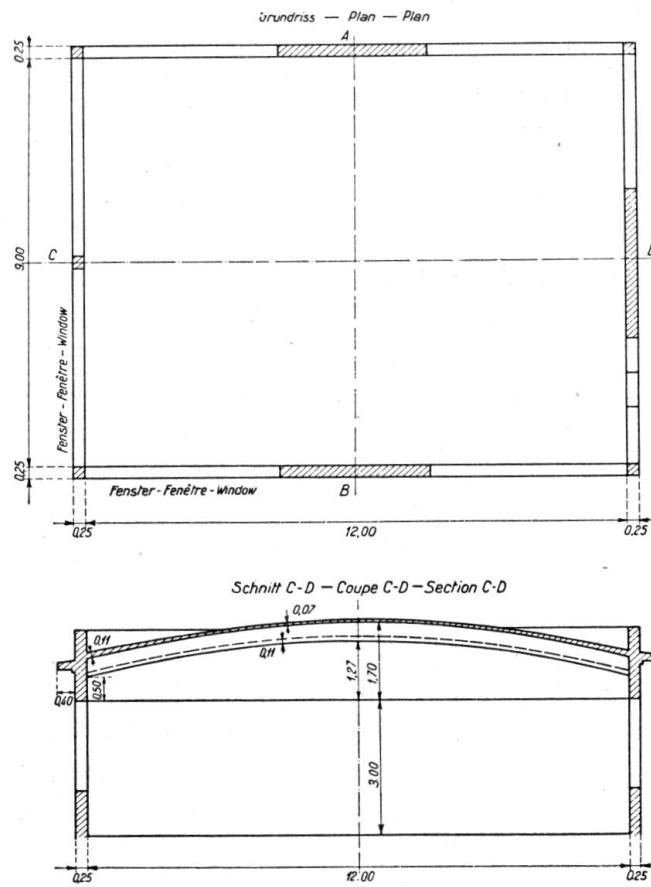


Fig. 7.

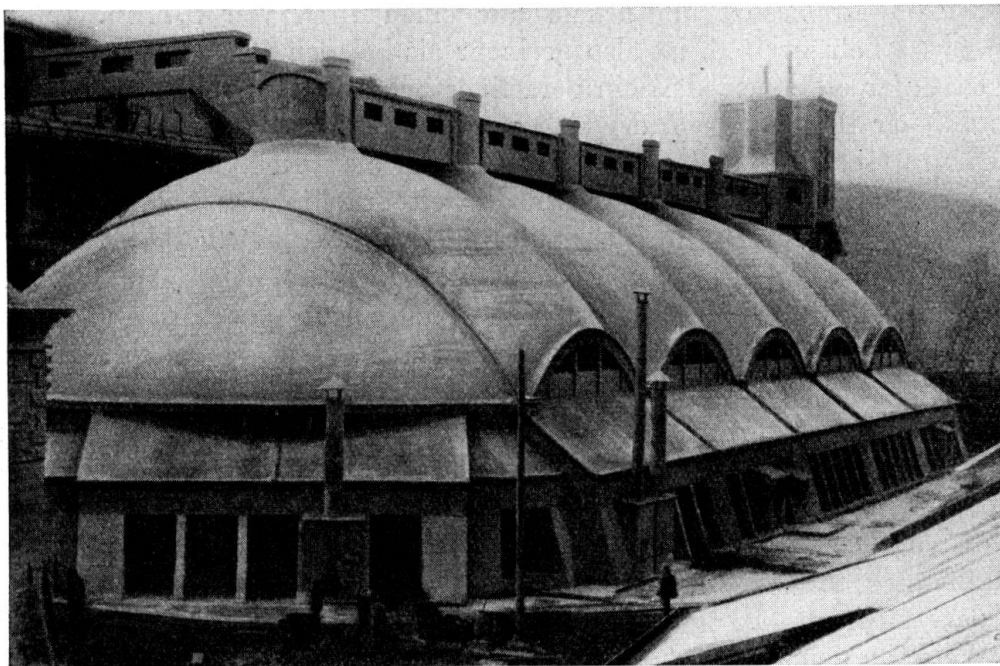


Fig. 8.  
Klinkerhalle Beocin.

### 5. Das Prinzip des statischen Maßenausgleichs zur Berechnung von affinen Schalen.

Die im vorhergehenden Abschnitt besprochenen Schalenformen lassen sich mit Hilfe der Diff.-Gl. des Membranspannungszustandes berechnen, weil die Kugelschale mathematisch leicht zu berechnen ist. Das Prinzip des statischen Maßenausgleichs ermöglicht es uns, in ganz einfacher Weise auch die dazu affinen Schalenformen zu berechnen. Ich habe dieses Prinzip im Jahre 1928 entwickelt und im Handbuch für Eisenbeton für bestimmte Fälle dargestellt;<sup>15</sup> im Jahre 1930 habe ich dann gelegentlich der schon erwähnten Preisarbeit mit Hilfe der Diff.-Gl. der beliebig geformten Schale eine allgemeine Darstellung des Problems gegeben und nunmehr im „Bauingenieur“<sup>16</sup> veröffentlicht. Hiermit läßt sich z. B. die Berechnung einer Schale mit elliptischem Grundriß auf die Berechnung einer Rotationsschale als Grundschale zurückführen. Die weiteren zahlreichen Aufgaben, die sich damit lösen lassen, sind in dem obigen Aufsatz gekennzeichnet; es sei nur kurz darauf hingewiesen, daß sich auch affine Raumfachwerke in einfacher Weise berechnen lassen.

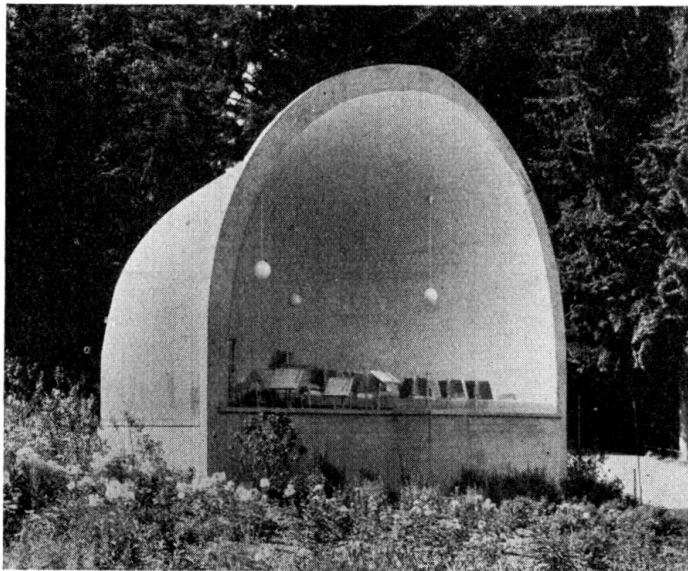


Fig. 9.

Musikpavillon Bad Schwalbach.

### 6. Schalen mit ganz beliebiger Krümmung.

Bei den doppelt gekrümmten Schalen, die nach beliebigen Flächen gekrümmt sind, lassen sich mit Hilfe der Diff.-Gl. des Membranspannungszustandes keine Lösungen finden, weil wir die drei sich ergebenden partiellen Diff.-Gl. nicht integrieren können. Wir müssen einen anderen Weg beschreiten und diese Gleichungen mittels Differenzenrechnung lösen.

Eine sehr übersichtliche und leicht anwendbare Methode zur Lösung derartiger Probleme hat *Pucher* im Jahre 1931<sup>17</sup> gegeben. Diese einfache Lösung wird dadurch ermöglicht, daß gezeigt wird, daß sich die drei Diff.-Gl. in eine einzige zusammenfassen lassen, durch Einführung einer Spannungsfunktion, durch die



der Spannungszustand vollständig beschrieben wird. Die inneren Kräfte des Membranspannungszustandes lassen sich in ähnlicher Weise wie bei der *Airy'schen* Spannungsfunktion als Ableitung daraus gewinnen. Da über die Form der Fläche nur die Voraussetzung der Stetigkeit getroffen ist, lassen sich damit alle im Schalenbau auftretenden Formen berechnen, wenn die Randbedingungen gegeben und mit dem Membranspannungszustand verträglich sind. Die Differenzmethode wird man immer da anwenden, wenn, wie schon oben erwähnt, eine Lösung mittels der Diff.-Gl. unmöglich ist. Die späteren französischen Arbeiten gehen im wesentlichen den von *Pucher* angegebenen Weg. Auf diese Theorie baut sich die Entwicklung der Schalenbauweise in Frankreich in Form von nicht abwickelbaren Regelflächen auf. Für den speziellen Fall der Rückungsfläche hat *Flügge*<sup>4</sup> in der gleichen Weise mittels Differenzgleichungen eine Lösung angegeben.

Zum Schluß möchte ich noch auf eine interessante Ausführung hinweisen, die in Fig. 10 dargestellt ist. Es handelt sich um die Kuppel im Haus des Deutschen Sports, die für die Olympiade hergestellt wurde. Der Entwurf stammt vom Architekt *March*, die konstruktive Durchbildung von *U. Finsterwalder*. Das Oberlicht ist ganz exzentrisch angeordnet, um für den Ring eine gute Beleuchtung zu erhalten. Die Kuppel besitzt jedoch tatsächlich keine Kuppelwirkung, weil die einzelnen Schalensektoren, die durch kräftige Rippen ausgesteift sind, von den Kämpfern der Kuppel aus vorkragen, ohne sich gegenseitig abzustützen.

Mit Rücksicht auf den geringen im „Vorbericht“ zur Verfügung stehenden Raum erscheint der zweite Teil des Referates über die durchlaufende Kreiszyklinderschale im Band 4 der „Abhandlungen“ der J.V.B.H. Zürich, 1936.

