

**Zeitschrift:** IABSE congress report = Rapport du congrès AIPC = IVBH  
Kongressbericht

**Band:** 9 (1972)

**Artikel:** Etude de systèmes physiques par analogie avec un réseau électrique  
purement réactif : Application au comportement statique et dynamique  
des structures mécaniques

**Autor:** Alais, Pierre / Lamboley, Gilbert

**DOI:** <https://doi.org/10.5169/seals-9619>

### **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. [Siehe Rechtliche Hinweise.](#)

### **Conditions d'utilisation**

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. [Voir Informations légales.](#)

### **Terms of use**

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. [See Legal notice.](#)

**Download PDF:** 15.03.2025

**ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>**

**Etude de systèmes physiques par analogie avec un réseau électrique purement réactif  
Application au comportement statique et dynamique des structures mécaniques**

Untersuchung physikalischer Analogsysteme mit einem rein reaktiven Elektrizitätsnetz  
Anwendung auf das statische und dynamische Verhalten von mechanischen Bauwerken

Analysis of Physical Systems by Means of Analogy with a Purely Reactive Electric Network  
Application to the Static and Dynamic Behaviour of Mechanical Structures

**PIERRE ALAIS**  
Professeur  
Faculté des Sciences de Paris  
Paris, France

**GILBERT LAMBOLEY**  
Ingénieur  
Ecole Polytechnique

1 - INTRODUCTION

Plusieurs tentatives ont été faites pour résoudre par un procédé d'analogies électriques des systèmes d'équations linéaires sans tenir compte de leur origine (V) et (VI). Le but de la présente étude est de résoudre, par de semblables analogies, les systèmes d'équations linéaires qui interviennent dans le calcul du comportement de nombreux systèmes physiques, en s'attachant à développer un modèle analogique qui suive d'aussi près que possible la structure même de l'exemple physique proposé: la construction d'une maquette simulatrice est ainsi substituée à l'écriture, toujours laborieuse pour un ensemble complexe, des équations du problème. Un tel dispositif élimine de ce fait tous les phénomènes d'instabilité parasites qui peuvent éventuellement résulter, même lorsque le système physique est parfaitement régulier, des transformations effectuées sur les équations dans les procédés classiques de résolution. D'intéressants travaux (I), (II), (III), (IV) ont d'ailleurs été menés avec ce souci concernant le problème particulier des structures hyperstatiques, sans toutefois fournir à notre avis un outil définitif, adapté aux diverses hypothèses effectuées classiquement en résistance des matériaux ainsi qu'à une géométrie quelconque d'ossature.

Bien que les matrices inhérentes aux systèmes envisagés soient en général, et pour des raisons physiques évidentes, définies positives et symétriques et qu'il soit possible par conséquent de rendre tous leurs coefficients positifs dans un système de coordonnées approprié, l'usage des variables naturelles a été jugé, dans ce travail, préférable: outre l'intérêt que le technicien peut avoir à ne manipuler que des grandeurs directement transposées de celles auxquelles il est habitué dans les systèmes réels, on évite ainsi tout changement artificiel et parfois dangereux de variables et toute écriture d'équation, c'est à dire pratiquement tout travail d'attention fastidieux et source d'erreur. En contrepartie de ces avantages, on est cependant tenu de faire face à certaines difficultés; d'une part, il faut surmonter le problème en acceptant des coefficients des deux signes dans la matrice correspondante, ce qui conduit à utiliser pour constituer les réseaux analogiques, non plus des résistances passives auxquelles devraient nécessairement être associés des dispositifs à résistances négatives, de réalisation délicate et coûteuse, mais des selfs et des capacités alimentées par une source alternative à fréquence stabilisée: nous pensons montrer clairement dans ce qui suit que ce type de réseau, très peu employé

jusqu'à présent en calcul analogique, donne d'excellents résultats. D'autre part, les coordonnées naturelles présentent en général l'inconvénient de ne pas être indépendantes, mais liées par des relations linéaires homogènes inhérentes à certaines propriétés internes des systèmes physiques: la traduction analogique de cette dépendance s'acquiert aisément à l'aide d'un réseau complémentaire superposé au réseau constitutif proprement dit. Ces deux difficultés résolues dans leur généralité, on appréciera les avantages résultant de la simulation fidèle du modèle physique; en particulier, l'édification du réseau général à l'image de la construction réelle à partir des éléments analogiques de chaque barre, permet des montages très rapides et une analyse poussée des phénomènes.

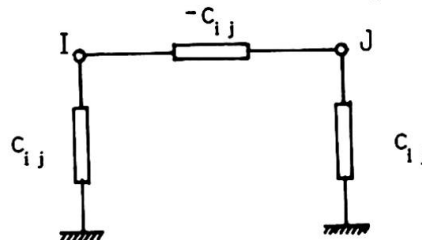
## 2 - PRINCIPE DE L'ANALOGIE

Le comportement d'un réseau de conductances électriques linéaires excité harmoniquement à la pulsation  $\omega$  est caractérisé par la matrice symétrique d'admittance  $C_{ij}$  ( $C_{ij} = C_{ji}$ ) reliant les potentiels  $\varphi_i$  de ses noeuds aux intensités d'excitation  $I_i^{ij}$  imposées de l'extérieur selon les relations:

$$(1) \quad I_i = C_{ij} \varphi_j$$

Réciproquement, toute matrice symétrique  $C_{ij}$  peut conduire à l'élaboration d'un réseau électrique vérifiant les relations (1) de la manière suivante:

- chaque couple de coefficients non diagonaux  $C_{ij}$  et  $C_{ji} = C_{ij}$  est représenté par le réseau élémentaire



- chaque coefficient diagonal  $C_{ii}$  est représenté par la conductance  $C_{ii}$  reliant le noeud I à la masse.

