

Zeitschrift: IABSE congress report = Rapport du congrès AIPC = IVBH
Kongressbericht

Band: 6 (1960)

Artikel: L'exploitation des séries de petite taille en résistance des matériaux

Autor: Davin, M.

DOI: <https://doi.org/10.5169/seals-7018>

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. [Siehe Rechtliche Hinweise.](#)

Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. [Voir Informations légales.](#)

Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. [See Legal notice.](#)

Download PDF: 08.02.2025

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>

L'exploitation des séries de petite taille en résistance des matériaux

Die Interpretation der kleinen Serien in der Festigkeitslehre

The Interpretation of Small-sized Series in Strength of Materials

M. DAVIN

Laboratoire Central des Ponts et Chaussées, Paris

Parmi les problèmes fondamentaux qui conditionnent le dimensionnement des constructions, celui du «risque de défaillance locale», c'est-à-dire d'abaissement local de la résistance au-dessous du taux de contrainte subi en service, est un des plus importants.

Pour déterminer la forme des courbes de répartition en probabilité des résistances à la rupture, et rechercher les meilleures formules d'ajustement, nous avons, au Laboratoire Central des Ponts et Chaussées, réalisé des populations de forte taille (plusieurs centaines, même plusieurs milliers) aussi homogènes que possible, d'éprouvettes de mortier. Nous avons trouvé que la «loi de valeurs extrêmes»

$$F(x) = 1 - e^{-\left(\frac{x}{x_0}\right)^K}$$

(où x est la variable aléatoire représentant la résistance à la rupture et $F(x)$ sa fonction de répartition, x_0 et K des paramètres dépendant de la population considérée), permet pour les essais de compression ou de traction directe, des ajustements très satisfaisants de la partie inférieure de la courbe ($x < x_0$) la seule qui intéresse la sécurité des constructions. Pour la partie supérieure ($x > x_0$), cette formule représente moins bien la réalité, les courbes expérimentales étant plus étalées que les courbes théoriques. Ainsi, pour un écart quadratique moyen d'environ 8% correspondant à $K = 15$, une valeur supérieure de plus de 30% à la moyenne n'est pas, en fait, extrêmement exceptionnelle, alors que la formule lui attribue une probabilité inférieure à 10^{-13} , donc très inférieure à l'inverse du nombre total d'éprouvettes essayées dans tous les temps et dans tous les laboratoires du monde.

La série de forte taille a toutefois l'inconvénient de nécessiter une étude

spéciale, faite dans des conditions aussi particulières que possible, et il subsiste un doute quant à la possibilité d'en tirer des conclusions générales. C'est pourquoi nous avons recherché une méthode permettant d'exploiter les archives de notre Laboratoire, principalement composées de séries de taille 6 relatives à des essais de mortiers et bétons, notamment l'essai de compression sur cubes et l'essai de traction de Michaëlis.

Il faut bien comprendre que ces séries ne peuvent pas être considérées comme formant, par leur réunion, un échantillon de grande taille d'une « population mère » commune. En effet, les changements qui interviennent, d'une série à l'autre, sont principalement sous la dépendance de facteurs humains, à variations discontinues, le plus souvent rebelles aux lois statistiques: changement de l'opérateur ou perfectionnement de la technique d'essai en ce qui concerne le laboratoire; variations dans la provenance et la qualité du ciment, les spécifications officielles, progrès de l'industrie des liants hydrauliques; et même, transformation de la mentalité des ingénieurs qui demandent les essais, certains d'entre eux s'adressant systématiquement aux Laboratoires, d'autres n'y faisant appel que s'ils ont subi des mécomptes.

Nous les avons donc considérées comme appartenant à des populations toutes différentes, mais en raison de leur communauté de nature, nous avons admis que ces populations obéissent à des lois que l'on peut ramener à une formulation mathématique du type défini ci-dessous.