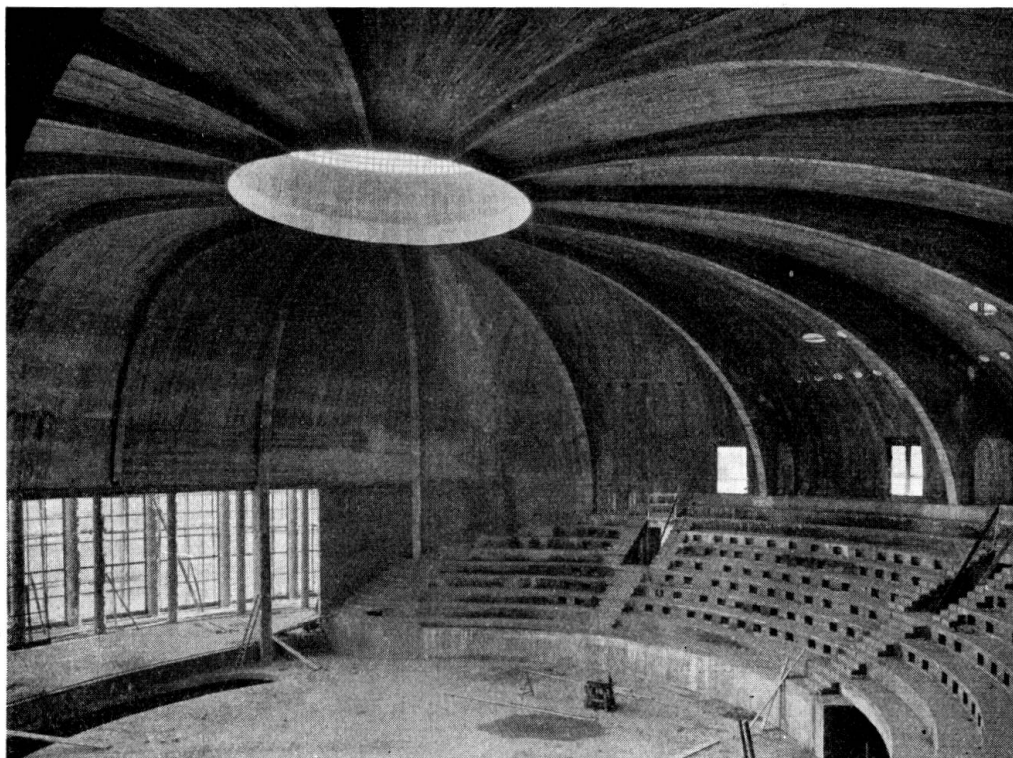


Fig. 10.

Haus des deutschen Sports. Berlin-Reichssportfeld.

## Literaturangaben.

<sup>1</sup> *U. Finsterwalder*: Die Theorie der zylindrischen Schalengewölbe, System Zeiß-Dywidag. Intern. Verein. f. Brücken- u. Hochbau, Abh. 1, 1932, und Diss. München 1930, desgl. Ing. Arch. Bd. IV (1933).

<sup>2</sup> *Fr. Dischinger*: Die Strenge Theorie der Kreiszyinderschale in ihrer Anwendung auf die Zeiß-Dywidag-Schalen, Beton und Eisen 1935, H. 16—18.

<sup>3</sup> *K. Miesel*: Über die Festigkeit von Kreiszyinderschalen bei nicht achsensymmetrischer Belastung. Ing. Arch. Bd. 1 (1930).

<sup>4</sup> *W. Flügge*: Statik und Dynamik der Schalen. Jul. Springer, Berlin 1934.

<sup>5</sup> *R. v. Mises*: Z.V.D.I. 58, 1914, S. 750 ff.

<sup>6</sup> *R. Lorenz*: Z.V.D.I. 52, 1908, S. 1766 ff.

<sup>7</sup> *S. Timoschenko*: Z. Math. Phys. 58 (1910), S. 378 ff.

Zu <sup>6</sup> und <sup>7</sup> siehe auch *K. v. Sanden* und *F. Tölke*: Stabilitätsprobleme dünner Kreiszyinderschalen. Ing. Arch. Bd. 3, 1932.

<sup>8</sup> *W. Flügge*: Die Stabilität der Kreiszyinderschale. Ing. Arch. Bd. 3 (1932).

<sup>9</sup> *E. Gruber*: Berechnung prismatischer Scheibenwerke. Int. Verein. f. Brücken- u. Hochbau, Abh. 1 (1932), S. 225 und Abh. 2 (1934), S. 206.

<sup>10</sup> *G. Grüning*: Die Nebenspannungen der prismatischen Scheibenwerke. Ing. Arch. Bd. 3 (1932).

<sup>11</sup> *R. Ohlig*: Beitrag zur Theorie der Prismatischen Faltwerke. Ing. Arch. Bd. 6 (1935) und: Die Nebenspannungen der Randträger prismatischer Faltwerke. Diss. Darmstadt (1934).

Bezüglich der Membrantheorie zu <sup>9</sup> und <sup>11</sup> siehe auch *H. Craemer*: Allgemeine Theorie der Faltwerke. Beton und Eisen 1930, S. 276 und *G. Ehlers*: Die Spannungsermittlung in Flächentragwerken. Beton und Eisen 1930, S. 281.

<sup>12</sup> *Fr. Dischinger*: Theorie der Vieleckskuppeln. Diss. Dresden 1929 und Beton und Eisen 1929, S. 100.

<sup>13</sup> *Fr. Dischinger*: Die Rotationsschalen mit unsymmetrischer Form und Belastung. Bauingenieur 1935, H. 35—38.

<sup>14</sup> *A. Havers*: Asymptotische Biegetheorie der unbelasteten Kugelschale. Ing. Arch. 6, 1935.

<sup>15</sup> *Fr. Dischinger*: Der Spannungszustand in affinen Schalen und Raumflächwerken. Bauingenieur 1936, S. 128; siehe hierzu auch

<sup>16</sup> *Fr. Dischinger*: Hdbch. für E. B., 3. Aufl., Bd. 12, 1928 und *W. Flügge*<sup>4</sup>.

<sup>17</sup> *A. Pucher*: Beitrag zur Theorie tragender Flächen. Diss. Graz, 1931, und unter dem Titel: Über den Spannungszustand in doppelt gekrümmten Flächen in abgekürzter Form. Beton und Eisen 1934, H. 19.

## Zusammenfassung.

In dem Teil I des Referates wird eine Übersicht über die Entwicklung der Theorie der verschiedenen Schalenformen seit dem letzten Kongreß im Jahre 1932 gegeben und es werden die maßgebenden Arbeiten in ihren Grundsätzen besprochen.

In dem Teil II dagegen wird das Problem des ausgesteiften zylindrischen Rohres bzw. Zeiß-Dywidag-Daches behandelt und gezeigt, daß bei diesen Schalenträgern der Einfluß der Schubverzerrung auf die Einspannungsmomente nicht vernachlässigt werden darf, im Gegensatz zu den schlanken Balken des Ingenieurwesens, bei welchem diese Einflüsse bewußt als sehr gering vernachlässigt werden.

Leere Seite  
Blank page  
Page vide

## IVa 3

# Massive Kuppeln, zylindrische Behälter und ähnliche Konstruktionen.

Coupoles massives, réservoirs cylindriques  
et constructions semblables.

Solid Domes, Cylindrical Reservoirs and Similar Constructions.

Dr. techn. H. Granholm,

Dozent an der Königlichen Technischen Hochschule Stockholm.

Die exakte Berechnung der Biegungsspannungen in einer massiven Kuppel ist mit sehr großer Mühe verknüpft. In einer der Kgl. Technischen Hochschule zu Stockholm vorgelegten Doktorabhandlung<sup>1</sup> kommen diese Schwierigkeiten zum Vorschein, und man darf sich fragen, ob der in der Praxis tätige Ingenieur jemals Zeit und Gelegenheit hat, die Abmessungen einer Kuppel an Hand der exakten Theorien zu errechnen. Allein schon die Aufstellung der Grundgleichungen ist ziemlich verwickelt, und ihre ganze Integrierung führt zu Reihen, die häufig schwer zu handhaben sind und langsam konvergieren. Auch wenn ihre Konvergenz für manche Wandstärken befriedigend ist, kann eine Änderung der Wandstärke bewirken, daß die gute Konvergenz verloren geht. Selbst wenn der Ingenieur den mathematischen Apparat für die Behandlung des Problems vollkommen beherrscht, ist die für das Durchrechnen eines bestimmten Belastungsfalles erforderliche Arbeit viel zu groß. Überhaupt dürfte es unmöglich sein, auf dem von *Meißner, Bolle, Dubois, Honegger, Ekström* u. a. angewiesenen Wege zu praktischen Methoden zu kommen. Beispielsweise für sphärische Kuppeln ergeben sich beim Integrieren in den einfachsten Fällen hypergeometrische Reihen, die wegen ihrer langsamen Konvergenz nicht das richtige Werkzeug des Ingenieurs bilden.

In Anbetracht dieser Tatsachen ist es vor allem wichtig, daß man sich für die weitere Entwicklung der Kuppeltheorie auf solche Lösungen einrichtet, die den Anforderungen der Praxis Genüge leisten, auch wenn man dabei gewisse Annäherungen einführt. Wie *Geckeler*<sup>2</sup> gezeigt hat, läßt sich auch mit verhältnismäßig einfachen mathematischen Hilfsmitteln eine Lösung finden, die sich von der exakten nur unwesentlich unterscheidet und die ganz besonders einfach und bequem anzuwenden ist, falls Wandstärke und Radius konstant sind. Die gute Übereinstimmung zwischen *Geckelers* Theorie und der exakten Theorie

<sup>1</sup> *John Erik Ekström*: Studien über dünne Schalen von rotationssymmetrischer Form und Belastung mit konstanter und veränderlicher Wandstärke. Stockholm 1932.

<sup>2</sup> Siehe z. B. Handbuch für Eisenbetonbau, Band 6. Berlin 1928.

kann dazu berechtigen, jene ausführlicher zu erörtern, falls man sich darüber klar ist, welche Annäherungen eingeführt werden. Noch einen Schritt näher kommt man dem exakten Resultat, wenn man *Blumenthals* und *Steuermanns* sogenanntes asymptotisches Integrationsverfahren benutzt, das auch bei beliebig variabler Wandstärke der Kuppel anwendbar ist. Mit diesem Verfahren kommt man tatsächlich weiter als mit den Methoden, die auf Lösungen in Form unendlicher Reihen aufgebaut sind, wobei man bisher immer annehmen mußte, daß die Wandstärke nach einer bestimmten Funktion veränderlich sei, damit sich die Lösung durchführen ließ.

