

# Berechnung der Stahlbeton Fertigteil-Konstruktionen verbunden an Ort und Stelle

Autor(en): **Goschy, Béla**

Objektyp: **Article**

Zeitschrift: **IABSE congress report = Rapport du congrès AIPC = IVBH  
Kongressbericht**

Band (Jahr): **5 (1956)**

PDF erstellt am: **22.07.2024**

Persistenter Link: <https://doi.org/10.5169/seals-6026>

## **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern.

Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden.

Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

## **Haftungsausschluss**

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

## **Vla4**

### **Berechnung der Stahlbeton Fertigteil-Konstruktionen verbunden an Ort und Stelle**

**Cálculo de estruturas de betão armado com elementos  
prefabricados, ligados no local da obra**

**Calcul des constructions en béton armé exécutées en  
éléments préfabriqués montés sur place**

**Calculation of reinforced concrete structures incorporating  
precast elements erected at the site**

BÉLA GOSCHY

Budapest

#### **1.) Einleitung.**

Die Wirkungsweise der an Ort und Stelle verbundenen Stahlbeton-Fertigteil-Systeme unterscheidet sich von den monolythischen Stahlbeton-Konstruktionen und dadurch wird die Statik und Bemessung der Stahlbeton-Verbundkonstruktionen wesentlich beeinflusst. Ausserdem müssen noch die Zeitveränderlichkeit, die plastischen Verformungen (Kriechen und Schwinden) des Betons, sowie die Montage dieser Konstruktionen bei den Rechnungen beachtet werden. Die Untersuchung dieses Verhaltens ist das Ziel der vorliegenden Arbeit.

Die Stahlbeton-Fertigteilbauten können ohne Gerüst, als selbsttragende Tragwerke ausgebildet werden. In diesem Falle wird das Gesamtgewicht (Fertigteil- und Ortsbetongewicht) allein von dem *Fertigteil* getragen. Sie können aber völlig oder nur teilweise auf Gerüst gebaut werden, in diesem Falle wird das Gesamtgewicht, einschliesslich die Nutzlast von dem *Verbund-System* getragen. Die Rechnungsverfahren werden auf diese zwei Grundfälle ausgerichtet.

Der mit dem Ortsbeton zusammenwirkende Fertigteilbalken bildet innerlich ein statisch unbestimmtes System. Bei der Vermittlung der unbekanntenen statischen Grössen -wie es bei den statisch unbestimmten Stahlbetonsystemen üblich ist- rechnen wir mit dem homogenen Betonquerschnitt.

**2.) Bezeichnungen.**

$F_1, J_1, W_1, i_1^2 = \frac{J_1}{F_1}$	Querschnittsgrössen des Fertigteils
$F_2, J_2, W_2, i_2^2 = \frac{J_2}{F_2}$	Querschnittsgrössen des Ortsbetonteils
$P_o, M_o$	äussere Druckkraft, Biegemoment
$P_1, M_1, N_o$	Last- und Momentenanteil des Fertigteils
$P_2, M_2, N_o$	Last- und Momentenanteil des Ortsbetonteils
$P_B, M_B$	Bruchkraft, Bruchmoment
$\varphi_1, \varphi_{1,t}; \varphi_{1\infty}$	Kriechzahl des Fertigteils
$\varphi_2, \varphi_{2,t}; \varphi_{2\infty}$	Kriechzahl des Ortsbetons
$k_1, k_2$	Prismenfestigkeit des Betons
$\sigma_f$	Fliessgrenze des Stahls
$\sigma_{10}, \sigma_{20}$	zulässige Betondruckspannung bei mittigem Druck
$\sigma_{1b}, \sigma_{2b}$	zulässige Betondruckspannung bei reiner Biegung.

**3.) Einfluss des Kriechens und des Schwindens.**

Die Fertigbauteile und die an Ort und Stelle betonierten Trägerteile kriechen nach verschiedenen Gesetzen, die von dem Betonalter und der Betongüte, wie auch von dem Beginn der Belastung abhängig sind.

Der Stahlbeton-Fertigteil beginnt mit  $\Delta t$  früher zu kriechen als der Ortsbeton, nach folgendem Gesetz:

$$\varphi_1, t_1 = \varphi_{1\infty} (1 - e^{-t_1}) \quad (1)$$

Die Kriechlinie des Ortsbetons hat die folgende Form:

$$\varphi_2, t_2 = \varphi_{2\infty} (1 - e^{-t_2}) \quad (2)$$

Die beiden Zeitpunkte stehen in folgendem Zusammenhang:

$$t_1 = t_2 + \Delta t$$

Wenn wir den Zeitpunkt der Wirkung der ständigen Last mit  $t_{10}$  bzw.  $t_{20}$  bezeichnen, so kriechen die einzelnen Trägerteile nach:

$$\bar{\varphi}_1, t_1 = \varphi_1, t_1 - \varphi_1, t_{10} = \varphi_{1\infty} (e^{-t_{10}} - e^{-t_1}) \quad (3)$$

$$\bar{\varphi}_{2, t_2} = \varphi_{2, t_2} - \varphi_{2, t_{20}} = \varphi_{2\infty} (e^{-t_{20}} - e^{-t_2}) \quad (4)$$

Da zwischen den beiden Funktionen eine Affinität besteht, kann man die Kriechfunktion des Fertigteils als Funktion des Ortsbetonteils ausdrücken:

$$t_{10} = t_{20} + \Delta t; \nu = \frac{\varphi_{1\infty}}{\varphi_{2\infty}} \text{ und } \mathcal{H} = e^{-\Delta t}$$

Die Funktionen des Kriechens:

$$\bar{\varphi}_{1, t_1} = \nu \mathcal{H} \varphi_{2\infty} (e^{-t_{20}} - e^{-t_2}) = \nu \mathcal{H} \bar{\varphi}_{2, t_2} \quad (5)$$

$$\bar{\varphi}_{2, t_2} = \varphi_{2\infty} (e^{-t_{20}} - e^{-t_2}) \quad (6)$$