La fonction de répartition de la résistance pouvant toujours être représentée pour l'ensemble des populations considérées par:

$$F(x, \lambda, \mu, \nu \dots)$$

$\lambda, \mu, \nu \dots$ étant des paramètres qui varient d'une population à l'autre, nous admettons que cette fonction peut se mettre sous la forme:

$$F(x, \lambda, \mu, \nu) = \Phi[f(x, \lambda, \mu, \nu), g(x, \lambda, \mu, \nu) \dots]$$

les f, g étant très peu nombreux et très simples comme expression mathématique. On aura par exemple:

$$F(x, \lambda, \mu) = \phi(\lambda x + \mu)$$

(deux paramètres, une seule fonction auxiliaire introduisant les paramètres sous forme linéaire).

Cette hypothèse est suggérée par l'examen des principales lois usuelles admises en statistique. La loi de Gauss, dans toute sa généralité, la 1ère loi de Pearson, quand on fixe les exposants p et q , la loi de valeurs extrêmes à variable non bornée inférieurement (dont la fonction de répartition est $F(x) = 1 - e^{-e \frac{x-x_0}{p}}$), admettent précisément la formulation de l'exemple particulier ci-dessus. La loi de Galton, la loi de valeurs extrêmes du type défini plus haut comme meilleure loi d'ajustement des séries de grande taille (type à variable essentiellement positive) ont des fonctions de répartition du type

$$F(x, \lambda, \mu) = \phi(\lambda L(x) + \mu)$$

ou encore, si l'on fait le changement de fonction $\phi(L(\xi) = \Psi(\xi))$ et le changement de paramètre $\nu = e^\mu$.

$$F(x, \lambda, \nu) = \psi(\nu x^\lambda).$$

Si nous nous bornons au cas où il n'y a qu'une fonction auxiliaire, nous avons

$$F(x, \lambda, \mu, \nu \dots) = \Phi[f(x, \lambda, \mu, \nu)];$$

f est supposée connue mais la fonction ϕ à une seule variable est supposée inconnue.

Si la taille n des échantillons est supérieure au nombre m des paramètres, la répartition, dans l'espace à n dimensions, des points P dont chacun figure un échantillon, nous donne une information sur la fonction Φ ; mais cette information est plus facilement exploitable s'il est possible de trouver une famille de multiplicités (courbes, surfaces ou hypersurfaces) telle que la probabilité de présence du point P dans chaque portion d'espace délimitée par une ou plusieurs de ces multiplicités soit indépendante des paramètres.

Soit en particulier $f(x, \lambda, \mu) = \lambda x + \mu$. Nous considérons des échantillons de taille 3 et nous les représentons, dans l'espace à 3 dimensions, chacun par le point P dont les 3 coordonnées $x_1 x_2 x_3$ sont les 3 nombres constituant le résultat d'épreuve de l'échantillon. Si nous passons d'une population à une autre en changeant λ et μ , la figure de l'espace représentant la densité de probabilité de présence du point P subit, pour un changement de λ , une homothétie par rapport à l'origine, et pour un changement de μ une translation suivant la droite $D(x_1 = x_2 = x_3)$.

Donc si nous considérons un dièdre Δ formé par deux demi-plans passant par D , la probabilité de présence de P à l'intérieur de ce dièdre est la même pour tous les échantillons, et quand le nombre des échantillons croît indéfiniment, la proportion de points P à l'intérieur du dièdre converge en probabilité vers une valeur certaine égale à cette probabilité commune.

Si la loi étudiée est normale (loi de Laplace-Gauss) la «figure représentant la densité de probabilité de présence de P » pour un échantillon, est formée de sphères concentriques. En effet, cette densité est:

$$\frac{1}{(2\pi s^2)^{3/2}} e^{-\frac{(x_1-m)^2 + (x_2-m)^2 + (x_3-m)^2}{2s^2}}.$$

Donc la répartition entre les dièdres Δ est uniforme: si δ est la mesure en radians d'un tel dièdre, la proportion de points P à l'intérieur de Δ converge en probabilité vers $\frac{\delta}{2\pi}$.