Eine nähere Prüfung der von *Geckeler* angegebenen Schlußgleichungen zeigt, daß diese von genau derselben Art sind wie die Gleichungen für einen elastisch unterstützten Träger. Die physikalische Analogie ist auch nicht schwer zu erkennen. Den Meridian der Kuppel kann man nämlich als einen Träger betrachten, der von den Parallelkreisen oder Ringen unterstützt ist. Da diese sich zusammendrücken oder ausdehnen lassen, entsprechen sie in statischer Hinsicht einer elastischen Unterlage.

Durch diese Betrachtungsweise kann man sich die Statik der Kuppel mit ausreichender Genauigkeit klarmachen. Für die Aufstellung der Gleichgewichtsgleichungen braucht man dann auch nicht auf die *Meißnerschen* Differentialgleichungen zurückgreifen, sondern man kann alle erforderlichen Gleichungen direkt einfach mit Hilfe der Theorie des elastisch unterstützten Trägers aufstellen. Dies bedeutet für den in der Praxis tätigen Ingenieur, daß er nicht erst den Versuch zu machen braucht, die ziemlich komplizierte klassische Kuppeltheorie zu begreifen; vielmehr kann er auf eigene Faust die erforderlichen Gleichungen ableiten.

Aus den Arbeiten *Geckelers* geht hervor, daß er selbst die hohe Bedeutung der von ihm vorgeschlagenen Annäherungen nicht vollständig erkannt hat; d. h. er hat selbst nicht verstanden, daß die Kuppel im großen betrachtet wie eine stetige Reihe von Trägern auf federnder Unterlage wirkt. Die von mir hier vorgeschlagene Betrachtungsweise kann natürlich in der Weise erweitert werden, daß man den Meridian nicht als einen Träger, sondern als ein Gewölbe betrachtet, das elastisch von den Ringelementen der Kuppel unterstützt wird.

Durch Einführung dieser genaueren Betrachtungsweise bekommt man einen exakteren Einblick in die Statik der Kuppel, und die Gleichungen, die man dabei erhält, sind dieselben wie nach *Meißner*.

Es ist offenkundig, daß man besonders bei sehr flachen Kuppeln, wo also die Gewölbewirkung in den Meridianelementen stark hervortritt, zur Einführung dieser letzteren Betrachtungsweise genötigt ist, um die erwünschte Genauigkeit zu erzielen. Je steiler die Tangente der Kuppel an der Auflage geneigt ist, um so genauer wird die angenäherte Betrachtungsweise mit dem Meridian als einem Träger auf elastischer Unterlage, und in dem Sonderfall, daß die Tangente der Kuppel überall senkrecht ist, wenn also die Kuppel in einen Zylinder übergeht, ist die Betrachtungsweise vollkommen exakt.

Um näher zu erläutern, wie einfach das Kuppelproblem auf solche Weise behandelt werden kann, habe ich einige Probleme durchgerechnet und die Ergebnisse mit denjenigen verglichen, die man nach der exakten Theorie erhält. Die Übereinstimmung ist überall erstaunlich gut.

Als erstes Beispiel wählen wir eine sphärische Betonkuppel von gleichmäßiger Dicke, Wandstärke  $\delta = 16$  cm, Radius  $r = 1000$  cm, Öffnungswinkel  $40^\circ$ . Die Kuppel sei mit einem konstanten Flüssigkeitsdruck  $p = 1,0$  kg/cm<sup>2</sup> belastet und sei rund um die Kante fest eingespannt (siehe Fig. 1).

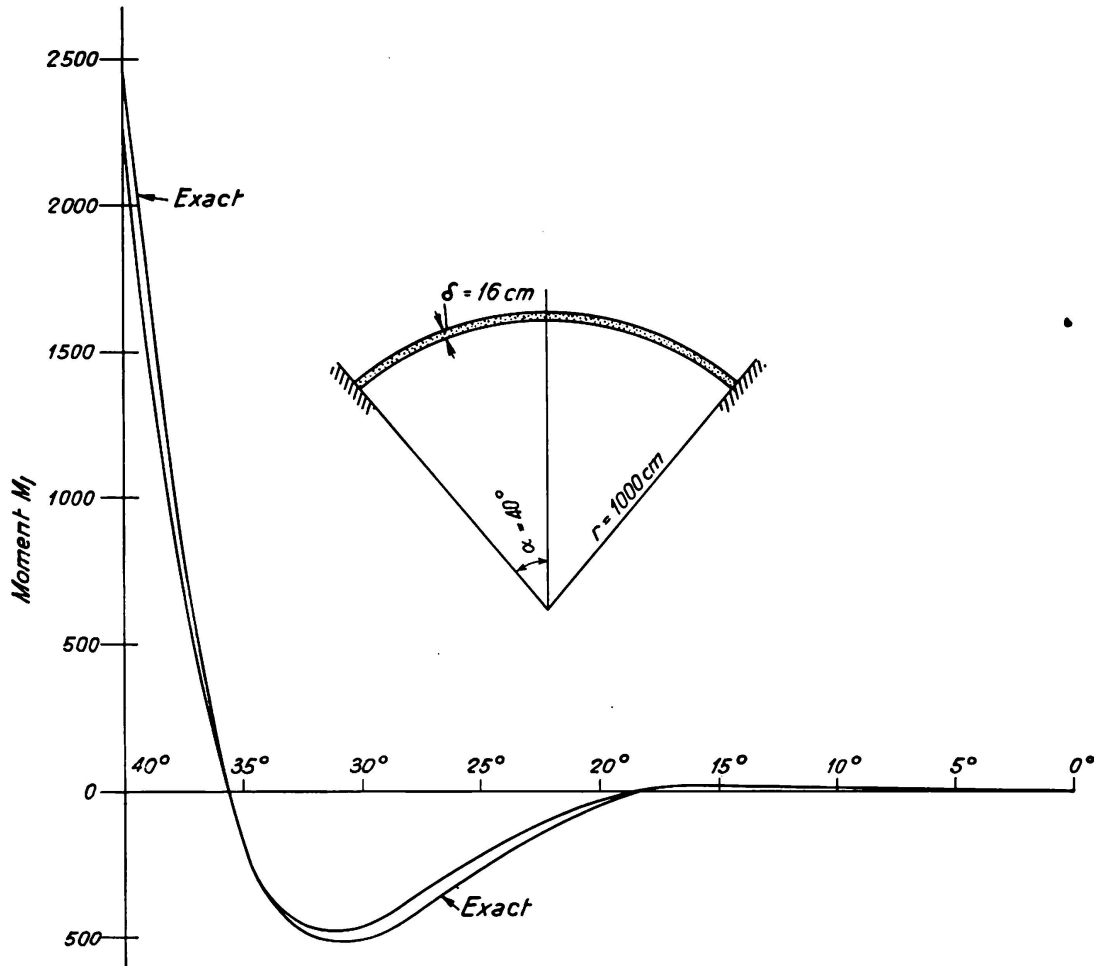


Fig. 1.

Vergleich zwischen der Größe des Meridianmomentes, berechnet erstens nach Gleichung 5 und zweitens nach der exakten Methode mittels hypergeometrischer Reihen. Die Abweichungen sind für praktische Fälle belanglos.

Berechnet man die Spannungen in dieser Kuppel nach der Membrantheorie, so ergibt sich eine Meridiandruckspannung  $T_1 = \frac{p r}{2}$  und eine Ringdruckspannung  $T_2 = \frac{p r}{2}$ . Diese Meridian- und Ringspannungen sind über die ganze Kuppel konstant, und die „membrantheorietische“ Lösung ist also sehr einfach. Unter Einwirkung dieser Druckspannungen  $T_1$  und  $T_2$  wird die Kuppel zusammengepreßt, sodaß sich ihr Radius um den Betrag  $= \frac{T \cdot r}{E \delta}$ ; d. h.  $\frac{p r^2}{2 E \delta}$  verringert. Diese Verringerung des Radius ist nicht sehr groß, sie beläuft sich unter den gegebenen Voraussetzungen und bei  $E = 210000$  kg/cm<sup>2</sup> auf nur 0,15 cm. Da die Kuppel rund um die Kante festgehalten wird, ist sie jedoch nicht imstande,

ihre Form frei zu verändern; die der Kante am nächsten gelegenen Teile werden den ursprünglichen Radius beibehalten, aber je weiter man sich von der Kante entfernt, umso größer wird die Bewegungsfreiheit der Konstruktion und umso freier kann die Formänderung vor sich gehen. Obgleich die Zusammendrückung des Radius in diesem Falle ziemlich geringfügig ist, entstehen nahe an den Kanten gewisse Störungen, die zu Biegemomenten von solcher Größenordnung führen, daß man sie nicht vernachlässigen darf.

Wir wollen nun untersuchen, wie große Momente in einem elastisch unterstützten Träger entstehen, wenn wir annehmen, er erhalte eine Ausbiegung entsprechend dem oben berechneten Werte  $\frac{pr^2}{2E\delta}$ . Für den Zusammenhang zwischen Moment und Ausbiegung gilt die Gleichung

$$EJ \cdot \frac{d^2 y}{dx^2} = -M_1 \quad (1)$$

und die Einwirkung der elastischen Unterstützung der Ringelemente wird ausgedrückt durch die Gleichung

$$\frac{d^2 M_1}{dx^2} = \frac{E\delta}{r^2} \cdot y \quad (2)$$

Eliminiert man  $M_1$  aus diesen beiden Gleichungen, so erhält man

$$\frac{d^2}{dx^2} \left[ EJ \frac{d^2 y}{dx^2} \right] + \frac{E\delta}{r^2} \cdot y = 0 \quad (3a)$$

oder, wenn die Biegesteifheit  $EI$  als konstant und gleich  $\frac{Em^2}{m^2 - 1} \cdot \frac{\delta^3}{12}$  vorausgesetzt wird

$$\frac{d^4 y}{dx^4} + 4k^4 y = 0 \quad (3b)$$

worin  
ist.