Le réseau obtenu est ainsi composé des conductances  $\Gamma_i = \sum_j C_{ij}$  reliant chaque noeud I à la masse et des conductances  $\Gamma_{ij} = -C_{ij}$  reliant les noeuds I et J.

De même tout système physique discret linéaire excité statiquement ou harmoniquement voit son comportement décrit par des relations du type (1) et est donc susceptible d'être simulé électriquement par un réseau élaboré comme il vient d'être dit à la condition de disposer des conductances  $\Gamma_i$  et  $\Gamma_{ij}$  imposées par le problème à un arbitraire d'échelle près. Les composants électriques classiques se réduisent aux résistances, aux selfs et aux capacités et ne permettent, quelle que soit leur combinaison que la réalisation d'admittances à partie réelle positive, ce qui semble une entrave au procédé, la réalisation de conductances à partie réelle négative étant possible grâce à l'utilisation de circuits actifs mais compliquée et onéreuse. Toute une classe de systèmes échappe cependant à cette limitation: il s'agit en l'occurrence des systèmes linéaires statiques, lesquels sont décrits par une matrice symétrique à coefficients réels, laquelle peut être toujours représentée par un réseau purement réactif de capacités et de selfs si on convient d'adopter un coefficient d'échelle analogique imaginaire pur reliant les composantes matricielles  $C_{ij}$  fournies par le système réel étudié et les admittances réactives de simulation  $i_{ij}$  utilisées, ceci se traduisant par un simple déphasage de  $\pi/2$  entre intensités et potentiels électriques. De même, les systèmes physiques en oscillation harmonique libre ou forcée sans pertes peuvent être directement simulés par un réseau purement réactif (§ 4). Enfin, tout système linéaire discret en oscillation forcée avec pertes peut être simulé mais le formalisme retenu, c'est-à-dire le choix des variables s'identifiant aux potentiels du réseau simulateur doit être effectué de manière que le réseau associé ne comporte que des conductances  $\Gamma_i$  et  $\Gamma_{ij}$  à partie réelle positive (§5)

3 - CARACTERISATION ET SIMULATION D'UN SYSTEME DISCRET LINEAIRE (VIII)

Une ossature hyperstatique chargée statiquement.

- La description d'un tel système conduit au choix d'une collection de  $n$  variables naturelles  $\varphi_i$  permettant par exemple d'atteindre les déplacements et rotations des noeuds.

- Si nous supposons provisoirement que les effets extérieurs ne sont exercés qu'au niveau des noeuds, l'énergie élastique de la structure somme des énergies de chaque élément constituant s'écrit selon la forme quadratique

$$(2) \quad W = \frac{1}{2} A_{ij} \varphi_i \varphi_j$$

ce qui permet d'associer aux variables de position  $\varphi_i$  les variables de tension

$$(3) \quad A_i = A_{ij} \varphi_j$$

la matrice symétrique  $A_{ij}$  s'exprimant sans ambiguïté à partir de la forme quadratique (2).

Les charges sont caractérisées par le travail élémentaire qu'elles développent dans la déformation élémentaire  $\varphi_i \rightarrow \varphi_i + d\varphi_i$

$$(4) \quad dW = B_i d\varphi_i$$

Ce travail s'identifie à la différentielle de l'expression (2), soit compte tenu de la symétrie des  $A_{ij}$  :

$$dW = \frac{1}{2} A_{ij} (\varphi_j d\varphi_i + \varphi_i d\varphi_j) = A_i d\varphi_i$$

soit encore

$$(5) \quad (B_i - A_i) d\varphi_i = 0$$

Deux cas se présentent alors :

- les  $\varphi_i$  sont indépendantes et  $B_i = A_i$  les équations

$$(6) \quad B_i = A_{ij} \varphi_j$$

constituent la relation matricielle caractéristique du système.

- cas beaucoup plus fréquent, la collection de variables  $\varphi_i$  est surabondante et celles-ci sont reliées par  $p$  relations de dépendance linéaires homogènes

$$(7) \quad \alpha_{li} \varphi_i = 0 \quad l = 1, \dots, p < n$$

le système ne possédant en fait que  $n - p$  degrés de liberté.