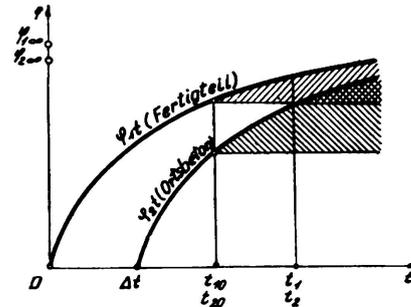


ABB. 1. Kriechkurven der Trägereile. Die Belastung beginnt zur Zeit  $t_{10}$  bzw.  $t_{20}$

Bei der Berücksichtigung des Kriechens kann man zwei Sonderfälle unterscheiden:

- a.) Ist der Fertigteil nicht mehr kriechfähig, so erleidet er unter der ständigen Last keine Verformungen. In diesem Falle ist  $\Delta t = \infty$  und  $\bar{\varphi}_{1, t_1} = 0$

$$\bar{\varphi}_{2, t_2} = \varphi_{2\infty} (e^{-t_{20}} - e^{-t_2})$$

- b.) Wird der Ortsbeton sofort nach dem Erhärten belastet, dann ist  $t_{10} = \Delta t$  und  $t_{20} = 0$ , und die Kriechfunktionen:

$$\bar{\varphi}_{1, t_1} = \nu \mathcal{H} \varphi_{2\infty} (1 - e^{-t_2}) = \nu \mathcal{H} \bar{\varphi}_{2, t_2} \quad (5-a.)$$

$$\bar{\varphi}_{2, t_2} = \varphi_{2\infty} (1 - e^{-t_2}) \quad (6-a.)$$

Bei der Berücksichtigung des Kriechens werden wir die Aenderung des  $E_b$  -als unbedeutende- vernachlässigen.

Das Schwinden ist eine dem Kriechen affine Erscheinung; so können wir die Schwindfunktion proportional der Kriechfunktion auffassen. Das

Verhältnis zwischen den beiden Funktionen ist durch  $\frac{\varepsilon_{\infty}}{\varphi_{\infty}}$  gegeben, wo  $\varepsilon_{\infty} = \omega T^{\circ}$  ist. Das Schwindmass wird wegen der Schwindbewehrung vermindert angenommen.

Die Schwindfunktion des Fertigteilträgers:

$$\bar{\varepsilon}_{1, t_1} = \nu \mathcal{H} \frac{\varepsilon_{\infty}}{\varphi_{1\infty}} \bar{\varphi}_{2, t_2} = \mathcal{H} \bar{\varepsilon}_{2, t_2} \quad (7)$$

Die Schwindfunktion des Ortsbetonträgers:

$$\bar{\varepsilon}_2, t_2 = \frac{\varepsilon_\infty}{\varphi_{2\infty}} \bar{\varphi}_2, t_2 \quad (8)$$

#### 4.) Die Bestimmung der inneren Kräfte des Verbundquerschnittes.

Bei der Berechnung der Trägereile nehmen wir einen vollkommenen Verbund an.

##### 4.1 Mittig gedrückte Verbundquerschnitte.

4.11 Die Kraft  $P_0$  greift nur am Fertigteil an. In dem Zeitpunkte  $t = 0$  wirkt auf den Fertigteilträger die Teilkraft,  $P_1 = P_0$  und auf den Ortsbetonträger die Teilkraft  $P_2 = 0$ .

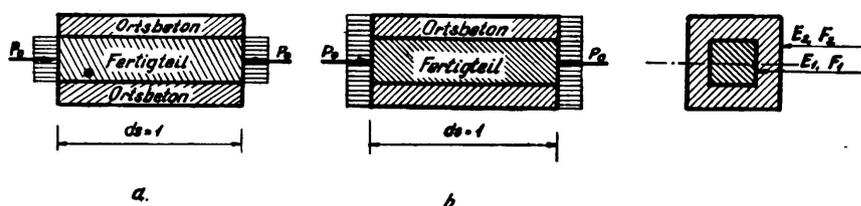


ABB. 2. Zusammengesetzter und an Ort und Stelle verbundener Druckstab. Abb. 3-a. Die Last  $P_0$  wird nur von dem Fertigteil getragen. Abb. 3-b. Die Last  $P_0$  wird von dem Verbundträger getragen

4.12 Infolge der Wirkung der Dauerlast  $P_0$  treten plastische Verformungen auf. Die Kräfteumlagerung im Verbundquerschnitt bestimmen wir durch die Auflösung des Verbundes zwischen dem Fertigteil und Ortsbeton und durch die Einführung der unbekanntenen Kraft  $X_t$ . Dann können wir die zwischen den zwei Teilen entstehende relative Verschiebung auf eine Säulenlänge  $ds = 1$ , zwischen dem Zeitpunkt  $t$  bis zu  $t + dt$ , als Null annehmen.

Die Formänderungsgleichung ist:

$$X_t \left( a_{11}^1 \frac{d\varphi_1}{dt_2} + a_{11}^2 \frac{d\varphi_2}{dt_2} \right) + \frac{dX_t}{dt_2} \left( a_{11}^1 + a_{11}^2 \right) + a_{10}^1 \frac{d\varphi_1}{dt_2} = 0$$

Die einzelnen Werte:

$$a_{11} = a_{11}^1 + a_{10}^2 = \frac{1}{E_1 F_1} + \frac{1}{E_2 F_2}$$

$$a_{10} = a_{10}^1 + a_{10}^2 = \frac{P_0}{E_1 F_1} + 0$$

Die Gleichung wird mit  $dt_2/d\varphi_2$  multipliziert; dann durch die Einsetzung von  $\bar{\varphi}_1, t_1 = \nu \mathcal{H} \bar{\varphi}_2, t_2$  bekommen wir:

$$X_t \left( \nu \mathcal{H} a_{11}^1 + a_{11}^2 \right) + \frac{dX_t}{d\varphi_2} \left( a_{11}^1 + a_{11}^2 \right) + \nu \mathcal{H} a_{10}^1 = 0$$