Das allgemeine Integral der Gleichung 3b kann man bekanntlich in folgender Form schreiben:

$$y = e^{-kx} (A \cos kx + B \sin kx) + e^{+kx} (C \cos kx + D \sin kx) \quad (4a)$$

d. h. die Ausbiegung kann man als die Summe zweier Sinusschwingungen betrachten, die eine mit gedämpften, die andere mit zunehmenden Amplituden. Bekanntlich kann man im allgemeinen die Koeffizienten  $C$  und  $D$  gleich 0 setzen, vorausgesetzt, daß der Träger nicht gar zu kurz ist und daß der Ursprung in den Punkt verlegt wird, von dem die Störung ausgeht. Für geschlossene Kuppeln kann man daher das Integral mit ausreichender Genauigkeit in folgender Form schreiben:

$$y = e^{-kx} (A \cos kx + B \sin kx) \quad (4b)$$

Hier bezeichnet  $x$  die Bogenlänge des Meridians, von dem Kuppelrand aus

gemessen. In diesem Falle sind die arbiträren Konstanten A und B leicht aus der Randbedingung bestimmbar, daß

$$y = -\frac{pr^2}{2E\delta} \quad \text{und} \quad y' = 0 \quad \text{bei} \quad x = 0 \quad \text{ist.}$$

Dies ergibt  $A = B = -\frac{pr^2}{2E\delta}$  und die Ausbiegung des Meridians ist also

$$y = -\frac{pr^2}{2E\delta} \cdot e^{-kx} (\cos kx + \sin kx).$$

Durch Einsetzen in Gleichung 1 erhält man den Ausdruck für das Meridianmoment

$$M_1 = \frac{\sqrt{3}}{12} pr\delta e^{-kx} (-\cos kx + \sin kx) \quad (5)$$

In diesem Ausdruck ist die Einwirkung der Quersammenziehung des Materials vernachlässigt, d. h. die Poissonsche Zahl  $m$  ist gleich unendlich gesetzt.

Mit Hilfe der in Tabelle I angegebenen Werte der Funktionen  $e^{-kx} \cos kx$  und  $e^{-kx} \sin kx$  läßt sich Gleichung 5 leicht zeichnerisch wiedergeben. In Fig. 1 sieht man, wie das Meridianmoment  $M_1$  sich mit der Entfernung vom Kuppelrand verändert. Zum Vergleich sind die nach *Bolles* Methode mit hypergeometrischen Reihen berechneten exakten Werte angegeben.<sup>3</sup> Wie man sieht, ist die Übereinstimmung zwischen den exakten Resultaten und den Annäherungswerten erstaunlich gut, weshalb kein Anlaß besteht, das Kuppelproblem zu einer verwickelten mathematischen Aufgabe zu gestalten. Bei Kuppeln mit größerem Öffnungswinkel als in diesem Falle,  $40^\circ$ , ist die Übereinstimmung zwischen den exakten und den angenäherten Werten noch besser. Nur bei Kuppeln, deren Neigungswinkel an den Auflagen sehr klein ist, erlangt der Einfluß der gemachten Annäherungen praktische Bedeutung. Nebenbei bemerkt sind solche Kuppeln unzweckmäßig wegen der sehr starken Randstörungen, die beim Anschluß der Kuppel an ihren etwaigen Auflagering auftreten.

Für die Berechnung der Spannungen in der Kuppel ist nicht nur das Meridianmoment  $M_1$  von Bedeutung, sondern auch die Ringmomente  $M_2$  und die Zuschüsse zur Meridiandruckspannung und Ringdruckspannung, die dadurch entstehen, daß die Randbedingungen nicht den Voraussetzungen der Membrantheorie entsprechen. Diese Größen,  $M_2$ ,  $\Delta T_1$  und  $\Delta T_2$  lassen sich direkt aus den nachstehenden Formeln berechnen. Die Übereinstimmung zwischen den nach der hier gezeigten Annäherungsmethode erhaltenen Werten und den exakten ist ebenfalls sehr gut, wie aus nachstehenden, in Tabelle 2 zusammengestellten Vergleichen hervorgeht.

Die Ableitung der mathematischen Ausdrücke für die Zuschußkräfte  $\Delta T_1$  und  $\Delta T_2$  erfolgt am einfachsten unter Anwendung der Analogie, daß der Meridian ein Träger mit elastischer Unterlage ist. Den Zuschuß in der Meridiandruckspannung,  $\Delta T_1$ , kann man also betrachten als die Scherkraft im Träger, multipliziert mit  $\cot \alpha$ , wo  $\alpha$  der Neigungswinkel des Meridians zur Horizontalebene ist. Hierbei erhält man

$$\Delta T_1 = \cot \alpha \cdot EJ \cdot \frac{d^3 y}{dx^3} \quad (6)$$

<sup>3</sup> Siehe *Ekström*, a. a. O., S. 124.



Tabelle I.

Werte der Funktionen  $e^{-kx} \cos kx$ ,  $e^{-kx} \sin kx$ ,  $e^{-kx} (\cos kx - \sin kx)$  und  $e^{-kx} (\cos kx + \sin kx)$ .

$kx$	$e^{-kx} \cos kx$	$e^{-kx} \sin kx$	$e^{-kx} (\cos kx - \sin kx)$	$e^{-kx} (\cos kx + \sin kx)$
0	1.0000	0.0000	1.0000	1.0000
$\frac{\pi}{8}$	0.6239	0.2584	0.3655	0.8823
$\frac{\pi}{4}$	0.3225	0.3225	0.0000	0.6450
$\frac{3\pi}{8}$	0.1179	0.2845	-0.1665	0.4024
$\frac{\pi}{2}$	0.0000	0.2079	-0.2079	0.2079
$\frac{5\pi}{8}$	-0.0536	0.1297	-0.1833	0.0761
$\frac{3\pi}{4}$	-0.0671	0.0671	-0.1342	0.0000
$\frac{7\pi}{8}$	-0.0592	0.0245	-0.0837	-0.0347
$\pi$	-0.0432	0.0000	-0.0432	-0.0432
$\frac{9\pi}{8}$	-0.0269	-0.0112	-0.0157	-0.0381
$\frac{5\pi}{4}$	-0.0139	-0.0139	0.0000	-0.0279
$\frac{11\pi}{8}$	-0.0051	-0.0123	0.0072	-0.0174
$\frac{3\pi}{2}$	0.0000	-0.0090	0.0090	-0.0090
$\frac{13\pi}{8}$	0.0023	-0.0056	0.0079	-0.0033
$\frac{7\pi}{4}$	0.0029	-0.0029	0.0058	0.0000
$\frac{15\pi}{8}$	0.0026	-0.0011	0.0037	0.0015
$2\pi$	0.0019	0.0000	0.0019	0.0019
$\frac{17\pi}{8}$	0.0011	0.0005	0.0006	0.0016
$\frac{9\pi}{4}$	0.0006	0.0006	0.0000	0.0012
$\frac{19\pi}{8}$	0.0002	0.0005	-0.0003	0.0007
$\frac{5\pi}{2}$	0.0000	0.0004	-0.0004	0.0004
$\frac{21\pi}{8}$	-0.0001	0.0003	-0.0004	0.0002
$\frac{11\pi}{4}$	-0.0001	0.0001	-0.0002	0.0000
$\frac{23\pi}{8}$	-0.0001	0.0001	-0.0002	0.0000
$3\pi$	-0.0001	0.0000	-0.0001	-0.0001

Der Zuschuß in der Ringdruckspannung,  $\Delta T_2$ , ist ein Maß für die elastisch unterstützende Wirkung der Unterlage, und  $\Delta T_2$  ist infolgedessen direkt proportional der Durchbiegung  $y$  des Meridians, also

$$\Delta T_2 = \frac{E\delta}{r} \cdot y \tag{7}$$

Das Ringmoment  $M_2$  schließlich ergibt sich am einfachsten durch Bestimmung der Krümmungsänderung der Ringe,<sup>4</sup> und man erhält bei Vernachlässigung des Einflusses der Quersammenziehung

$$M_2 = \cot \alpha \cdot \frac{EJ}{r} \cdot \frac{dy}{dx} \tag{8}$$

Setzt man in die Gleichungen 6, 7 und 8 die Gleichung für die Durchbiegung des Meridians ein:

$$y = - \frac{pr^3}{2E\delta} e^{-kx} (\cos kx + \sin kx)$$

so erhält man folgende Ausdrücke für  $\Delta T_1$ ,  $\Delta T_2$  und  $M_2$

$$\Delta T_1 = - \cot \alpha \frac{pr^2\delta^2}{6} k^3 e^{-kx} \cos kx \tag{6a}$$

$$\Delta T_2 = - \frac{pr}{2} e^{-kx} (\cos kx + \sin kx) \tag{7a}$$

$$M_2 = \cot \alpha \cdot \frac{pr\delta^2}{12} k e^{-kx} \sin kx \tag{8a}$$

Tabelle 2 enthält die so errechneten Werte der Meridian- und Ringspannungen und Ringmomente, verglichen mit den exakten Werten.

Tabelle 2.

Vergleich zwischen den angenäherten und exakten Werten der Meridian- und Ringspannungen und Ringmomente.

Neigungswinkel $\alpha$ des Meridians	$T_1 + \Delta T_1$ angenähert kg/cm	$T_1 + \Delta T_1$ exakt kg/cm	$T_2 + \Delta T_2$ angenähert	$T_2 + \Delta T_2$ exakt	$M_2$ angenähert kg cm/cm	$M_2$ exakt
40°	443	439	0	0	0	0
35°	474	481	215	193	99	113
30°	503	504	437	427	62	73
25°	506	508	517	520	12	17
20°	503	504	518	523	- 8	- 10
15°	501	501	511	510	- 9	- 14
10°	499	499	501	501	- 5	- 9
5°	499	498	499	498	0	- 3

Das oben durchgerechnete Problem entspricht den denkbar einfachsten Randbedingungen. Um die Anwendbarkeit der Methode auch bei komplizierteren

<sup>4</sup> Siehe z. B. *Föppl: Drang und Zwang*, Band 2. Berlin 1928.

Randbedingungen nachzuweisen, habe ich eine Kuppel durchgerechnet, die an einen umgebenden kreisrunden Zylinder gemäß Fig. 2 angeschlossen ist. Um das Problem einigermaßen zu vereinfachen, wurde der Wasserdruck auf die Kuppel als konstant angenommen. Dieses Problem ist von *Ekström* unter den gleichen Annahmen ausführlich behandelt worden. Tabelle 3 enthält für das Meridianmoment  $M_1$  und für die Ringspannung  $T_2$  die berechneten Werte verglichen mit den exakten.