En fait, des 3000 échantillons de taille 6 trouvés dans nos archives, nous avons tiré 60 000 échantillons de taille 3, en divisant chacun en deux parts des 10 manières possibles, et sur chacun des 60 000 nous avons considéré la quantité:

$$\theta = \pm \text{Arc cos} \frac{2x_1 - x_2 - x_3}{2\sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - x_1x_2 - x_2x_3 - x_3x_1}}$$

(le signe devant Arc cos étant celui de $x_2 - x_3$) qui représente l'angle dièdre du plan passant par D et P avec le plan passant par D et l'axe des x_1 . D'après ce qui précède, la répartition de θ tendrait vers l'uniformité entre $-\pi$ et $+\pi$, pour un nombre indéfiniment croissant d'échantillons, si les populations suivaient une loi normale.

Toutefois l'ordre des indices affectés à chacun des nombres formant l'échantillon doit être vraiment aléatoire, sans corrélation avec l'ordre de grandeur croissante ou décroissante. Or certains de nos résultats d'essais avaient été classés par ordre de grandeur; d'autres d'après l'ordre d'exécution des essais.

Nous avons donc commencé par opérer la permutation aléatoire systématique de nos échantillons, commandée par un procédé de randomisation.

Les nombres mis en œuvre, étant des résultats expérimentaux, étaient arrondis à la division du cadran la plus voisine de l'aiguille; d'où le risque d'un «biais» d'autant plus grave que les écarts entre x_1 , x_2 et x_3 sont souvent de quelques divisions seulement. Nous avons corrigé ce biais, en ajoutant, à chacun des résultats bruts, une partie décimale définie elle aussi par un procédé de randomisation.

En définitive, c'était la répartition de θ entre des tranches égales (0 à 10° , 10° à 20° . . .) qui nous intéressait. Pour économiser le temps de travail de la machine, nous n'avons pas, en réalité, calculé θ , mais seulement $\cos \theta$, c'est-à-dire la fraction algébrique en $x_1 x_2 x_3$, et nous avons étudié la répartition des valeurs trouvées entre les intervalles $\cos 0^\circ - \cos 10^\circ$, $\cos 10^\circ - \cos 20^\circ$, etc.

Le choix de tranches de 10° pour θ réalise un bon compromis entre deux exigences contraires: avoir assez de tranches pour obtenir une connaissance suffisante de la fonction représentant la distribution des points P par rapport à θ ; avoir assez de points P dans chaque tranche pour réduire suffisamment les écarts relatifs accidentels.

Conformément à la théorie, notre courbe de fréquence admet, aux dits écarts près, la période $\frac{2\pi}{3}$. Les tranches ont des différences significatives qui prouvent l'existence d'écarts entre les lois des populations étudiées et la loi de Gauss. Les moins chargées sont celles voisines de $\pm 30^\circ$, $\pm 90^\circ$, $\pm 150^\circ$. Les plus chargées sont celles voisines de $\pm 60^\circ$ et de 180° ; mais des maxima moins accusés existent au voisinage de 0° et $\pm 120^\circ$.

Est-il possible de remonter de la fonction densité de probabilité en θ (supposée connue suffisamment par ces résultats) à la fonction $\phi(z)$ telle que $\phi(\lambda x + \mu)$ soit la forme générale de la fonction de répartition des populations étudiées? Ce problème comporte la résolution d'une équation intégrale non linéaire, qui peut en principe être obtenue, au moins numériquement, par une méthode de «cheminement fonctionnel». Considérons une «fonction de départ» ϕ_0 et la fonction $\chi_0(\theta)$ qui lui correspond (on la détermine par de simples quadratures). Etablissons alors entre χ_0 et χ un «trajet fonctionnel» c'est-à-

dire une famille de fonctions dépendant continûment d'un paramètre m et telle que pour $m = 0$ on ait la fonction χ_0 et pour $m = 1$ la fonction χ (le trajet sera « rectiligne » si la famille considérée est :

$$\chi_0 + m(\chi - \chi_0).$$

Déterminons de proche en proche les variations infiniment petites que doit subir Φ pour que les variations infiniment petites correspondantes de χ se situent sur le trajet fonctionnel: c'est un problème de Fredholm, et les calculatrices électroniques, qui opèrent facilement les inversions de matrices d'ordre élevé, peuvent généralement le résoudre numériquement avec une bonne approximation. Le cheminement permet donc d'arriver à une fonction Φ telle que la fonction qui lui correspond soit χ (s'il n'est pas interrompu par des singularités). La principale difficulté paraît être le choix de la fonction de départ et la solution des indéterminations; le problème posé peut en effet admettre une infinité de solutions dont une seule est la bonne, il faut que la fonction de départ en soit assez voisine. Les études préalablement faites sur des séries de grande taille pourront guider ce choix.