Die Einführung der folgenden Beziehungen:

$$\alpha = \frac{\nu \mathcal{H} a_{11}^1 + a_{11}^2}{a_{11}}; \quad \beta = \frac{\nu \mathcal{H} a_{10}^1 + a_{10}^2}{a_{11}} = -\bar{X}$$

$$\bar{X} = \nu \mathcal{H} P_0 \frac{E_2 F_2}{E_1 F_1 + E_2 F_2}$$

$$\text{gibt } \frac{dX_t}{d\varphi_2} + \alpha X_t - \bar{X} = 0 \quad (9)$$

Die Lösung der Gleichung (9):

a.) Wenn  $t_{20} \neq 0$  (mit Schonzeit)

$$X_t = \frac{\bar{X}}{\alpha} \left( 1 - \lambda e^{-\alpha \varphi_2^\infty} \right) \quad (9-a.)$$

$$\lambda = e^{+\alpha \varphi_2 t_{20}}$$

b.) Wenn  $t_{20} = 0$  (ohne Schonzeit)

$$X_t = \frac{\bar{X}}{\alpha} \left( 1 - e^{-\alpha \varphi_2^\infty} \right) \quad (9-b.)$$

Zur Zeit  $t = \infty$  entsteht im Ortsbeton die Druckkraft  $P_{2t} = X_t$  und in dem Fertigteilträger die Druckkraft  $P_{1t} = P_0 - X_t$ .

4.13 Die Kraft  $P_0$  greift den Verbundquerschnitt an. Auf Grund der elastischen Formänderungen wird zur Zeit  $t = 0$  der Fertigteilträger mit dem Kraftanteil  $P_1$  und der Ortsbetonträger mit  $P_2$  belastet:

$$P_1 = P_0 \frac{E_1 F_1}{E_1 F_1 + E_2 F_2}; \quad P_2 = P_0 \frac{E_2 F_2}{E_1 F_1 + E_2 F_2}$$

4.14 Infolge der Dauerbelastung  $P_0$  entstehen plastische Verformungen, sowohl in Fertigteilträger wie auch im Ortsbetonträger.

Die Kraft  $X_t$  kann man nach dem Verfahren 4.12 bestimmen. Das Belastungsglied in Funktion der Zeit:

$$a_{10}^2 \frac{d\varphi_2}{dt_2} - a_{10}^1 \frac{d\varphi_1}{dt_2} = \frac{P_2}{E_2 F_2} \frac{d\varphi_2}{dt_2} - \frac{P_1}{E_1 F_1} \frac{d\varphi_1}{dt_2} = \frac{P_0}{E_1 F_1 + E_2 F_2} (1 - \nu \mathcal{H}) \frac{d\varphi_2}{dt_2}$$

$$\beta = \frac{a_{10}^2 - \nu \mathcal{H} a_{10}^1}{a_{11}} = -\bar{X}; \quad \bar{X} = (1 - \nu \mathcal{H}) \frac{P_0}{E_1 F_1 + E_2 F_2} : \frac{1}{E_1 F_1} + \frac{1}{E_2 F_2}$$

Die Lösung der Gleichung gibt für  $X_t$  folgende Werte:

a.) Wenn  $t_{20} \neq 0$  (mit Schonzeit)

$$X_t = \frac{\bar{X}}{\alpha} \left( 1 - \lambda e^{-\alpha \varphi_{2\infty}} \right)$$

b.) Wenn  $t_{20} = 0$  (ohne Schonzeit)

$$X_t = \frac{\bar{X}}{\alpha} \left( 1 - e^{-\alpha \varphi_{2\infty}} \right)$$

Zur Zeit  $t = \infty$  wird der Fertigteilträger mit  $P_{1t} = P_1 + X_t$ , und der Ortsbetonträger mit  $P_{2t} = P_2 - X_t$  belastet.

4.15 Die Berechnung des Schwindens:

Das relative Schwinden zwischen den Trägern im Zeitpunkte  $t = \infty$  ist  $\varepsilon = \varepsilon_\infty (1 - e^{-t_{10}})$ , wenn der Altersunterschied der zwei Trägerteile  $\Delta t = t_{10}$  ist.

Die Schwindkraft wird durch das Kriechen wesentlich vermindert und im Zeitpunkte  $t = \infty$  erreicht sie den Wert nach der Gleichung:

$$\begin{aligned} X a_{11} + a_{10} &= 0; & a_{11}^1 + a_{11}^2 &= \frac{1}{E_1 F_1} + \frac{1}{E_2 F_2} \\ a_{10} &= \varepsilon_\infty (1 - e^{-t_{10}}) = \varepsilon_\infty (1 - e^{-\Delta t}); & X &= \varepsilon_\infty (1 - \mathcal{H}); \frac{E_1 F_1 \times E_2 F_2}{E_1 F_1 + E_2 F_2} \\ X_t &= \frac{X}{\alpha \varphi_{2\infty}} \left( 1 - e^{-\alpha \varphi_{2\infty}} \right) \end{aligned} \quad (10)$$

#### 4.2 Biegung des zusammengesetzten Balkens.

Bei Biegung des zusammengesetzten Balkens werden zwei Fälle untersucht:

- a.) die Schwerlinien der beiden Querschnitte fallen zusammen,
- b.) die Schwerlinien der beiden Querschnitte sind verschieden.

Die Untersuchung der Träger des Falles a.) können wir nach Punkt 4.1 ausführen, wenn wir in die Formeln statt  $P$ ,  $M$  und statt  $F$ ,  $J$  einsetzen.

Untersuchung der Träger von Punkt b.):

4.21 Das Biegemoment  $M_0$  belastet den Verbundträger.

Die Berechnung der Innenkräfte zur Zeit  $t = 0$ , können wir in folgenden Schritten durchführen (Bezeichnungen nach Abb. 3):

a.) Berechnung der Null-Linie des Verbundträgers:

$$a_2 = a \frac{E_1 F_1}{E_1 F_1 + E_2 F_2}; \quad a_1 = a - a_2$$

b.) Bestimmung der Kernpunkte unter der Voraussetzung, dass die Spannungen in der neutralen Achse gleich Null sind.

$$b_2 = \frac{i_2^2}{a_2}; \quad b_1 = \frac{i_1^2}{a_1}$$

c.) Berechnung des Hebelarmes des inneren Kräftepaars:

$$c = a + b_2 + b_1$$

d.) Bestimmung der inneren Kräfte:  $N_0 = M_0 / c$ ;  $M_1 = N_0 b_1$ ;

$$M_2 = N_0 b_2$$

e.) Bemessung der Trägereile. Im Besitz der Normalkräfte und Biegemoment wird der Stahlbeton-Fertigteil als ausmittig gezogener und der Ortsbetonträger als ausmittig gedrückter Balken bemessen.