On ne peut plus alors identifier les données de charge  $B_i$  aux variables  $A_i$  conjuguées des  $\varphi_i$  mais l'introduction de  $p$  paramètres de Lagrange  $\varphi_l$  permet d'écrire compte tenu de (5) et (7) :

$$(B_i - A_{ij} \varphi_j - \alpha_{li} \varphi_l) d\varphi_i = 0$$

et d'aboutir aux  $(n + p)$  équations

$$B_i = A_{ij} \varphi_j + \alpha_{li} \varphi_l, \quad 0 = \alpha_{li} \varphi_l$$

lesquelles constituent la correspondance matricielle symétrique caractéristique du système

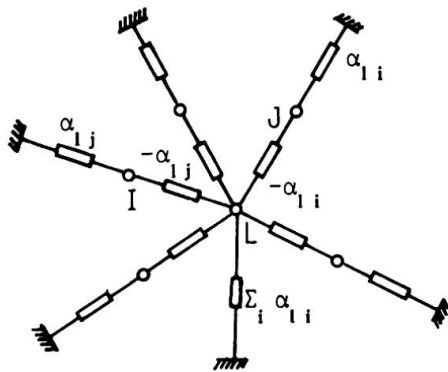
$$\begin{vmatrix} B_i \\ \vdots \\ 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} A_{ij} & \vdots & \alpha_{li} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \alpha_{li} & \vdots & 0 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \varphi_i \\ \vdots \\ \varphi_l \end{vmatrix}$$

La simulation des  $A_{ij}$  conduit à l'élaboration du réseau constitutif dont l'énergie associée ou la  $A_{ij}$  puissance dissipée, pour parler en termes de conductances réelles, s'identifie à l'énergie élastique de la structure. Naturellement, la construction de ce réseau peut s'effectuer à partir de l'assemblage de réseaux plus élémentaires représentatifs de chaque élément de la structure. La simulation des  $\alpha_{li}$  conduit à l'élaboration du réseau de transmission auquel aucune énergie n'est associée. En termes de conductances réelles, ce réseau ne "dissipe rien" et se contente de transmettre au réseau constitutif les intensités  $A_i$  à partir des intensités  $B_i$  injectées au réseau total.

Charge équivalente - Si les charges exercées ne s'appliquent pas directement aux noeuds, ce qui est d'ailleurs le plus fréquent, on se ramène au cas précédent pour déterminer les  $\varphi_i$  en remplaçant les charges réelles par une charge équivalente appliquée aux noeuds, en ce sens qu'elle provoque la même déformation généralisée  $\varphi_i$  de la structure. Un raisonnement élémentaire n'invoquant que la linéarité de la réponse de la structure à la charge exercée montre qu'une telle charge équivalente est constituée par les efforts opposés aux efforts de blocage qu'il faut développer pour annuler toute déformation généralisée en présence de la charge réelle. Cette charge équivalente se détermine ensuite à partir de chaque élément chargé supposé bloqué à ses extrémités.

#### 4 - L'ANALOGIE DU POINT DE VUE ÉNERGETIQUE

Nous venons de montrer que dans le cas très général où la représentation est surabondante, les dépendances linéaires homogènes reliant les variables utilisées sont traduites par le réseau de transmission. A chaque relation  $\alpha_{1i} \varphi_i = 0$  est associée une étoile de conductances:



Souvent ces relations sont de la forme simple  $\varphi_b - \varphi_c = \alpha (\varphi_c - \varphi_d)$  et peuvent être imposées alors par un transformateur de rapport  $\alpha$  qui se substitue à l'étoile. Un tel circuit de transmission, étoile ou transformation, est caractérisé essentiellement par le fait que, retenant toujours le langage des conductances réelles, il ne "dissipe" aucune énergie. Ainsi dans le cas de l'étoile:

$$P_i \doteq \sum_i (\alpha_{1i} \varphi_i^2 - \alpha_{1i} (\varphi_i - \varphi_1)^2) + (\sum_i \alpha_{1i}) \varphi_1^2 = 2 \varphi_1 \sum_i \alpha_{1i} \varphi_i = 0$$

Cette propriété essentielle du réseau de transmission fait que l'analogie est préservée entre la puissance dissipée par le réseau constitutif.

$$P = \sum_{i < j} (-A_{ij} (\varphi_i - \varphi_j)^2) + \sum_i \varphi_i^2 (\sum_j A_{ij}) = 2 \sum_{i < j} A_{ij} \varphi_i \varphi_j = A_{ij} \varphi_i \varphi_j$$

et l'énergie  $W$  associée au système réel simulé.

Il faut remarquer que, si pour un système statique la définition de l'énergie  $W$  ne prête à aucune confusion (en l'occurrence, pour un système hyperstatique déformé, il s'agit de l'énergie élastique emmagasinée par le système), elle est moins évidente pour un système dynamique oscillant sans pertes ( $IX$ ). Dans ce dernier cas au moins deux types d'énergie réactive participent à l'oscillation, par exemple l'énergie élastique et l'énergie cinétique pour une ossature vibrante. En pareil cas l'énergie  $W$  caractéristique du système est celle transférée par l'excitation extérieure au système dans le quart de période pendant lequel les variables  $\varphi_i$  passent de la valeur nulle à la valeur extrême. On vérifie d'ailleurs élémentairement que cette définition est en accord, dans le cas du réseau électrique simulateur lui-même réellement utilisé, avec la notion de puissance dissipée par le réseau fictif de conductances réelles positives et négatives. L'énergie  $W$  ne représente pas la somme des énergies réactives mais en fait la différence des énergies des deux types. Ainsi, dans le cas du réseau, l'énergie selfique et l'énergie capacitive apparaissent avec des signes opposés fixés conventionnellement. Lorsque le système oscille selon un mode propre, le bilan énergétique associé s'annule:  $W = 0$