Für alle Konstanten der Kuppel wird nachstehend der Index 1 benutzt, für die Konstanten des Zylinders der Index 2.

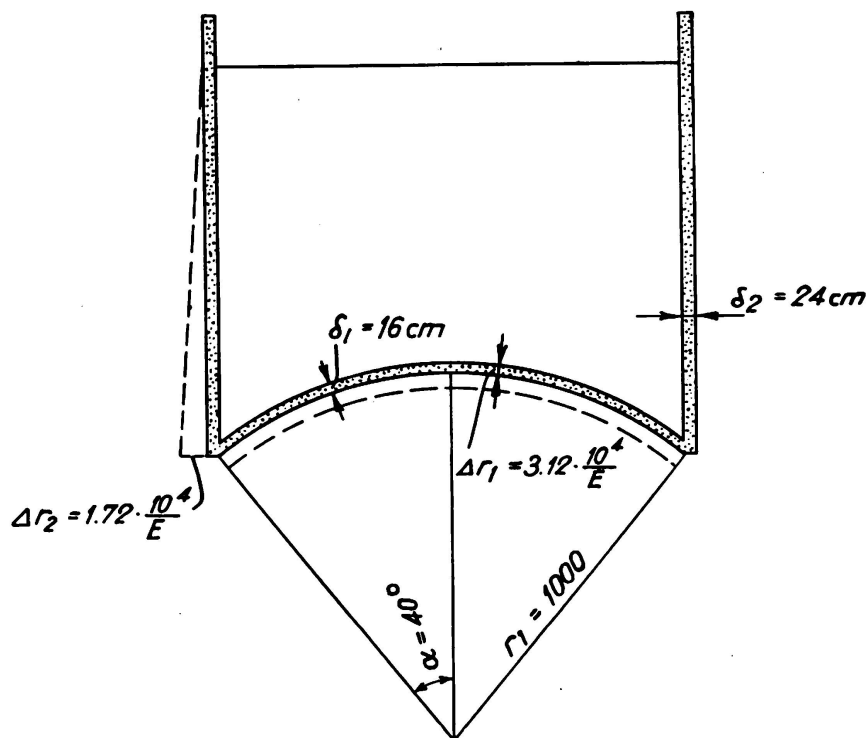


Fig. 2.

Die Berechnung dieser Kuppelkonstruktion wird in folgender Weise durchgeführt. Wenn die innere Kuppel und der Zylinder voneinander befreit werden und sich unter Einwirkung der Belastung unbehindert deformieren dürfen, ergibt sich nach der Membrantheorie

$$\text{eine Abnahme des Kuppelradius um } \frac{pr_1^2}{2E\delta_1} = \frac{p \cdot 10^4}{E} \cdot 3,12 \text{ cm}$$

$$\text{und eine Zunahme des Zylinderradius um } \frac{pr_2^2}{E\delta_2} = \frac{p \cdot 10^4}{E} \cdot 1,72 \text{ cm.}$$

Die Zylinderwand bildet dabei einen kleinen Winkel zur Senkrechten  $= \frac{10}{E} \cdot 1,72$ . (Siehe Fig. 2.)

Da dieser Deformationszustand mit den tatsächlichen Auflagerverhältnissen unvereinbar ist, müssen gewisse Zuschußkräfte und Zuschußmomente eingeführt werden, um den Stetigkeitsbedingungen Genüge zu leisten. Diese Stetigkeitsbedingungen sind folgende:

Zylinder und Kuppel sollen dieselbe Ausbiegung und Winkeländerung im Vereinigungspunkte haben, und der Vereinigungspunkt soll außerdem hinsichtlich der Momente und angreifenden Kräfte im Gleichgewicht sein. Dies bedeutet vier Randbedingungen, die mittels vier Gleichungen ausgedrückt werden können, wodurch sich alle unbekannt Formänderungen, Momente usw. bestimmen lassen.

Um die Aufstellung der Gleichungen zu erleichtern, folgen hier die allgemeinen Ausdrücke für die Ausbiegung und ihre Ableitungen. Man hat

$$\begin{aligned} y &= e^{-kx} [A \cos kx + B \sin kx] \\ y' &= k e^{-kx} [(B - A) \cos kx - (A + B) \sin kx] \\ y'' &= 2k^2 e^{-kx} [-B \cos kx + A \sin kx] \\ y''' &= 2k^3 e^{-kx} [(A + B) \cos kx + (B - A) \sin kx] \end{aligned} \quad (9)$$

Die erste Bedingung, daß die Ausbiegungen des Zylinders und der Kuppel am Rande selbst gleich groß sein sollen, läßt sich durch folgende Gleichung ausdrücken:

$$-A_1 \sin 40^\circ + A_2 = \frac{p \cdot 10^4}{E} (3,12 \sin 40^\circ + 1,72).$$

Damit die Winkeländerungen gleich groß werden, muß

$$k_1 (B_1 - A_1) = k_2 (B_2 - A_2) - \frac{10}{E} \cdot 1,72$$

sein, und für das Momentgleichgewicht gilt außerdem

$$k_1^2 EJ_1 B_1 = k_2^2 EJ_2 B_2.$$

Die restliche Bedingung soll ausdrücken, daß die horizontale Reaktion wegen Belastung der inneren Kuppel von der Scherkraft im Zylinder sowie von der Scherkraft und der Meridianspannung in der Kuppel aufgenommen werden soll, d. h.

$$-2k_1^3 EJ_1 (A_1 + B_1) \cdot \frac{1}{\sin 40^\circ} - 2k_2^3 EJ_2 (A_2 + B_2) = p \cdot 500 \cdot \cos 40^\circ.$$

Durch Elimination aus diesen vier Bedingungsgleichungen erhält man für  $p = 1 \text{ kg/cm}^2$  folgende Werte der Konstanten:

$$\begin{aligned} A_1 &= -15,35 \cdot \frac{10^4}{E} & B_1 &= -7,16 \cdot \frac{10^4}{E} \\ A_2 &= -6,13 \cdot \frac{10^4}{E} & B_2 &= 2,05 \cdot \frac{10^4}{E}. \end{aligned}$$

Das Problem ist damit vollständig gelöst; die Momente usw. kann man nun ohne Schwierigkeit für jeden beliebigen Punkt des Zylinders und der Kuppel berechnen. In Tabelle 3 sieht man einen Vergleich der berechneten und der exakten Werte für Meridianmoment und Ringspannung der Kuppel. Die Übereinstimmung ist in allen Punkten befriedigend.

Tabelle 3.

Meridianmomente und Ringdruckspannungen der Kuppel nach Fig. 2.

Neigungs- winkel $\alpha$ des Meridians	$M_1$ angenähert kgcm/cm	$M_1$ exakt kgcm/cm	$T_2 + \Delta T_2$ angenähert kg/cm	$T_2 + \Delta T_2$ exakt kg/cm
40°	— 5280	— 5560	— 1950	— 1930
35°	1450	2250	— 800	— 540
30°	1980	2200	401	613
25°	597	764	618	639
20°	— 6	9	572	593
15°	— 99	— 141	520	526
10°	— 54	— 80	498	498
5°	— 8	— 15	495	493

Diese zwei Beispiele lassen also erkennen, daß die hier gezeigte Methode für die Behandlung des Problems praktisch brauchbare und auch leicht zu findende Resultate ergibt.

Wie eingangs erwähnt, kommt die Annäherungslösung den exakten Werten umso näher, je steiler die Kuppel und auch je geringer ihre Wandstärke wird. Besonders dieser letzte Umstand ist, wie u. a. *Steuermann*<sup>5</sup> nachgewiesen hat, von großer Bedeutung. Die exakte Gleichung für die Ausbiegung des Meridians enthält nicht wie Gleichung 3b nur Ausdrücke vierter und nullter Ordnung, sondern auch Ausdrücke mit Derivaten erster, zweiter und dritter Ordnung, die aber alle mit Polynomen von  $\cot \alpha$  multipliziert sind. Mit zunehmendem  $\alpha$  verringert sich die Bedeutung dieser Ausdrücke, und für  $\alpha = 90^\circ$ , also beim Zylinder, fallen sie ganz weg, d. h. Gleichung 3b gilt exakt. Die Verringerung der Kuppelwandstärke hat ähnlichen Einfluß auf die vollständige Differentialgleichung. Warum dies der Fall sein muß, sieht man auch leicht direkt ein. Es kommt einfach daher, daß bei geringer Wandstärke die Bedeutung der Zusammendrückung des Meridians neben dem Einfluß der Krümmungsänderung klein wird. Dies bedeutet mit anderen Worten, daß man die Arbeit der Normalkräfte infolge Zusammendrückung des Meridians neben der Arbeit des Meridianmoments und der Ringspannungen bei dünnen Kuppeln vernachlässigen kann.

In den bisher behandelten Problemen wurde die Wandstärke überall als konstant angenommen. Wenn die Wandstärke  $\delta$  veränderlich ist, kann man nicht von Gleichung 3b ausgehen, sondern muß Gleichung 3a anwenden. Da die einfache Theorie des elastisch unterstützten Trägers in obigen Fällen, d. h. bei konstanter Wandstärke, hinlänglich genaue Resultate ergab, besteht Grund zu der Annahme, daß dies auch bei veränderlicher Wandstärke der Fall sein wird.

Die Theorie des elastisch unterstützten Trägers mit veränderlichem Trägheitsmoment und veränderlicher Unterstützung wurde bisher von verschiedenen Forschern<sup>6</sup> hauptsächlich mit Hilfe von Reihen studiert. Die dabei zutage gekom-

<sup>5</sup> E. *Steuermann*: Some Consideration on the Calculation of Elastic Shells. Internationale Tagung für technische Mechanik. Stockholm 1930.