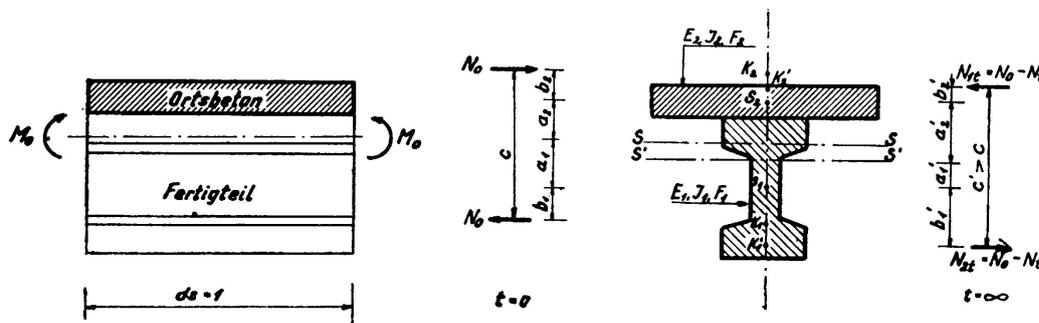


ABB. 3. Innere Kräfte in einem Stahlbeton-Fertigteilträger mit Druckplatte zur Zeit  $t=0$  und  $t=\infty$

4.22 Die plastischen Verformungen verursachen eine Umlagerung der inneren Kräfte. Die Veränderung der Normalkraft wird aus der Formänderungsgleichung gerechnet:

$$N_t \left( \frac{1}{E_1 F_1} \frac{d\varphi_1}{dt_2} + \frac{1}{E_2 F_2} \frac{d\varphi_2}{dt_2} \right) + \frac{dN_t}{dt_2} \left( \frac{1}{E_1 F_1} + \frac{1}{E_2 F_2} \right) =$$

$$= N_0 \left( \frac{1}{E_1 F_1} \frac{d\varphi_1}{dt_2} + \frac{1}{E_2 F_2} \frac{d\varphi_2}{dt_2} \right) - \frac{M_1 a}{E_1 J_1} \frac{d\varphi_1}{dt_2}$$

Mit  $N_0 = \frac{M_0}{c}$  und  $M_1 = N_0 b_1$

Die Lösung der Differenzialgleichung:

$$N_t = \left( 1 - \lambda e^{-\alpha \varphi_2 \infty} \right) \frac{\beta}{\alpha} N_0 \tag{11}$$

$$\text{Wenn } \alpha = \frac{\nu \mathcal{H} a_{11}^1 + a_{11}^2}{a_{11}^1 + a_{11}^2}; \quad \beta = \alpha - \alpha'; \quad \alpha' = \frac{\nu \mathcal{H} a_{10}^1}{a_{11}^1 + a_{11}^2};$$

$$a_{10}^1 = \frac{ab_1}{E_1 J_1}; \quad \beta = (1 - \nu \mathcal{H}) \frac{E_1 F_1}{E_1 F_1 + E_2 F_2}$$

Zur Zeit  $t = \infty$  wird die Normalkraft:  $N_{1t} = N_{2t} = N_0 - N_t$

Da das Biegemoment  $M_0$  unverändert bleibt, wächst der Hebelarm von  $c$  zu  $c'$ . Die Grösse des  $c'$  ist durch die Beziehung gegeben:

$$c' N_{1t} = c N_0 = M_0 \quad \text{und davon } c' = \frac{M_0}{N_{1t}}$$

Infolge des Kriechens verschiebt sich die Null-Linie des zusammengesetzten Querschnittes in Richtung des Fertigteils und die Lage der Kernpunkte ändert sich nach Abb. 3. Die Umlagerung der charakteristischen Punkte des Querschnittes kann man leicht bestimmen aus den Beziehungen:

$$a + b'_1 + b'_2 = c' \quad (12)$$

$$a = a'_1 + a'_2 \quad (13)$$

$$a'_1 b'_1 = i_1^2 \quad (14)$$

$$a'_2 b'_2 = i_2^2 \quad (15)$$

Zur Zeit  $t = \infty$  sind also die inneren Kräfte:

$$N_{1t} = N_{2t}; \quad M_{1t} = N_{1t} b'_1 \quad \text{und} \quad M_{2t} = N_{1t} b'_2$$

4.23 Die Last wird nur von dem Stahlbeton-Fertigteil getragen. Die Belastung des Stahlbeton-Fertigteiles wird zur Zeit  $t = 0$   $M_1 = M_0$  und der an Ort und Stelle betonierte Trägerteil wird unbelastet,  $M_2 = 0$ .

4.24 Um die inneren Kräfte infolge plastischer Verformungen zu bestimmen, lösen wir die Differenzialgleichung:

$$N_t \left( \frac{1}{E_1 F_1} \frac{d\varphi_1}{dt_2} + \frac{1}{E_2 F_2} \frac{d\varphi_2}{dt_2} \right) + \frac{dN_t}{dt_2} \left( \frac{1}{E_1 F_1} + \frac{1}{E_2 F_2} \right) =$$

$$= \frac{M_0 a}{E_1 J_1} \frac{d\varphi_1}{dt_2} = \frac{N_0 b_1 a}{E_1 J_1} \frac{d\varphi_1}{dt_2}; \quad N_0 = \frac{M_0}{b_1}$$

$$\text{wird } N_t = \left( 1 - \mathcal{L} e^{-\alpha \varphi_2 \infty} \right) \frac{\beta}{\alpha} N_0 \quad (16)$$

$$\beta = \nu \mathcal{H} \text{ aus } \beta = \alpha' = \frac{\nu \mathcal{H} a_{10}^1}{a_{11}^1 + a_{11}^2}; \quad a_{10}^1 = \frac{ab_1}{E_1 J_1}$$

Die Kraftanteile des Verbundquerschnittes zur Zeit  $t = \infty$  werden: im Ortsbeton die Druckkraft  $N_t$  und das Moment  $M_{2t} = + N_t b_2$ ; im Fertigteil die Zugkraft  $N_t$  und das Moment  $M_{1t} = M_0 - N_t (a + b_2)$ .