Pour les systèmes discrets implicitement considérés jusqu'à maintenant, les considérations énergétiques qui précèdent ne sont pas indispensables quoique fort commodes dans la pratique. Elles sont par contre essentielles dans la représentation des systèmes continus tels que plaques ou coques. Pour de tels systèmes c'est l'énergie (cinétique ou élastique) qui est la plus directement accessible quel que soit le mode de représentation retenu. La méthode de simulation par un réseau

consiste à choisir une représentation discrète  $\varphi_i$  permettant de représenter l'énergie ou le bilan énergétique  $W$  associé au problème de façon approchée par une forme quadratique reposant sur les  $\varphi_i$  et à bâtir le réseau associé. La connaissance de l'énergie  $W$  suffit donc, ou encore celle de la densité volumique ou surfacique d'énergie pour la représentation d'un massif ou d'une plaque. De même la traduction des conditions aux limites ne pose pas de difficultés de principe puisqu'elles ont toujours une interprétation énergétique, qu'il s'agisse d'encastrement, de bord ou d'extrémité libre ou encore d'appui élastique. Les couplages ou raccordements de systèmes continus à des systèmes naturellement discrets tels que coques et ossatures se font également simplement, l'élaboration du réseau global se faisant comme la construction du système réel envisagé. Il faut toutefois remarquer que, dans le cas d'une étude dynamique, le bilan énergétique  $W$  est une forme quadratique des  $\varphi_i$  dont les coefficients  $A_{ij}$  sont des fonctions de la pulsation  $\omega$  de l'oscillation du système, ce qui exige modification du réseau simulateur quand on varie  $\omega$  ce qui peut rendre la méthode inadéquate s'il faut varier trop de conductances. Un cas idéal est celui où la variation de la pulsation  $\omega'$  de l'excitation du réseau électrique entraîne la modification souhaitée. On peut alors dire qu'il y a analogie forte et identification totale du système réel et du système électrique simulateur. Une telle circonstance ne se rencontre malheureusement que dans la simulation d'autres phénomènes électriques tels que le rayonnement électromagnétique d'une antenne ou de systèmes mécaniques de ressorts-masses, par exemple représentatifs de systèmes atomiques. Dans la plupart des calculs intéressant l'ingénieur, la représentation de l'énergie élastique interdit l'analogie forte. Restent cependant les cas assez nombreux où une représentation approchée ou encore la simplicité de la structure permettent de ne varier qu'un nombre réduit de conductances, ce qui autorise alors l'étude des fonctions de transfert du système.

#### 5 - ETUDE DES SYSTEMES DYNAMIQUES OSCILLANT AVEC PERTES (XII)

Les systèmes considérés précédemment c'est-à-dire statiques ou vibrant sans pertes ne relèvent finalement que de la connaissance du scalaire  $W$  en fonction de la représentation  $\varphi_i$  choisie, laquelle est réelle puisque tous les points d'un système sans pertes vibrent en phase ou en antiphasse (à la condition évidente de ne considérer, à chaque calcul, qu'une excitation également en phase). Il n'en est plus de même pour un système présentant des pertes. Pour un tel système, la représentation doit être complexe, chaque variable devant caractériser l'amplitude et le déphasage de la vibration en un point, et il n'est plus possible de faire appel à un scalaire donnant comme précédemment toutes les informations. Par contre il est toujours possible de traduire la relation matricielle inhérente au système sans nécessairement écrire les équations, ce, toujours par des considérations énergétiques. Il suffit en effet d'élaborer le réseau en représentant à un coefficient d'échelle arbitraire près la puissance reçue de l'extérieur par le système sous forme réactive des deux types et sous forme dissipative.

#### FORMULATION GENERALE DE L'ANALOGIE

L'état du système considéré oscillant à la pulsation forcée étant caractérisé selon la notation complexe habituelle par les vecteurs généralisés de rang  $n$  de position et vitesse respectives  $x_1 = X_1 e^{j\omega t}$ ;  $v_1 = V_1 j^{\omega t} = j\omega X_1$ , le problème est posé par la donnée:

a) de la puissance acceptée à l'instant  $t = 0$  par le système sous la forme

$$(8) \quad p_m = \langle P_{ij}, V_j, V_i \rangle \quad \text{ou} \quad \langle A, B \rangle = R_e A \cdot R_e B$$

c'est à dire la donnée de l'impédance  $P_{ij}$  propre au système dans la représentation choisie  $x_1$  ou  $v_1$

b) des  $p$  couplages linéaires homogènes liant éventuellement les variables de représentation

$$(9) \quad \alpha_{li} V_i = 0 \quad l = 1, \dots, p < n$$

les  $\alpha_i$  étant tous réels et adimensionnels;

c) de la puissance fournie à l'instant  $t = 0$  par le système extérieur sous la forme