<sup>6</sup> Siehe z. B. *Hayashi*: Theorie des Trägers auf elastischer Unterlage. Berlin 1921.

menen Ergebnisse sind für die Praxis leider mehr oder weniger unbrauchbar. Wegen der nahen Verwandtschaft der Gleichungen 3a und 3b ist es jedoch recht natürlich, daß die Lösungen beider Gleichungen im großen ganzen den gleichen mathematischen Aufbau haben. Deshalb liegt die Annahme nahe, daß man die Lösung der Gleichung 3a beispielsweise in folgender Form schreiben kann:

$$y = ue^{\pm z} (A \cos z + B \sin z) \quad (12)$$

worin  $u$  und  $z$  gewisse Funktionen von  $x$  sind. Unter Anwendung des *Blumenthalschen* sog. asymptotischen Integrationsverfahrens kann man die Funktionen  $u$  und  $z$  bestimmen, sodaß Gleichung 12 mit sehr guter Annäherung wirklich ein Integral der Gleichung 3a darstellt.

Wenn wir wie oben die Biegesteifigkeit des Trägers  $EJ = \frac{E \delta^3}{12}$  einführen, ergeben sich für die Funktionen  $u$  und  $z$  folgende Ausdrücke:

$$u = \frac{1}{\sqrt[4]{\delta^3}} \quad (13)$$

und 
$$z = \sqrt[4]{3} \int \frac{dx}{\sqrt{r\delta}} \quad (14)$$

Dieses Resultat erhält man in folgender Weise. Führt man die Ableitung der Gleichung 3a aus, dann ergibt sich nach Vereinfachung die Gleichung

$$y^{IV} + p_1 y''' + p_2 y'' + p_3 y' + p_4 y = 0 \quad (15)$$

worin

$$p_1 = 6 \frac{\delta'}{\delta}$$

$$p_2 = 3 \left( \frac{\delta'^2}{\delta^2} + \frac{\delta''}{\delta} \right)$$

$$p_3 = 0$$

$$p_4 = \frac{12}{r^2 \delta^2}$$

ist. Multipliziert man die Gleichungen

$$v = f(z)$$

$$v' = f' z'$$

$$v'' = f' z'' + f'' z'^2$$

$$v''' = f' z''' + 3 f' z' z'' + f''' z'^3$$

$$v^{IV} = f' z^{IV} + f'' (4 z' z''' + 3 z''^2) + 6 f''' z'^2 z'' + f^{IV} z'^4,$$

worin  $f'$  soviel wie  $\frac{df}{dz}$  und  $z'$  soviel wie  $\frac{dz}{dx}$  bedeutet, der Reihe nach mit den Faktoren  $Q_4, Q_3, Q_2, Q_1$ , und 1 und addiert sie, so erhält man, wenn das linke Glied gleich Null gesetzt wird, erstens die Gleichung

$$v^{IV} + v''' Q_1 + v'' Q_2 + v' Q_3 + v Q_4 = 0 \quad (16)$$

und zweitens, wenn die Faktoren  $f'$ ,  $f''$  und  $f'''$  jeder für sich gleich Null gesetzt werden

$$\begin{aligned} z^{IV} + z'''' Q_1 + z'' Q_2 + z' Q_3 &= 0 \\ (4 z' z'''' + 3 z'^2) + 3 z' z'' \cdot Q_1 + z'^2 Q_2 &= 0 \\ 6 z'^2 z'' + z'^3 Q_1 &= 0 \end{aligned} \quad (17)$$

Aus diesen Gleichungen kann man  $Q_1$ ,  $Q_2$  und  $Q_3$  lösen, während die Funktion  $f(z)$  durch die übrige Bedingung

$$f^{IV} z^4 + Q_4 \cdot f = 0 \quad (18)$$

bestimmt wird.

Wählt man den Faktor  $Q_4$  gleich  $4z^4$ , dann verwandelt sich die Gleichung 18 in

$$\frac{d^4 f}{dz^4} + 4f = 0$$

d. h.  $f(z) = e^{\pm z} (A \cos z + B \sin z) \quad (19)$

worin  $z$  durch die Bedingung

$$\frac{dz}{dx} = \sqrt[4]{\frac{Q_4}{4}} \quad (20)$$

bestimmt wird.

Wenn man in Gleichung 15 nun  $y = uv$  einführt, erhält man beim Einsetzen und nach Division durch  $u$

$$\begin{aligned} v^{IV} + v'''' \left( \frac{4u'}{u} + p_1 \right) + v'' \left( \frac{6u''}{u} + \frac{3u'}{u} p_1 + p_2 \right) \\ + v' \left( \frac{4u'''}{u} + \frac{3u''}{u} p_1 + \frac{2u'}{u} p_2 + p_3 \right) + v p_4 = 0 \end{aligned} \quad (21)$$

Durch Gleichstellen der Koeffizienten für  $v$  und  $v''''$  in den Gleichungen 16 und 21 kann man die unbekannt Funktionen  $Q_4$  und  $u$  bestimmen. Man erhält demnach  $Q_4 = p_4$  und folglich nach Gleichung 20

$$z = \int \sqrt[4]{\frac{p_4}{4}} dx$$

oder, mit  $p_4 = \frac{12}{r^2 \delta^2}$ ;  $z = \sqrt[4]{3} \int \frac{dx}{\sqrt{r\delta}} \quad (14)$

Aus der Bedingung  $\frac{4u'}{u} + p_1 = Q_1$

erhält man unter Anwendung der letzten der Gleichungen 17

$$\frac{4u'}{u} = -p_1 - \frac{3}{2} (\log p_4)'$$

oder  $u = \frac{1}{\sqrt[4]{\delta^3}} \quad (13)$



Faßt man das Ergebnis obiger Rechnungen zusammen, so kann man die Lösung der Gleichung 3a unter Vernachlässigung der Ausdrücke, die den Faktor  $e^z$  enthalten, also in folgender Form schreiben:

$$y = \frac{1}{\sqrt[4]{\delta^3}} e^{-z} (A \cos z + B \sin z) \quad (12a)$$

worin  $z$  durch die Bedingung  $z = \sqrt[4]{3} \int \frac{dx}{\sqrt{r\delta}}$

bestimmt wird.

Beim ersten Anblick erscheint vielleicht die Gleichung 12a umständlich und wenig geeignet für praktischen Gebrauch wegen des verwickelten Aufbaues der

Funktion  $z$  und des zusätzlichen Faktors  $\frac{1}{\sqrt[4]{\delta^3}}$ . In der Praxis aber stellt sich der

Fall einfacher. Die Funktion  $z$  braucht nämlich nie anders als zahlenmäßig angegeben zu werden und läßt sich deshalb leicht aus Gleichung 14 z. B. nach der Trapezregel berechnen. Bei Berechnung der Ableitungen von Gleichung 12a ergeben sich, wenn man keine Annäherungen einführt, ziemlich komplizierte Ausdrücke. Beachtet man aber, daß die Ableitungen  $z''$ ,  $z'''$ ,  $u''$  und  $u'''$  bei den in der Praxis vorkommenden Abmessungen klein sind und daher vernachlässigt werden können, erhält man die Ableitungen von  $y$  in folgender Form

$$\begin{aligned} y &= u e^{-z} (A \cos z + B \sin z) \\ y' &= u z' e^{-z} [(B - \mu A) \cos z - (A + \mu B) \sin z] \\ y'' &= 2 u z'^2 e^{-z} [-(\mu B + \gamma A) \cos z + (\mu A - \gamma B) \sin z] \\ y''' &= 2 u z'^3 e^{-z} [(A + \mu_1 B) \cos z + (B - \mu_1 A) \sin z] \end{aligned} \quad (9a)$$

worin 
$$v = \frac{u'}{u z'}$$

$$\mu = 1 - v$$

$$\mu_1 = 1 - 3v.$$

Für den Fall, daß die Wandstärke konstant ist, wird  $\gamma = 0$  und  $\mu = \mu_1 = 1$ , wobei obige Gleichungen genau dieselben werden wie die Gleichungen 9.

Die Gleichungen 9a sind also in derselben Weise aufgebaut wie die in den Gleichungen 9 angegebenen Ableitungen für einen Träger mit konstanter Biegesteifheit. Die Berechnung einer Kuppel mit veränderlicher Wandstärke läßt sich demnach in gleicher Weise und mit wenig mehr Mühe durchführen wie bei gleichmäßiger Wandstärke. Die oben durchgerechneten Beispiele (siehe Fig. 1 und 2) sind also auch für den Fall vorbildlich, daß  $\delta$  veränderlich ist, und die Gleichgewichtsgleichungen sind ebenso aufzustellen, nur mit den Abänderungen, die durch den Unterschied zwischen den Gleichungen 9 und 9a bedingt sind.

Bisher haben wir bei der Behandlung des Kuppelproblems nicht berücksichtigt, daß sich die Meridianträger nach oben hin verjüngen und im Scheitel der Kuppel die Breite Null haben, vielmehr haben wir bei ihnen eine konstante Breite angenommen. Dies entspricht der Wirklichkeit nur dann, wenn die Kuppel zylindrisch ist, aber bei Kuppeln im allgemeinen liegt in jener Annahme ein gewisses Annäherungsverfahren. Wenn wir die Verjüngung berück-

sichtigen, können wir bei sphärischer Kuppel das Trägheitsmoment des Meridianträgers in gewissem Winkelabstand  $\alpha$  vom Scheitel folgendermaßen schreiben:

$$J = \frac{\delta^3}{12} \cdot \frac{\sin \alpha}{\sin \alpha_0} \quad (21)$$

Mit diesem Ausdruck für das Trägheitsmoment erhalten wir für die Funktionen  $u$  und  $z$

$$u = \frac{1}{\sqrt[4]{\delta^3}} \cdot \frac{1}{\sqrt[8]{\sin \alpha}}$$

und

$$z = \sqrt[4]{3} \int \frac{1}{\sqrt{r\delta}} \cdot \sqrt[4]{\frac{\sin \alpha_0}{\sin \alpha}} dx.$$

Die obigen Ableitungen, die sich hauptsächlich auf das Kuppelproblem beziehen, lassen sich natürlich auch auf zylindrische Behälter und ähnliche Konstruktionen anwenden, die als Sonderfälle der Kuppel aufzufassen sind. Die für Berechnung solcher Behälter üblichen Methoden,<sup>7</sup> denen Reihenentwicklungen zugrunde liegen, lassen sich vorteilhaft durch die oben angegebene Methode ersetzen. Einen interessanten Sonderfall dieses Problems begegnet man bei der Berechnung von massiven Gewölbedämmen. Bisher ging man bei Behandlung derartiger Probleme von Gleichung 3 b aus und führte einen Mittelwert der Wandstärke ein.<sup>8</sup>