4.25 Infolge Schwindens des Betons entsteht laut Punkt 4.15 eine Normalkraft  $X$  und ein Moment  $Xa$ . Die Randspannungen werden dann im Stahlbeton-Fertigteil:

$$\sigma_1 = - \frac{X}{F_1} + \frac{Xa}{cF_1} + \frac{Xab_1}{c W_1} \quad (17)$$

und im Ortsbeton:

$$\sigma_2 = + \frac{X}{F_2} - \frac{Xa}{cF_2} - \frac{Xab_2}{c W_2} \quad (18)$$

Die Schwindspannungen werden durch die plastischen Verformungen wesentlich vermindert (Gl. 10) und zur Zeit  $t = \infty$  erreichen sie die Werte:

$$\sigma_1 = - \frac{X_t}{F_1} + \frac{M_t}{cF_1} + \frac{M_t b_1}{c W_1} \quad (19)$$

$$\sigma_{2t} = + \frac{X_t}{F_2} - \frac{M_t}{cF_2} - \frac{M_t b_2}{c W_2} \quad (20)$$

wo  $X_t = \frac{X}{\alpha \varphi_{2\infty}} \left( 1 - e^{-\alpha \varphi_{2\infty}} \right)$  und  $M_t = X_t a$ .

## 5.) Bruchberechnung zusammengesetzter Stahlbeton-Konstruktionen. Bruchsicherheit.

### 5.1 Mittig belastete Säulen (ohne Knickgefahr).

Die Bruchlast eines symmetrisch zusammengesetzten und auf mit-tigen Druck beanspruchten Stabes wird durch das bekannte Additions-gesetz berechnet. Die Bruchlast des zusammengesetzten Stabes ist gleich der Summe der Bruchlasten der einzelnen Stäbe.

$$P_B = P_{1B} + P_{2B}, \quad \text{wo } P_{1B} = k_1 F_{1b} + \sigma_f F_{1s} \quad (21)$$

$$P_{2B} = k_2 F_{2b} + \sigma_f F_{2s} \quad (22)$$

Ferner werden wir nur mit dem Betonquerschnitt rechnen; dem-entsprechend sind die Bruchlasten:

$$P_{1B} = k_1 F_1; \quad P_{2B} = k_2 F_2$$

Der Druckstab wird auf Grund der zulässigen Last  $P_0$  bemessen.

$$P_0 = P_{10} + P_{20} = \frac{k_1}{n} F_1 + \frac{k_2}{n} F_2 = \sigma_{10} F_1 + \sigma_{20} F_2$$

Die Bruchsicherheit ist:  $n = \frac{P_B}{P_o}$ .

Belasten wir nun den Fertigteil mit einer Druckkraft  $P_1$ , werden infolgedessen die Spannungen im Fertigteil:  $\sigma_1 = \frac{P_1}{F_1}$ .

Bestimmen wir in diesem Zustande die Drucklast  $P_o'$  des Verbundquerschnittes sodass infolge der Lasten  $P_o'$  und  $P_1$  die Spannungen im Fertigteil den zulässigen Wert  $\sigma_{10}$  erreichen sollen. Zur Vereinfachung der Berechnung nehmen wir an, dass der Beton ein idealplastischer Baustoff ist. Wegen  $P_o' = P_{10}' + P_{20}'$ , ist

$$\sigma_1 + \frac{P_o'}{F_1} \cdot \frac{E_1 F_1}{E_1 F_1 + E_2 F_2} = \sigma_{10}, \text{ oder}$$

$$P_1 + P_o' \cdot \frac{E_1 F_1}{E_1 F_1 + E_2 F_2} = P_{10}; \quad P_o' = (P_{10} - P_1) \frac{E_1 F_1 + E_2 F_2}{E_1 F_1}$$

Um die zulässige Last  $P_o$  des Verbundquerschnittes zu erreichen, steigern wir die Last mit  $\Delta P$ . Der Wert von  $\Delta P$  hängt von der zulässigen Spannung  $\sigma_{20}$  des an Ort und Stelle betonierten Trägerteiles ab, — und sie ist proportional mit der Vorbelastung  $P_1$ .

$$\Delta P + P_o' \cdot \frac{E_2 F_2}{E_1 F_1 + E_2 F_2} = P_{20};$$

$$\Delta P = P_{20} - \frac{E_2 F_2}{E_1 F_1} (P_{10} - P_1)$$

Die Bruchsicherheit in dem auf zulässige Spannungen bemessenen Querschnitt wird nun:

$$n' = n \left( 1 + \frac{\Delta P}{P_b} \right) \quad (23)$$

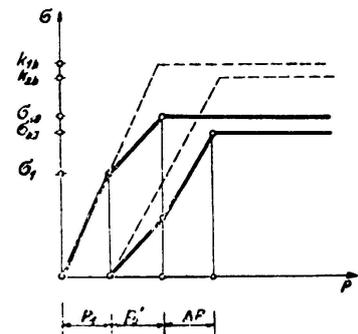


ABB. 4. Verlauf der Druckspannungen in einem zusammengesetzten Querschnitt mit Vorbelastung  $P_1$ .

5.2 Bruchberechnung des auf Biegung beanspruchten Verbundträgers, wenn die Trägerteile dieselbe Schwerlinie haben.

Das Betonmoment des Verbundquerschnittes ist bei reiner Biegung im Bruchzustand:  $M_b = M_{1B} + M_{2B}$ ; nach den Versuchsergebnissen:

$$M_{1B} = k_1 b_1 h_1^2 / 3 \quad (24)$$

$$M_{2B} = k_2 b_2 h_2^2 / 3 \quad (25)$$

Um die Größenordnung der Sicherheit zu bestimmen, werden wir ein solches Bemessungsverfahren benutzen, das die Elastizitätstheorie und die Bruchtheorie vereinigt. Zu diesem Zwecke werden wir die Versuchsergebnisse der Bruchtheorie auf die Elastizitätstheorie übertragen.

Das Verfahren ist n-frei und auch bei homogenen Querschnitten brauchbar. Die Richtigkeit des Verfahrens wurde bei Rechteckquerschnitten in vollem Masse bewiesen (<sup>1</sup>).