$$(10) \quad p_m = \langle F_i, V_i \rangle$$

c'est à dire par la donnée des composantes généralisées  $f_i = F_i e^{j\omega t}$  de l'excitation extérieure. La conservation de l'énergie exige naturellement d'égaliser les puissances (8) et (9), mais l'existence des couplages (9) interdit en général d'identifier les amplitudes  $F_i$  de l'excitation aux variables  $A_i = P_{ij} V_j$  conjuguées des variables de représentation. Cependant, calquant le raisonnement déjà invoqué en (2), on peut dire que les données (8), (9), (10) posent correctement le problème car elles permettent théoriquement de choisir une nouvelle représentation du système à  $n - p$  variables indépendantes  $V_s$  et l'identification alors possible des nouvelles composantes de l'excitation aux variables conjuguées des  $V_s$  conduit à l'équation

$$(11) \quad F_s = A_s = P_{1k} V_k$$

qui fournit une solution unique  $V_s$  si la matrice  $P_{1k}$  n'est pas singulière, ce qui est toujours vérifié, si on exclut naturellement le cas très particulier des résonances propres d'un système isolé sans pertes.

L'analogie consiste à associer aux  $V_i$  les amplitudes des potentiels  $\phi_i = \alpha_i V_i e^{j\omega t}$  de  $n$  noeuds électriques  $I$  selon la correspondance

$$(12) \quad \phi_i = \alpha V_i$$

et le réseau construit sur ces noeuds et excité à la pulsation  $\omega'$  est élaboré de manière à admettre au temps  $t = 0$  la puissance

$$(13) \quad p_e = \langle \Gamma_{ij}(\omega') \phi_j, \phi_i \rangle = \frac{1}{\eta} \langle P_{ij} V_j, V_i \rangle = \frac{1}{\eta} p_m$$

quels que soient les  $V_i$  ou les  $\phi_i = \alpha V_i$  ce qui impose que l'admittance du réseau s'exprime selon

$$(14) \quad \Gamma_{ij}(\omega') = \frac{1}{\eta \alpha^2} P_{ij}(\omega)$$

Un tel réseau est construit comme ceux purement réactifs déjà étudiés en reliant les noeuds  $I$  et  $J$  par les conductances  $C_{ij}(\omega') = -P_{ij}(\omega)/\eta \alpha^2$  ainsi que les noeuds  $I$  à la masse par les conductances  $(\frac{1}{\eta \alpha^2}) \Sigma P_{ij}(\omega)$ . Ceci n'est réalisable simplement à l'aide d'inductances, de capacités et de résistances que si les éléments non diagonaux de  $P$  ont une composante réelle négative et si la somme des éléments de chaque ligne ou colonne possède une composante réelle positive, l'usage systématique des résistances négatives étant interdit par l'encombrement et le coût de ces dernières: le choix de la représentation, toujours effectué en vue d'obtenir la plus grande simplicité possible du réseau, sera affecté par ces dernières restrictions. La donnée (8) étant ainsi traduite analogiquement, les relations (9) peuvent être imposées aux  $\phi_i$  comme aux  $V_i$ , à l'aide de circuits purement réactifs n'absorbant pas globalement de puissance et se contentant de transmettre cette dernière de manière à ne pas perturber la simulation énergétique. Ces circuits peuvent être constitués par des réseaux en étoile déjà décrits ou par des transformateurs créant des pertes négligeables, compensés de manière à n'emmagasiner qu'une énergie réactive faible en regard de celle qui affecte les autres composants. Enfin la donnée (10) est traduite en harmonie avec la correspondance (6) grâce à l'injection aux noeuds  $I$  d'intensités d'amplitude  $I_i = F_i / \alpha \eta$ . Le comportement en phase et en amplitude du réseau permet alors d'atteindre la solution unique satisfaisant aux données (8), (9) et (10).

On remarquera que la pulsation  $\omega'$  d'excitation du réseau n'a aucune espèce d'importance dans la mesure où la correspondance (14) reste satisfaite: or, dans certains cas, la loi de variation  $P_{ij}(\omega)$  peut être traduite en conservant les éléments du réseau et en variant la pulsation  $\omega'$  selon une loi  $\omega' = f(\omega)$  qui se trouve être dans le cas le plus fréquent une simple proportionnalité. Cette situation confère alors un avantage incontestable au calcul analogique dans la

recherche des fréquences propres des variations continues de toute grandeur en fonction de la fréquence, etc...; ce cas se présente effectivement dans l'étude approchée par une représentation discrète de la propagation à symétrie de révolution ou à caractère bidimensionnel d'un champ électromagnétique en interaction avec un milieu, homogène ou non, diélectrique ou conducteur à conductibilité réelle ou complexe comme l'est un plasma (XI).

Enfin, il est évident qu'on peut traiter dans l'analogie les données, conjuguées dans le plan complexe, des données (8) et (10), ce qui a pour effet simplement d'inverser les phases relatives. Cette simulation " imaginaire conjuguée " permet d'intervertir le rôle des capacités et des inductances et peut être intéressante pour réduire le nombre de ces derniers.

Tout ce qui précède suppose le choix de la représentation  $X_i$  ou  $V_i$  effectuée et la connaissance de l'impédance généralisée  $P_{ij}$  correspondante. Or, les considérations énergétiques qui viennent d'être effectuées permettent d'envisager une façon plus naturelle et plus physique de procéder.