Bei Behandlung der Gleichung 3 a nach obiger Methode kann man ohne Schwierigkeit die in verschiedenen Richtungen und an verschiedenen Punkten vorkommende Anisotropie der Konstruktion berücksichtigen. Es kann sich dabei um eine reine Materialerscheinung oder um eine rein konstruktive Anisotropie handeln. Beispielsweise durch das Einlegen verschiedener Mengen von Armierungseisen in verschiedenen Richtungen wird der scheinbare Elastizitätsmodul des Baustoffes in verschiedenen Richtungen verschieden, was als Materialanisotropie bezeichnet werden darf; und eine gewisse konstruktive Anisotropie kann man in einem zylindrischen Behälter oder einer Kuppel zuwege bringen, indem man in der Richtung der Generatrix oder des Meridians Verstärkungsträger anbringt (Rippenkuppel). Unter solchen Umständen kann Gleichung 3 a nicht in der Form geschrieben werden, die sie in Gleichung 15 erhalten hat, vielmehr bekommen die Koeffizienten  $p_1$  bis  $p_4$  folgendes Aussehen

$$p_1 = \frac{2 (E_1 J)'}{E_1 J}$$

$$p_2 = \frac{(E_1 J)''}{E_1 J}$$

$$p_3 = 0$$

$$p_4 = \frac{E_2 \delta}{r^2 E_1 J}$$

<sup>7</sup> Siehe *Lorenz*: Technische Elastizitätslehre. Berlin 1913. *H. Reißner*: Beton und Eisen 7, 150, 1908. *T. Pöschl* und *K. Terzaghi*: Berechnung von Behältern. Berlin 1913.

<sup>8</sup> *N. Royen*: Tvärödammen vid Norrfors kraftverk (Der Damm von Tvärö am Kraftwerk Norrfors). Zeitschrift *Be'ong*, Heft 2, 1926.

und die Funktionen  $z$  und  $u$  erscheinen demnach in folgender Form

$$z = \int \sqrt[4]{\frac{E_2 \delta}{4 r^2 E_1 J}} dx$$

und

$$u = \sqrt[8]{\frac{r^6}{E_1 J \cdot E_2^3 \delta^3}}$$

Da man weder für  $u$  noch für  $z$  einen mathematischen Ausdruck benötigt, bringt die Einführung der Gleichungen 22 und 23 keine Erschwerung der Berechnungen mit sich.

### Zusammenfassung.

Durch die Aufteilung der Schale in zwei Scharen von einander kreuzenden Trägern können wir ein klares Verständnis der statischen Wirkungsweise der Konstruktion erhalten. Die auftretenden Momente und Spannungen können wie bei dem Balken auf elastischer Unterlage berechnet werden. Da die strenge Theorie zu Lösungen in Form von unendlichen Reihen führt, die unter gewissen Bedingungen nur langsam konvergieren, sind durch die angegebene Methode praktische Vorteile zu gewinnen.

Leere Seite  
Blank page  
Page vide

## IVa 4

Versteifte oder unversteifte Flächentragwerke.

Ouvrages à parois minces renforcées ou non par des raidisseurs.

Shell Structures with or without Stiffeners.

R. Vallette,

Ingénieur aux Chemins de fer de l'Etat, Paris.

Die Frage der Flächentragwerke wurde bereits auf dem Pariser Kongreß behandelt; die seitherige Entwicklungsrichtung soll nunmehr hier erörtert werden.

Man kann zwei Arten von Flächentragwerken unterscheiden: Solche, bei denen die Steifigkeit der Wand für die Widerstandsfähigkeit des Systems in Rechnung gestellt wurde und solche, wo diese Widerstandsfähigkeit vernachlässigt wurde, die Wandung also nur für tangential zur Mantelfläche wirkende Kräfte widerstandsfähig ist, und als reine Membran wirkt.

Es sind also zu betrachten:

1. biegungsfeste dünne Wandungen,
2. Membranen.

Hier sollen nur Bauteile mit biegungsfesten dünnen Wandungen untersucht werden; die Bauten mit Membranwandungen bilden den Gegenstand einer besonderen Arbeit des Herrn *Aimond* (siehe IVa 1 dieses Vorberichtes).

### *I. Bauten mit biegungsfesten dünnen Wandungen.*

#### *A. Konstruktion.*

*Allgemeines.* Schon seit Beginn des Eisenbetonbaues hat man die flächenartigen Wandungen (z. B. bei Hohlkörperdecken) für den allgemeinen Widerstand des Tragwerks zur Mitwirkung herangezogen. Diese Ausnutzung des monolithischen Zusammenhanges ist schließlich eine der wichtigen Eigenarten des Eisenbetons. Später aber wurde eine vollständigere Ausnutzung der Festigkeit der Flächen in Betracht gezogen, indem die Wandungen zum Hauptelement der Tragfähigkeit wurden, wie bei den tragenden Wänden der Behälter, Silos, Gewölbe usw.

#### *Anwendungen im Hoch- und Tiefbau.*

1. *Behälterbauten.* Bei den Behältern wurde die in sich tragende Wand selbständig für die Böden, die Vorkragungen und die Dachgewölbe verwendet, aber die Steifigkeit der Wand wurde nur ausnahmsweise in Rechnung gestellt.

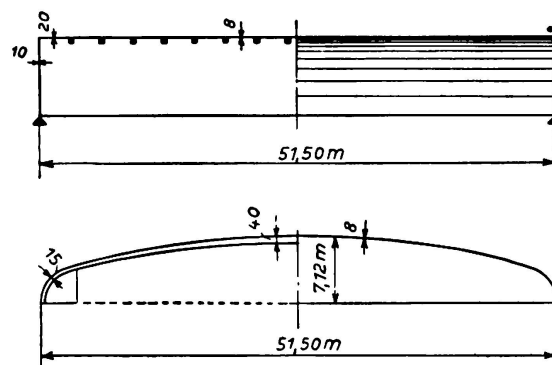
2. *Silos.* Für Silos wurde die Verwendung der tragenden Wand, die im Anfang nur eine teilweise war, zu einer vollständigen gemäß dem Verfahren von *M. Freyssinet*, worüber er auf dem Pariser Kongreß einen Bericht gegeben hat. Diesem Bericht haben wir nichts hinzuzufügen, da sich seither keine neuen Gesichtspunkte ergeben haben.

### 3. *Gewölbebauten.*

- a) *Gewöhnliche Gewölbe.* Auf dem Gebiete der normalen Gewölbe hat *M. Freyssinet* schon auf dem Pariser Kongreß eine neue Richtung angegeben, indem er erklärte, daß er für die Luftschiffhalle in Orly, wenn er sie neu zu bauen hätte, ein Rippensystem mit einem Abstand von 25 m zwischen den Tragrippen zur Anwendung bringen würde. Diese Erklärung ist umso beachtenswerter, als die Hallen von Orly (vergl. Génie Civil 22. September bis 6. Oktober 1923) in ihrer bestehenden Form (1922 errichtet) als das bemerkenswerteste Beispiel und als Vorläufer der selbsttragenden Systeme mit zahlreichen kleinen Tragwerken, wie sie später in Mitteleuropa eingeführt wurden, betrachtet werden können.

Tatsächlich verwendete man dort Träger von 7,50 m Öffnung und 90 m Spannweite, bei denen die Tragfähigkeit der Wände die allgemeine Biegung vollständig übernimmt. (Konstruktion *Freyssinet-Limousin*).

Seit dem Pariser Kongreß hat sich diese Tendenz erhalten; in einem Falle wurde ein Tonnengewölbe von  $51,50 \times 51,50$  m entworfen, das nur in den vier Ecken gestützt war, während die Fläche völlig selbsttragend war und nur kleine, ganz untergeordnete Versteifungsrippen erhielt, ohne



*Schnitt durch Axe*  
*Coupe dans l'axe*  
*Cross section thro Centre line*

Fig. 1.

Tonnengewölbe von  
51,50 m Spannweite

daß irgendwelche Randträger zur Stützung herangezogen wurden (Fig. 1) — (Entwurf *Boussiron*). Man kann diese Bauart als Grenzfall jener Gewölbeart betrachten, die seit 1910 in Frankreich von mehreren Konstrukteuren verwendet wurde und bei der ein Teil der gewölbten Fläche als Tragbalken (Kämpferbalken) zwischen den in mehr oder weniger großem Abstand stehenden Säulen der Längsseite benutzt wird. Ursprünglich war die ausgenutzte Gewölbehöhe *OA* gering (Fig. 2) und eine Randrippe *ON* erhöhte die Tragfähigkeit. Später erhöhte man die mitwirkende Höhe *OA*,

ließ die mitwirkende Rippe ON verschwinden und vergrößerte die Tragfähigkeit zwischen den Stützen erheblich. Heute wird die ganze Wölbung für beliebige Spannweite ohne Randträger ausgenutzt.

b) *Andere Gewölbetypen.*

1. Eine Abart der Bauart von Orly wurde bei einem Doppel-Flugzeugschuppen in Cherbourg verwirklicht. Das Gewölbe besteht ganz aus dünnen Elementen (Fig. 3), die, wie in Orly, allein die Tragfähigkeit des Systems bestimmen. Die Wandung wirkt außerdem selbsttragend zwischen den Randsäulen. (S<sup>te</sup> Rabut Subileau.)

2. Kegelförmige Gewölbe, die Sheddächer bilden (*Freyssinet-Limousin*), wurden bei Bauten vielfach verwendet (Werke von Montrouge, Caen,

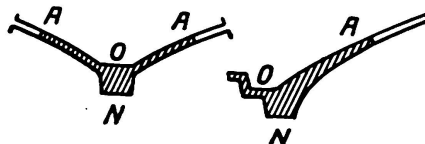


Fig. 2.

Randträger.

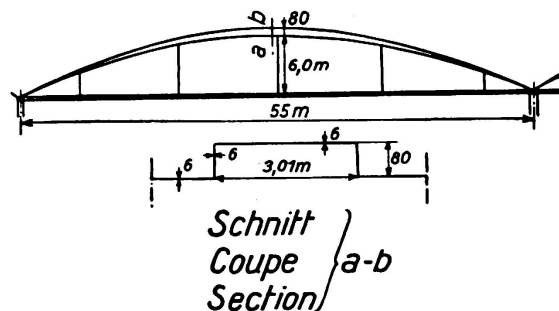


Fig. 3.