Da wir die Rechnungen auf den homogenen Betonquerschnitt beziehen, wird das Bruchmoment beider Trägerteile:

$$M_{1B} = K_1 W_1; \quad M_{2B} = K_2 W_2$$

Rechteckquerschnitte haben den Formfaktor  $k/K$  laut den Versuchen von der Grössenordnung 0,5-0,7.

Das zulässige Betonmoment ist:

$$M_o = M_{10} + M_{20} = \frac{K_1}{n} W_1 + \frac{K_2}{n} W_2 = \sigma_{1b} W_1 + \sigma_{2b} W_2$$

$$\text{Der Sicherheitsfaktor ist: } n = \frac{M_B}{M_o}$$

Wenn der Stahlbeton-Fertigteil eine Vorbelastung  $M_1$  bekommen hat, kann man wie im Punkt 5.1 den Wert  $\Delta M$  bestimmen.

$$\Delta M = M_{20} - \frac{E_2 J_2}{E_1 J_1} (M_{10} - M_1)$$

Und so erhalten wir die Bruchsicherheit des Verbundträgers, bemessen auf Grund der Elastizitätstheorie:

$$n' = n \left( 1 + \frac{\Delta M}{M_b} \right) \quad (26)$$

Bemerkung: Die Bruchsicherheit ändert sich, wenn wir beim Bemessen den Einfluss des Schwindens und Kriechens auch in Rechnung setzen.

5.3 Bruchberechnung des auf Biegung beanspruchten Verbundträgers, wenn die Trägerteile verschiedene Schwerlinien haben. Bruchsicherheit.

Nach der Plastizitätstheorie ist der Additionssatz auch für das Bruchmoment gültig. Das Bruchmoment des Stahlbetonverbund-Plattenbalkens ist, wenn  $x = 0.5 h$  und  $v$  (die Plattendicke)  $< x$ , und  $b_1$  konstant ist:

$$M_B = M_{1B} + M_{2B} = k_1 b_1 \left( \frac{h}{2} - v \right) \frac{3h - 2v}{4} + k_2 b_2 v \left( h - \frac{v}{2} \right)$$

$$\text{wenn } h = h_1 + v \text{ und } v = \alpha h_1; \quad h = h_1 (1 + \alpha)$$

$$M_{1B} = k_1 b_1 h_1^2 \left( \frac{3 - 2\alpha - \alpha^2}{8} \right); \quad M_{2B} = k_2 b_2 v^2 \left( \frac{1 + 0.5\alpha}{\alpha} \right)$$

(<sup>1</sup>) Hognestad, E.: Univ. of Illinois Bull. Series n°. 399, vol. 49, n°. 22.

Da die zulässigen Spannungen  $\sigma_{10} = \frac{k_1}{n}$ ;  $\sigma_{20} = \frac{k_2}{n}$  sind, die zulässigen Momente:

$$M_{10} = \sigma_{10} b_1 h_1^2 \left( \frac{3 - 2\alpha - \alpha^2}{8} \right) \quad (27)$$

$$M_{20} = \sigma_{20} b_2 v^2 \left( \frac{1 + 0.5\alpha}{\alpha} \right) \quad (28)$$

Die Berechnung wird an ausmittig belasteten Querschnitten gezeigt. Da zwischen der Normalkraft  $N_B$  und dem Moment  $M_B$  im Bruchzustand ein geradliniger Zusammenhang besteht, können wir das Gesetz in die Form bringen:

$$\frac{N}{N_{1B}} + \frac{M}{M_{1B}} = 1; \quad \frac{N}{N_{2B}} + \frac{M}{M_{2B}} = 1$$

$$\frac{N}{\sigma_{10} F_1} + \frac{M}{\sigma_{1b} W_1} = 1; \quad \frac{N}{\sigma_{20} F_2} + \frac{M}{\sigma_{2b} W_2} = 1$$

Wenn  $\frac{\sigma_{10}}{\sigma_{1b}} = \frac{\sigma_{20}}{\sigma_{2b}} = 0,5$  dann

$$M_{10} = \sigma_{1b} W_1 \frac{1}{1 + \frac{h_1}{3b_1}} = \sigma_{1b} \frac{b_1 h_1^2}{6} \left( \frac{1}{1 + \frac{h_1}{3b_1}} \right) \quad (29)$$

$$M_{20} = \sigma_{2b} W_2 \frac{1}{1 + \frac{v}{3b_2}} = \sigma_{2b} \frac{b_2 v^2}{6} \left( \frac{1}{1 + \frac{v}{3b_2}} \right) \quad (30)$$

Die Bedingung, dass die Biegemomente aus der Gl. (27, 29) und (28, 30) gleich sein müssen, gibt den Wert des Formfaktors  $\beta_1$  und  $\beta_2$

$$\beta_1 = \frac{\sigma_{10}}{\sigma_{1b}} = \frac{4}{3} \frac{1}{3 - 2\alpha - \alpha^2} \frac{1}{1 + \frac{h_1}{3b_1}}$$

$$\beta_2 = \frac{\sigma_{20}}{\sigma_{2b}} = \frac{\alpha}{6(1 + 0.5\alpha)} \frac{1}{1 + \frac{v}{3b_2}}$$

Die auf Grund der Elastizitätstheorie bemessenen Träger sind nur bis zum Erreichen der zulässigen Randspannungen in Anspruch genommen. Die Randspannungen:

$$\sigma_{1b} = \frac{\sigma_{10}}{\beta_1} \text{ und } \sigma_{2b} = \frac{\sigma_{20}}{\beta_2}$$

Wenn der Fertigteil infolge Montierung mit  $M_1$  vorbelastet ist, kann die zusätzliche Beanspruchung  $\Delta M$  in der folgenden Form ausgedrückt werden:

$$\Delta M = M_{20} - \frac{4}{3} (M_{10} - M_1) \frac{b_2 + \frac{W_2}{F_2}}{b_1 + \frac{W_1}{F_1}} = M_{20} - \frac{4}{3} (M_{10} - M_1) \frac{b_2 + \frac{v}{6}}{b_1 + \frac{h_1}{6}}$$

Wenn  $b_1 = \frac{h_1}{6}$  ist, so bleibt die Randlinie des Fertigteilträgers spannungslos. In diesem Falle steht die Null-Linie des Verbundträgers in der Grenzlinie der zwei Querschnitte. Dann ist  $b_2 = \frac{v}{6}$  und somit

$\Delta M = M_{20}$ . Wenn  $b_1 > \frac{h_1}{6}$  ist, liegt also die Null-Linie des Verbundträgers in dem Fertigteil, so ist  $\Delta M < M_{20}$ .