Elle consiste d'abord à détailler les diverses formes  $E_i$  d'énergie qui participent réellement à un échange dans l'oscillation, à la fois suivant la forme d'énergie et suivant l'élément du système, si ce dernier en comporte plusieurs.

Le bilan énergétique du système s'écrit en sommant les puissances associées à chaque forme d'énergie  $E_i$  et exprimées à partir des grandeurs conjuguées apparaissant naturellement associées à  $E_i$ , soit  $p_m = \sum_i \langle A_i, B_i \rangle$

Les amplitudes  $A_i$  et  $B_i$  peuvent être de nature vectorielle et reliées entre elles par une impédance (ou une admittance selon la terminologie adoptée) matricielle, auquel cas le choix de la représentation reste affaire de cas particulier; mais le plus souvent ce sont des scalaires liés par une impédance (ou admittance) scalaire  $A = CB$  ou  $B = CA$ . On conçoit alors que le seul impératif dans le choix de la représentation est de pouvoir traduire ou la grandeur  $A$  ou la grandeur conjuguée  $B$  par une amplitude de potentiel  $\phi_i$  ou une différence  $\phi_i - \phi_j$  qui soit, par définition, en phase ou plus précisément lui corresponde, grâce à un coefficient  $\alpha$  réel. Par exemple si  $B = \alpha (\phi_i - \phi_j)$  la correspondance énergétique sera assurée si

$$p_e = \langle C_{ij} (\phi_i - \phi_j), (\phi_i - \phi_j) \rangle = \frac{1}{\eta} \langle CB_i, B \rangle$$

c'est à dire grâce à la conductance  $C_{ij}(\omega) = C/\eta\alpha^2$  reliant les noeuds  $I$  et  $J$  du réseau. Le paragraphe suivant illustre cette manière de procéder pour un exemple de phénomène viscoélastique.

EXEMPLE : SIMULATION D'UN CHAMP BIDIMENSIONNEL DE DEFORMATIONS VISCOELASTIQUES D'UN MILIEU HOMOGENE

Nous traiterons le cas de déformations planes subies, à la pulsation  $\omega$  imposée, par un massif vérifiant, ainsi que le système exciteur, l'invariance  $\partial/\partial z = 0$  dans un repère cartésien  $Oxyz$ . Les déplacements sont alors décrits par leurs seules composantes selon  $Ox$  et  $Oy$ ,  $u, v = U, V e^{j\omega t}$ . Comme précédemment, nous ne retiendrons pour les diverses grandeurs que les amplitudes complexes et les puissances d'échange au temps  $t = 0$ . La déformation est caractérisée par le champ tensoriel

$$(16) \quad \tilde{\epsilon}(x,y) = \begin{vmatrix} \frac{\partial U}{\partial x} & \frac{1}{2} (\frac{\partial U}{\partial y} + \frac{\partial V}{\partial x}) & 0 \\ \frac{1}{2} (\frac{\partial U}{\partial y} + \frac{\partial V}{\partial x}) & \frac{\partial V}{\partial y} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

et la contrainte par

$$(17) \quad \tilde{\sigma} = 2\mu\tilde{\epsilon} + \lambda\theta\tilde{I} \quad \theta = \epsilon_{ii} = \frac{\partial U}{\partial x} + \frac{\partial V}{\partial y}$$

où  $\lambda = \lambda'(\omega) + j\lambda''(\omega)$ ,  $\mu = \mu'(\omega) + j\mu''(\omega)$  sont les coefficients de Lamé complexes définissant les propriétés viscoélastiques du milieu à la pulsation  $\omega$



envisagée. La puissance associée à l'énergie viscoélastique s'écrit en densité volumique:

$$\begin{aligned} \pi &= \langle \sigma_{ij}, j\omega \epsilon_{ij} \rangle = \langle \tilde{\sigma}, j\omega \tilde{\epsilon} \rangle = \langle 2\mu \tilde{\epsilon}, j\omega \tilde{\epsilon} \rangle + \langle \lambda \theta, j\omega \theta \rangle \\ &= \langle 2\mu \frac{\partial U}{\partial x}, j\omega \frac{\partial U}{\partial x} \rangle + \langle 2\mu \frac{\partial V}{\partial y}, j\omega \frac{\partial V}{\partial y} \rangle \\ &+ \langle \frac{\mu}{2} (\frac{\partial U}{\partial y} + \frac{\partial V}{\partial x}), j\omega (\frac{\partial U}{\partial y} + \frac{\partial V}{\partial x}) \rangle + \langle \lambda (\frac{\partial U}{\partial x} + \frac{\partial V}{\partial y}), j\omega (\frac{\partial U}{\partial x} + \frac{\partial V}{\partial y}) \rangle \end{aligned}$$