Doppelschuppen in Cherbourg.

Fontenay usw.); sie waren Gegenstand einer Arbeit von *Fauconnier* in Band 2 der Abhandlungen unserer Vereinigung, so daß sich eine eingehende Betrachtung erübrigt. Die Gewölbe wirken als Träger zwischen den Kämpfersäulen.

4. *Andere Bauarten.* Andere Gewölbearten wie Kuppeln über rechteckigem Grundriß, Gratgewölbe, Klostersgewölbe usw. wurden von verschiedenen Entwurfsverfassern anläßlich der offenen Wettbewerbe für die Ausführung von Flugzeughallen auf den Flughäfen vorgeschlagen. Aber diese Typen sind noch nicht genügend entwickelt, um schon eine bestimmte Ausrichtung erkennen zu können oder viel Aufhebens davon zu machen.

Eine bemerkenswerte Konstruktion von ganz abweichender Art stellt der große Windkanal von Chalais-Meudon dar, der in der Nähe von Paris für die Prüfung der Flugzeuge gebaut wurde.<sup>1</sup> Hier wurden verschiedene freitragende Flächenelemente verwendet, im besonderen ein Wind-Ausgleichsrohr mit überwältigenden Abmessungen (Fig. 4), das nur an zwei Stellen im Abstand von 34 m gelagert ist und sich bei 7 cm Wandstärke und einer Versteifung durch kleine Rippen, die im Abstand von 3,60 m stehen, vollkommen freitragt. (Ausführung *Limousin*.)

5. *Schlußfolgerungen.* Zusammenfassend kann man in Frankreich auf dem Gebiet der biegungssteifen Flächentragwerke einerseits tastende Versuche zur Auffindung neuer Gewölbeformen ohne eine bestimmte Ausrichtung nach einem bestimmten Typ feststellen, andererseits aber besteht für die schon feststehenden

<sup>1</sup> S. „Génie Civil“ vom 3. Nov. 1934.



Typen die bestimmte Tendenz, die Tragfähigkeit der Flächen vollständig auszunützen. Dabei geht man auch so weit, daß man den ganzen Querschnitt zur Tragwirkung mit heranzieht (große Dachgewölbe, Windkanal Chalais-Meudon), wenn die Spannweite es erlaubt. Man kann es als kennzeichnend für die französischen Bauten bezeichnen, daß im allgemeinen bei den Gewölben das reine Flächentragwerk ohne Hinzufügung von Randbalken oder anderen unterstützenden Traggliedern verwendet wird.

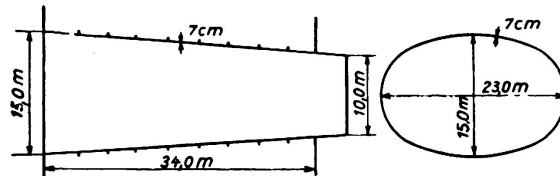


Fig. 4.

Diffusor im Windkanal von Chalais-Meudon.

### B. Berechnung.

1. *Ebene Wände.* Für die Berechnung der ebenen Wände verweisen wir auf die Methode, die von *L'Hermite* im „Génie Civil“ vom 29. April 1933 angegeben wurde.

2. *Selbsttragende Gewölbe verschiedener Art.* Unmittelbar nach den ersten Ausführungen von gewölbten Eisenbetondächern fing man an, die Flächen des Gewölbes als Kämpferbalken zur Aufnahme des Kämpferdruckes heranzuziehen.<sup>2</sup>

Diesen Balken, der nur durch einen geringen Teil des Gewölbes gebildet wurde, betrachteten die Konstrukteure als einen unabhängigen, gewöhnlichen geraden Balken und berechneten ihn auch als solchen. Dies führte zu reichlichen Querschnitten, aber der damit verbundene Mehrverbrauch an Material spielt bei kleinen Stützenabständen keine Rolle, so daß man keine Ursache hat, auf verwickeltere Berechnungsmethoden zurückzugreifen.

In den allerdings selten vorkommenden Fällen, daß der Entwurf zu großen Stützenabständen führt, wird die mitwirkende Höhe des Gewölbes einen gekrümmten Querschnitt aufweisen, so daß besondere Untersuchungen notwendig werden. Wir wissen, daß gewisse Konstrukteure (besonders *Boussiron*) eine persönliche Lösung hierfür hatten, wenn sie sie auch nicht veröffentlichten. Ich habe darum selbst eine einfache Lösung hierfür entwickelt,<sup>3</sup> welche einerseits die Berechnung eines solchen Balkens umfaßt und andererseits auch die Lösung für das vollständige Tonnengewölbe von beliebiger Form gibt, das nur an den Ecken gestützt ist.

Diese Methode führt für die gekrümmten Querschnitte der Flächentragwerke die Biegungstheorie ein und sucht hinsichtlich der eingeführten Nebenspannungen die entsprechenden Folgerungen; sie bestimmt vor allem die Querbiegung, die in einem Gewölbering unter dem Einfluß der in Richtung der Leitlinien des Tonnengewölbes wirkenden Tangentialkräfte entstehen. Bei der Anwendung dieser Methode auf große Spannweiten hat sie sich als vollständig und sehr sicher erwiesen und ergab Resultate, die mit den an Modellen, an einem Versuchsgewölbe und an ausgeführten Bauten gemachten Beobachtungen übereinstimmen.

<sup>2</sup> S. „Génie Civil“ vom 27. Jan. 1934.

<sup>3</sup> S. „Génie Civil“ vom 27. Jan. 1934.

3. *Andere Bauformen.* Dieselbe Berechnungsart kann auch auf geschlossene Rohre angewendet werden, und sie bildet auch die Grundlage für die Berechnung des im vorstehenden schon beschriebenen großen Windkanals in Chalais-Meudon, wie sie in dem Bericht über diese Arbeiten enthalten ist.<sup>3</sup>

Bei den Kuppeln genügt im allgemeinen eine ganz einfache Rechnung, da die Steifigkeit der Schale nur bei Einzellasten von Wichtigkeit ist. Ihr Einfluß ist jedoch sehr begrenzt und da man in jedem Punkt auf Meridian- und Parallelkreise stößt, wird man meistens wieder auf den Membranspannungszustand zurückgeführt.

Für die anderen Bauformen mit biegungssteifer Schale sind in Frankreich keine besonderen Berechnungsmethoden in der technischen Literatur zu finden; sie sind noch nicht genügend erforscht und bleiben einstweilen noch das persönliche Arbeitsfeld einzelner Konstrukteure.

4. *Schlußfolgerungen.* In Frankreich haben die Berechnungsmethoden für biegungssteife Flächentragwerke jenes Prinzip der Einfachheit bewahrt, das die Regel für alle Fragen im Eisenbetonbau war. Hat man es doch in der Tat mit einem Material und mit Bauformen zu tun, die zusammengesetzt und veränderlich sind, so daß man umsonst nach Gesetzen suchen würde, die unter diesen Arbeitsbedingungen alle Erscheinungen bei der Belastung klären würden. Man hat allen Grund, sich nur an die Grundtatsachen zu halten, welche sich aus einfachen Gesetzen ableiten (*Hook'sches Gesetz, Navier'sches Gesetz*) und sich in einfachen Gesetzen annäherungsweise, aber doch sicher ausdrücken lassen.

Das Ziel liegt übrigens nicht darin, eine rein mathematische Lösung zu erhalten. Es handelt sich nur darum, die in einem bestimmten System auftretenden Beanspruchungen festzustellen, damit sowohl ein übermäßiger Materialaufwand, wie auch eine nennenswerte Unterbemessung vermieden wird. Die Ableitung solcher praktischen Lösungen muß also von den angeführten einfachen Grundlagen ausgehen und alle Rechenmöglichkeiten ausnützen, um zu sicheren partikulären Lösungen zu kommen, die einfach anzuwenden sind. Es dürfte nützlich sein, hier darauf hinzuweisen, daß in der Geschichte des Eisenbetonbaues die endgültigen Berechnungsmethoden erst dann aufgestellt wurden, als durch unsere großen Konstrukteure schon solche Bauten ausgeführt waren.

Die Phantasie, das technische Gefühl, das Verständnis für das Kräftespiel sind von den Schöpfungen der Baukunst nicht zu trennen und hatten dem Konstrukteur genügt, um den neu geschaffenen Typ zu verstehen, festzulegen und zu berechnen. In der Tat kann eine Kraft zahlenmäßig nur annähernd festgelegt sein, wenn sie nur qualitativ richtig ist. Bei den vielen Einzelheiten, die bei der Ausführung eines Eisenbetonbaues zu bestimmen sind, ist hauptsächlich diesem letzteren Punkte die größte Aufmerksamkeit zuzuwenden und hier erfordert die Lösung jenes Maß an technischem Gefühl, das eben den guten Konstrukteur ausmacht.

Die Berechnung der biegungssteifen Flächentragwerke hat diese Entwicklung genommen, bewahrt diese Richtung auch und wird bei der Bestimmung des wesentlichen Kräftespieles dieser Konstruktionsart auch nie von der Einfachheit und Klarheit lassen.

### Zusammenfassung.

Betrachtung der Schalenkonstruktionen unter Berücksichtigung der wirklichen Steifigkeit.

Nach einer kurzen geschichtlichen Einleitung wird angegeben, daß in Frankreich im gegenwärtigen Stadium die Schalen einzig und allein als Tragelemente verwendet werden ohne Zuhilfenahme irgend eines Randbalkens, ob es sich um Systeme mit mehrfachen kleinen Gewölben (Typus der Halle von Orly), um ein einziges großes Gewölbe oder um ein Gewölbe aus Ringen bestehend (Windkanal von Mendon) handle.

Es wird ferner bemerkt, daß die Berechnung der Tragwerke mit der im Eisenbetonbau in Frankreich üblichen Klarheit durchgeführt wird. Dies erlaubt dem Konstrukteur bei einer einwandfreien Berücksichtigung der Kräfte die neuerschaffenen Tragwerkstypen in freier Weise anzuwenden und zu entwickeln.