Wenn  $b_1 < \frac{h_1}{6}$ , liegt also die Null-Linie in der Druckplatte, ändert sich das Vorzeichen des zweiten Gliedes und  $\Delta M$  wird  $\Delta M > M_{20}$ . Die Zugspannungen mindern den Wert der Vorbelastung im Steg.

Die Werte  $M_{10}$  und  $M_{20}$  werden mit Hilfe der Formfaktoren aus  $M_{1b}$  und  $M_{2b}$  gerechnet, und die Bruchmomente:

$$M_{1B} = n M_{10}; \quad M_{2B} = n M_{20} .$$

**6.) Statisch unbestimmte Stahlbeton-Verbundkonstruktionen.**

Die statisch unbestimmten Stahlbeton-Verbundkonstruktionen kann man mit den bekannten Methoden lösen. Im Rahmen dieser Arbeit werden einige Gesichtspunkte zur Vereinfachung der Berechnung angegeben.

6.1 Die Verformungsgleichungen eines unbestimmten Tragwerkes im Zeitpunkt  $t = 0$ , sind:

$$a_{11} X_1 + a_{21} X_2 + \dots + a_{10} = 0.$$

$$a_{21} X_1 + a_{22} X_2 + \dots + a_{20} = 0. , \text{ usw.}$$

Bei der Ausrechnung der einzelnen Beiwerte werden wir nur die Verformungen eines Trägerteils in Betracht nehmen. Z. B.: Beim Verbundquerschnitt aus der Abb. 3. können die Verformungsglieder auf

die Ortsbeton-Druckplatte bezogen werden. In diesem Falle werden die Momentenflächen der virtuellen Kräfte  $X_1 = 1$ , nur auf die Schwerlinie des Ortsbetons bezogen. Diese Tatsache hat nur bei Trägern mit polygonalen oder krummlinigen Achsen (Rahmen und Bogen) Bedeutung, bei Trägern mit geraden Achsen (Durchlaufträger) ist die Beziehungssachse gleichgültig.

Dementsprechend die Belastungsglieder:

$$a_{ik} = \int_0^s \frac{M_i M_{2k}}{E_2 J_2} ds + \int_0^s \frac{N_i N_{2k}}{E_2 F_2} ds$$

$$a_{io} = \int_0^s \frac{M_i M_{20}}{E_2 J_2} ds + \int_0^s \frac{N_i N_{20}}{E_2 F_2} ds$$

$M_i$  und  $M_{2k}$  sind die Momente der virtuellen Kräfte  $X_1 = 1$  und  $X_k = 1$ , bezogen auf die Schwerlinie des Ortsbetonträgers,  $M_{20}$  ist das Aussenmomentanteil am statisch bestimmten Träger. Z. B.: bei Durchlaufträger (Verdrehung an einem Ende des Trägers).

$$a_{ik} = \int_0^1 \frac{M_i M_{2k}}{E_2 J_2} ds = \int_0^1 \frac{M_i M_k b_2}{E_2 J_2 c} ds$$

$$a_{io} = \int_0^1 \frac{M_i M_{20}}{E_2 J_2} ds = \int_0^1 \frac{M_i M_o b_2}{E_2 J_2 c} ds$$

6.2 Die Belastungsglieder des unbestimmten Tragwerkes in der Folge der Zeit werden:

$$a_{ikt} = \int_0^s \frac{M_i M_{2kt}}{E_2 J_2} ds + \int_0^s \frac{N_i N_{2kt}}{E_2 J_2} ds$$

Wenn  $\frac{b'_2}{b_2} \approx 1$  und  $\nu = 1$ , der Wert des auf den Ortsbeton bezogenen Momentes ist.

$$M_{2kt} = N_{2kt} b'_2 \approx N_{2kt} b_2 = M_k \frac{b_2}{c} \left( 1 - \lambda e^{-\alpha \varphi_{2t}} \right) \frac{\beta}{\alpha}$$

$$a_{ikt} = \int_0^s \frac{M_i M_k}{E_2 J_2} \frac{b_2}{c} \left( 1 - \lambda e^{-\alpha \varphi_{2t}} \right) \frac{\beta}{\alpha} ds$$

$$a_{i0t} = \int_0^s \frac{M_i M_o}{E_2 J_2} \frac{b_2}{c} \left( 1 - \lambda e^{-\alpha \varphi_{2t}} \right) \frac{\beta}{z} ds$$

Die Formänderungsgleichung zwischen den Zeitpunkten t und t + dt:

$$a_{11} \frac{d \varphi_2}{dt_2} X_{1t} + a_{11} \frac{dX_{1t}}{dt_2} + a_{12} \frac{d \varphi_2}{dt_2} X_{2t} +$$

$$+ a_{12} \frac{dX_{2t}}{dt_2} + \dots + a_{10} \frac{d \varphi_2}{dt_2} = 0.$$

Wo z. B.:

$$a_{ii} \frac{d \varphi_2}{dt_2} = \int_0^s \frac{M_i M_i}{E_2 J_2} \frac{b_2}{c} \lambda \alpha e^{-\alpha \varphi_{2t}} \frac{\beta}{\alpha} \frac{d \varphi_2}{dt_2} ds$$

### 6.3 Bruch des statisch unbestimmten Tragwerkes.

Das statisch unbestimmte Tragwerk wird auf Grund der Elastostatik bemessen, mit Rücksicht auf die Bauweise oder Montage und Ueberlagerung der inneren Kräfte.