Le découpage du champ continu en volumes élémentaires reposant sur la surface élémentaire  $\Delta x \Delta y$  et l'unité de longueur selon  $Oz$  conduit à expliciter de façon approchée la puissance associée à un tel volume à partir des accroissements  $\Delta x$  ou  $\Delta y$  de  $U, V$  selon  $Ox$  ou  $Oy$  sur les longueurs élémentaires  $\Delta x$  ou  $\Delta y$ ;

$$(19) \quad p_{\text{elast.}} = \Delta x \Delta y \left\{ \langle 2\mu \frac{\Delta_x U}{\Delta x}, j\omega \frac{\Delta_x U}{\Delta x} \rangle + \langle 2\mu \frac{\Delta_y V}{\Delta y}, j\omega \frac{\Delta_y V}{\Delta y} \rangle + \langle \frac{\mu}{2} (\frac{\Delta_y U}{\Delta y} + \frac{\Delta_x V}{\Delta x}), j\omega (\frac{\Delta_y U}{\Delta y} + \frac{\Delta_x V}{\Delta x}) \rangle + \langle \lambda (\frac{\Delta_x U}{\Delta x} + \frac{\Delta_y V}{\Delta y}), j\omega (\frac{\Delta_x U}{\Delta x} + \frac{\Delta_y V}{\Delta y}) \rangle \right\}$$

De même, la puissance associée à l'énergie cinétique du même volume peut s'écrire,  $\rho$  étant la masse volumique

$$(20) \quad p_{\text{cinet.}} = \Delta x \Delta y \langle -\rho \omega^2 U, j\omega U \rangle + \langle -\rho \omega^2 V, j\omega V \rangle$$

ce qui conduit à choisir une représentation analogique par des potentiels associés aux vitesses des déplacements observés aux sommets d'un maillage  $\Delta x \Delta y$  dans la correspondance

$$\phi = \alpha \frac{j\omega U}{\Delta x} \quad \psi = \alpha \frac{j\omega V}{\Delta y} \quad p_e = \frac{1}{\eta} (p_{\text{elast.}} + p_{\text{cinet.}})$$

La puissance associée à la maille fondamentale du réseau simulateur devant alors s'écrire, en posant  $\gamma = \Delta x / \Delta y$

$$\begin{aligned} p_e &= \langle \frac{2\mu \Delta x \Delta y}{j\omega \eta \alpha^2} \Delta_x \phi, \Delta_x \phi \rangle + \langle \frac{2\mu \Delta x \Delta y}{j\omega \eta \alpha^2} \Delta_y \psi, \Delta_y \psi \rangle + \langle \mu \frac{\Delta x \Delta y}{2 j\omega \eta \alpha^2 \gamma^2} (\gamma^2 \Delta_y \phi + \Delta_x \psi), (\gamma^2 \Delta_y \phi + \Delta_x \psi) \rangle \\ &+ \langle \frac{\lambda \Delta x \Delta y}{j\omega \eta \alpha^2} (\Delta_x \phi + \Delta_y \psi), (\Delta_x \phi + \Delta_y \psi) \rangle \\ &+ \langle \frac{j\omega \rho \Delta x^3 \Delta y}{\eta \alpha^2} \phi, \phi \rangle + \langle \frac{j\omega \rho \Delta x \Delta y^3}{\eta \alpha^2} \psi, \psi \rangle \end{aligned}$$

On peut préférer utiliser la simulation conjuguée qui permet de réduire le nombre des inductances nécessaires, ce qui conduit au réseau de la figure 1. La représentation choisie permet manifestement de traduire sans difficultés les deux premiers et les deux derniers termes. Par contre, les deux autres exigent de faire appel aux potentiels

$$\gamma^2 \Delta_y \phi + \Delta_x \psi \quad \text{et} \quad \Delta_x \phi + \Delta_y \psi$$

dépendant de ceux déjà retenus et qui peuvent être établis à l'aide de transformateurs compensés. Cette situation justifie le décalage de  $\Delta x/2$  et  $\Delta y/2$  du maillage des  $\phi$  par rapport à celui des  $\psi$  qu'on observe à la figure 1. Le tableau suivant précise la correspondance définissant les conductances et les valeurs des éléments avec lesquelles elles sont réalisées à la pulsation  $\omega'$  d'excitation du réseau:

$$2 \frac{\Delta x \Delta y}{\eta \alpha^2} \frac{\mu' - j\mu''}{-j\omega} = jC_x \omega' + \frac{1}{R_x}$$

d'où l'on tire les valeurs de  $C_x$  et  $R_x$

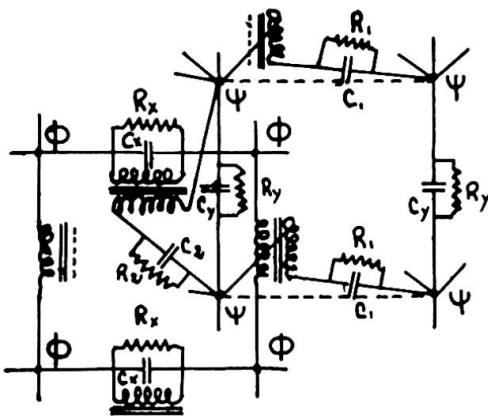


Figure 1

$$C_x = \frac{2\mu' \Delta x \Delta y}{\eta \alpha^2 \omega \omega}, \quad R_x = \frac{\eta \alpha^2 \omega}{2\mu'' \Delta x \Delta y}$$

et de même  $C_y = C_x$ ,  $C_1 = \frac{1}{4} \gamma^2 C_x$ ,  $C_2 = \frac{\lambda'}{2\mu' C_x}$

$$R_y = R_x, \quad R_1 = 4\gamma^2 R_x, \quad R_2 = \frac{2\mu''}{\lambda'' R_x}$$