Nos prétentions seront plus modestes car le travail mathématique serait trop considérable et la fonction $\chi(\theta)$ encore insuffisamment bien connue. Nous commençons par rechercher quelle serait la fonction $\chi(\theta)$ si l'on pose $\phi(\xi) = 1 - e^{-\left(\frac{\xi}{\xi_0}\right)^K}$ (loi de valeurs extrêmes).

La densité de probabilité dans le cas $\xi = x$ est

$$\varphi(x) = K \frac{x^{K-1}}{x_0^K} e^{-\left(\frac{x}{x_0}\right)^K} \quad (\text{en remplaçant } \xi_0 \text{ par } x_0)$$

et dans l'espace $x_1 x_2 x_3$ la densité de probabilité relative au point P

$$\varphi_P(x) = \frac{K^3 (x_1 x_2 x_3)^{K-1}}{x_0^{3K}} e^{-\left(\frac{x_1}{x_0}\right)^K - \left(\frac{x_2}{x_0}\right)^K - \left(\frac{x_3}{x_0}\right)^K}.$$

Dans chaque tranche θ à $\theta + d\theta$ nous commençons par intégrer entre les cônes $r = sz$ et $r = (s + ds)z$ avec

$$z = \frac{\sqrt{3}}{3} (x_1 + x_2 + x_3) \quad \text{et} \quad r = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - z^2}.$$

Le volume élémentaire d'intégration est alors $z^2 s ds dz d\theta$. Si nous posons $x_i = m_i z$ avec $m_i = \frac{\sqrt{3}}{3} \left(1 + s \sqrt{2} \cos \left[\theta + \frac{2\pi}{3}(i-1)\right]\right)$ ($i = 1, 2$ ou 3) l'intégrale dans la tranche $d\theta$ est:

$$\begin{aligned} dI &= d\theta \int_0^{s_i} \frac{K^3 (m_1 m_2 m_3)^{K-1}}{x_0^{3K}} s ds \int_0^\infty Z^{3K-1} e^{-\frac{(m_1^K + m_2^K + m_3^K) z^K}{x_0^K}} dz, \\ &= 2 d\theta K^2 \int_0^{s_i} \frac{(m_1 m_2 m_3)^{K-1}}{(m_1^K + m_2^K + m_3^K)^3} s ds. \end{aligned}$$

(s_i étant la plus petite valeur positive de s qui annule l'un des m_i)

cette intégrale peut se calculer numériquement, en fonction de θ . On trouve, par exemple pour $K = 15$:

$$\frac{\chi(30^\circ)}{\chi(0^\circ)} = 1,172, \quad \frac{\chi(60^\circ)}{\chi(0^\circ)} = 1,5075.$$

Aux lois de valeurs extrêmes correspondent des fonctions $\chi(\theta)$ qui présentent bien les maxima trouvés expérimentalement pour $\pm 60^\circ$ et 180° , mais non ceux trouvés pour 0° et $\pm 120^\circ$. Cela tient à leur fort «étalement» du côté des faibles valeurs et à leur très faible étalement du côté des grandes valeurs.

Mais si on considère une loi symétrique qui se confond à peu près avec une loi de valeurs extrêmes pour les faibles valeurs de la variable, la fonction $\chi(\theta)$ correspondante a des maxima, tous égaux, pour 0° , $\pm 60^\circ$, $\pm 120^\circ$, $\pm 180^\circ$. En diminuant l'étalement du côté des grandes valeurs, on peut obtenir une fonction $\chi(\theta)$ conforme à notre répartition expérimentale (maxima principaux pour $\pm 60^\circ$ et 180° , et maxima moins accusés pour 0 et $\pm 120^\circ$) tandis que la fonction $\phi(\xi)$ se rapproche des fonctions de répartition trouvées expérimentalement dans les séries de forte taille.