Bei der Untersuchung der statisch bestimmten Träger im Gebrauchszustande, haben wir darauf hingewiesen, dass die Berechnung der Vorbelastung, des Kriechens und des Schwindens in manchen Fällen, zu einem höheren Sicherheitsgrad führt. Bei statisch unbestimmten Tragwerken ist auch die unbestimmte Grösse eine Funktion der Zeit. Bei freigebauten Teilen, wo die gesamte Last von dem statisch bestimmten Fertigteil getragen wird, entstehen nach dem Verbund negative Momente und die positiven Momente vermindern sich. Bei auf Rüstung gebauten Tragwerken geht das umgekehrt, an der Stelle der frischen Verbindung werden die negativen Momente vermindert.

Die Berücksichtigung dieser Beanspruchungen und Spannungsumlagerungen beeinflusst aber den Bruchzustand des Trägers nicht, wenn wir den Bruch des Trägers mit der Bildung der Fliessgelenke identisch nehmen.

### 7.) Schlusswort.

Die Bedeutung der Stahlbeton-Verbundkonstruktionen wird von Tag zu Tag grösser infolge der rapiden Entwicklung der Fertigteil-Bauten. Das Bestreben, ein durch Versuche bestätigtes Bemessungsverfahren zu entwickeln, ist von wirtschaftlicher Bedeutung. Durch die Versuche wird es möglich sein, mehrere Fragen zu beleuchten, z. B.: die Frage des Verbundes der zwei Betonteile, der Schubsicherheit, des Einflusses der Zeit, der Bemessung des Plattenbalkens und der Schubbewehrung, usw.

Die versuchsmässige Auswertung obengenannter Fragen ist im Gange und die Ergebnisse werden im Schlussbericht veröffentlicht.

#### ZUSAMMENFASSUNG

Der Zweck der vorliegenden Arbeit ist, einen Ueberblick der Berechnung der Stahlbeton-Fertigteilkonstruktionen -die nachträglich an Ort und Stelle verbunden sind- zu geben. Es wird die Bestimmung der Teilkräfte einzelner Trägereile, bei verschiedenen Lastfällen untersucht.

Die statisch bestimmten Tragwerke werden in zwei Gruppen analysiert: Systeme mit gleicher Schwerachse und Systeme mit verschiedenen Schwerachsen. Da beim Brückenbau und Hochbau der letztere Fall immer häufiger angewendet wird, wollen wir ein vereinfachtes Rechnungsverfahren zeigen, womit die Spannungsumlagerungen leicht ermittelt werden können.

Im Rahmen der Arbeit wird der Einfluss des Kriechens und des Schwindens, -hauptsächlich mit Rücksicht auf die Schonzeit und den Zeitalterunterschied beider Trägereile-, in Betracht genommen.

Die Frage der Bemessung der Stahlbeton-Verbundkonstruktionen wird ebenfalls behandelt. Es wird ein Bemessungsverfahren vorgeschlagen, das die Ergebnisse der elastischen und plastischen Theorien vereinigt und das durch zahlreiche Versuche bestätigt wurde. Auf dieser Grundlage kann der Sicherheitsfaktor beim Bruch der nach der Elastizitätstheorie bemessenen Verbundsysteme leicht ausgerechnet werden. Die Berechnung des unbestimmten Verbundsystemes wird auch behandelt, besonders mit Rücksicht auf den Einfluss der Zeitveränderlichkeit auf die einzelnen Belastungsglieder.

#### RESUMO

O autor dá uma ideia geral do cálculo das estruturas de betão armado com elementos prefabricados montados no local da obra e analisa a determinação dos esforços nas vigas para diversos casos de carga.

As estruturas isostáticas dividem-se em dois grupos: as co-axiais e as de eixo distinto. Sendo o último o caso mais corrente nos edifícios e nas pontes, o autor expõe um método de cálculo simples que permite determinar facilmente a repartição das tensões em estruturas desse tipo.

O autor também considera o efeito da fluência e da contracção do betão, especialmente no que diz respeito à diferença de idade de dois elementos de uma viga.

Estuda-se igualmente o caso das construções compostas de betão armado. O autor propõe um método de cálculo que combina os resultados das teorias elástica e plástica e que foi verificado em numerosas experiências.

Este método permite determinar facilmente o coeficiente de segurança à rotura de sistemas compostos calculados pela teoria da elasticidade.

O cálculo dos sistemas compostos indeterminados também é discutido, considerando particularmente a influência das variações das cargas elementares com o tempo.

#### R É S U M É

L'auteur donne un aperçu général du calcul des constructions en béton armé exécutées en éléments pré-fabriqués montés sur place. Il étudie la détermination des efforts dans les poutres pour divers cas de charge.

Les structures isostatiques peuvent se diviser en deux groupes: les structures co-axiales et celles à axes distincts. Les dernières étant plus courantes dans le bâtiment et les ponts, l'auteur expose une méthode de calcul simple qui permet de déterminer facilement la répartition des contraintes dans des constructions de ce genre.

L'auteur considère aussi l'influence du fluage et du retrait, surtout en ce qui concerne deux éléments d'une même poutre, d'âges différents.

Les cas des structures composées en béton armé est également étudié. L'auteur propose une méthode de calcul qui combine les résultats des théories élastique et plastique et qui a été vérifiée par de nombreuses expériences. Cette méthode permet de déterminer facilement la sécurité à la rupture de systèmes composés calculés par la théorie de l'élasticité. Le calcul des systèmes composés indéterminés est aussi traité, en considérant surtout l'influence de la variation des charges élémentaires avec le temps.

#### S U M M A R Y

The author gives a general survey of the calculation methods used in reinforced concrete structures incorporating precast units assembled at the site. He discusses the determination of forces in the members for various types of load.

Statically determinate structures are divided into two groups: coaxial systems and systems with distinct axis. Owing to the latter being more commonly found in buildings and bridges, the author describes a method of analysis through which stress repartition is easily determined for that type of structure.

The author also considers the influence of concrete creep and shrinkage, as related to the differences of age between two precast elements.

Composite reinforced concrete structures are also considered. A calculation method is proposed which is based upon the results of the elastic and plastic theories and has been verified by a number of tests. This method enables to easily determine the failure safety coefficient of composite structures calculated by the theory of elasticity. Indeterminate composite structure calculation is discussed, especially regarding the influence of the variation of load elements with time factor.

Leere Seite  
Blank page  
Page vide