On peut de même envisager de traiter un champ bidimensionnel correspondant à un phénomène de révolution, par exemple l'attaque par une force oscillante normale à la surface d'un massif semi-infini à gradient d'inhomogénéité également normal à la surface, ce qui présente un grand intérêt pour l'interprétation des sondages acoustiques qu'on opère de cette façon, toutes les fois que les longueurs caractéristiques d'inhomogénéité sont de l'ordre des longueurs d'onde de propagation dans le solide ou inférieures, ce qui rend inopérente l'approximation analogue à celle de l'optique géométrique.

## 6 - BILAN DE NOS ETUDES CONCERNANT LES STRUCTURES

Nous avons recherché les modèles électriques d'un certain nombre de structures type; nous avons réalisé un certain nombre de ces modèles; nous avons vérifié leur fonctionnement correct; enfin, nous avons apprécié la précision des résultats sur des structures particulières susceptibles d'une analyse mathématique simple ou existant dans la littérature. Cette précision est excellente puisque le plus grand écart que nous ayons observé jusqu'à présent est de 3,4% sur le moment et la flèche au centre d'une plaque circulaire, appuyée sur sa circonférence et uniformément chargée.

Nous avons ainsi étudié un nombre important d'ouvrages actuellement construits. Ces ouvrages sont constitués d'assemblages divers de câbles, de poutres droites ou courbes et de plaques planes de forme quelconque. La disposition des appuis, les conditions d'appui et de chargement peuvent être absolument quelconques. Les modèles permettent la recherche rapide de l'ouvrage optimum, la représentation de la fondation (sol rigide, sol élastique, pieux), l'analyse du comportement en cours de construction (ouvrages en encorbellement), la recherche des réglages à effectuer (haubans, précontrainte, dénivellation d'appuis)...

Nous avons étudié à titre expérimental les vibrations d'une poutre Vierendeel, des problèmes d'élasticité plane...

Nous avons étudié, sans réalisation des modèles correspondants, la représentation d'un solide en élasticité à trois dimensions, la représentation des coques, la représentation d'un massif viscoélastique soumis à une oscillation forcée de façon bidimensionnelle.

## BIBLIOGRAPHIE

- (I) - G. KRON - Tensorial analysis and equivalent circuits of elastic structures (J. Frankl. Inst. t. 238, n°6, 1944, p.399-452)
- (II) - F.L. RYDER - The analysis of linear and non linear framed structures (Thesis, New York University, December 1950)
- (III) - F.L. RYDER - Electrical analogs of statically loaded structures (Trans. Amer. Soc. Civ. Eng. t. 119, 1954, P. 1046)
- (IV) - J. GOETHALS - Calcul analogique de structures hyperstatiques et application au calcul des tuyauteries en expansion thermique (Ann. Assoc. Intern. pour le calcul analogique, t.1, n°2, 1958, p.64-74)
- (V) - A. ROJAS-LAGARDE et J. SANGUINETTI - Resolucion de sistemas hiperestaticos mediante mediciones en circuitos electricos (Revista Electrotecnica, Buenos-Aires, Octobre 1958, p.389-392)

- (VI) - L. MALAVARD et L. GYERGYEK - Calculateur analogique à éléments réactifs pour la résolution automatique des systèmes d'équations algébriques linéaires - (Actes des 3<sup>e</sup> journées Internationales de Calcul analogique. Presses académiques européennes BRUXELLES 1962, p. 46-51)
- (VII) - P. ALAIS ET R. SIESTRUNCK - Sur la résolution analogique des assemblages continus plans de pièces droites.  
(C.R. Acad. Sc. t.252, 1961, p.1104-1106)
- (VIII) - P. ALAIS - Calcul analogique de Systèmes Physiques linéaires.  
(Journ. de Mécan. Vol. II, n°3, Septembre 1963)
- (IX) - P. ALAIS - Simulation du comportement dynamique de structures au moyen de réseaux de selfs et capacités.  
(Journ. de Mécan. Vol. III, Mars 1964)
- (X) - Y. ROCARD - Dynamique des vibrations.
- (XI) - P. ALAIS - Calcul analogique du rayonnement d'une antenne à symétrie de révolution en interaction avec un plasma de rentrée.  
(Note technique intérieure ONERA)

-----

R E S U M E

Une structure élastique en équilibre statique ou dynamique peut être représentée par un réseau électrique purement réactif; ce réseau est composé uniquement de capacités et de selfs; il est excité à fréquence invariable. Les intensités et les tensions électriques sont respectivement proportionnelles aux déformations et aux efforts subis par la structure représentée.

L'énergie réactive du réseau (énergie capacitive maximum - énergie selfique maximum) est proportionnelle à l'énergie de déformation de la structure (énergie élastique maximum - énergie cinétique maximum dans le cas dynamique).