Pour tester l'application de lois de ce genre il eut été plus rationnel de considérer que les paramètres s'introduisent par l'intermédiaire de $\lambda L(x) + \mu$ ou de νx^λ , et, en conséquence, de remplacer, dans le calcul de θ , nos quantités $x_1 x_2 x_3$ par leurs logarithmes; mais cela représentait une augmentation importante du temps-machine, et comme les paramètres de dispersion de nos populations n'étaient pas eux-mêmes excessivement dispersés, cela n'aurait pas modifié beaucoup nos résultats: de plus il était intéressant de tester la loi normale.

Tableau du nombre de valeurs de θ tombant dans chaque classe

0	à	+ 10°	et	0	à	- 10°	3615
+ 10°	à	+ 20°	et	- 10°	à	- 20°	3440
+ 20°	à	+ 30°	et	- 20°	à	- 30°	3475
+ 30°	à	+ 40°	et	- 30°	à	- 40°	3430
+ 40°	à	+ 50°	et	- 40°	à	- 50°	3500
+ 50°	à	+ 60°	et	- 50°	à	- 60°	3715
+ 60°	à	+ 70°	et	- 60°	à	- 70°	3610
+ 70°	à	+ 80°	et	- 70°	à	- 80°	3510
+ 80°	à	+ 90°	et	- 80°	à	- 90°	3540
+ 90°	à	+ 100°	et	- 90°	à	- 100°	3320
+ 100°	à	+ 110°	et	- 100°	à	- 110°	3385
+ 110°	à	+ 120°	et	- 110°	à	- 120°	3485
+ 120°	à	+ 130°	et	- 120°	à	- 130°	3570
+ 130°	à	+ 140°	et	- 130°	à	- 140°	3450
+ 140°	à	+ 150°	et	- 140°	à	- 150°	3440
+ 150°	à	+ 160°	et	- 150°	à	- 160°	3375
+ 160°	à	+ 170°	et	- 160°	à	- 170°	3580
+ 170°	à	+ 180°	et	- 170°	à	- 180°	3680
							63120

Résumé

La fonction de distribution des résistances à la rupture d'une éprouvette d'un type donné, se détermine de préférence au moyen de séries de forte taille, mais les laboratoires disposent surtout, dans leurs archives, de séries de petite taille appartenant à des populations différentes mais de même nature.

Nous avons admis que la façon dont s'introduisent les paramètres dans la forme générale de la fonction est connue a priori et nous avons montré par un exemple tiré de 60 000 séries de taille 3 provenant du Laboratoire Central des Ponts et Chaussées, comment il est possible d'obtenir dans ces conditions une information sur cette forme générale.

Zusammenfassung

Die Verteilungsfunktion der Bruchfestigkeiten einer gegebenen Art von Probekörper bestimmt sich vorzugsweise mit Hilfe von großen Serien; leider verfügen die Laboratorien in ihren Archiven vor allen Dingen über kleine Serien, die verschiedenen Grundgesamtheiten gleicher Art angehören.

Wir haben angenommen, daß die Art, mit der sich die Parameter in die allgemeine Form der Funktion einführen, a priori bekannt sei und haben durch ein Beispiel mit 60 000 Serien der Größe 3 des «Laboratoire Central des Ponts et Chaussées» gezeigt, wie es möglich ist, unter diesen Umständen eine Auskunft über diese allgemeine Form zu erhalten.

Summary

The function of distribution of ultimate strength of a given pattern of test piece, is determined in preference by means of great sized series; but laboratories dispose especially in their files of small-sized series belonging to different populations of the same kind.

We have assumed that the way, by which parameters are introduced in the general form of the function, is known a priori, and we have shown, with an example from 60 000 series of size 3 from the "Laboratoire Central des Ponts et Chaussées", how it is possible under these conditions to obtain an information about that general form.

Leere Seite
Blank page
Page vide