Ein Verfahren für die Formfindung von beliebigen, vorgespannten Netzwerkkonstruktionen

Autor(en): **Argyris, J.H. / Angelopoulos, T.**

Objekttyp: **Article**

Zeitschrift: **IABSE congress report = Rapport du congrès AIPC = IVBH Kongressbericht**

Band (Jahr): **9 (1972)**

PDF erstellt am: **21.07.2024**

Persistenter Link: https://doi.org/10.5169/seals-9579

Ein Verfahren für die Formfindung von beliebigen, vorgespannten Netzwerkkonstruktionen

A Method for Determining the Shape of Prestressed Network Constructions

Une méthode pour la détermination des flèches des réseaux de câble tendus

J.H. ARGYRIS
Prof., Dr., Dr. h.c.

T. ANGELOPOULOS
Dipl.-Ing.

Institut für Statik und Dynamik der Luft- und Raumfahrtkonstruktionen
Stuttgart, BRD

Übersicht. Aus rein statischen Überlegungen, durch Anwendung der finiten Elemente und der Matrizenverschiebungsmethode, wird ein Verfahren für die Formfindung von vorgespannten Konstruktionen beschrieben. Mit einer minimalen Anzahl von Anfangsdaten läßt sich bei geforderter Vorspannung die entsprechende Geometrie für beliebige Netzwerke bestimmen. Langwierige und kostspielige Modelle werden dadurch überflüssig. Anhand von komplizierten Beispielen wird die Allgemeinheit des Verfahrens bestätigt.

Einleitung. Die Formfindung von vorgespannten Netzwerkkonstruktionen ist von fundamentaler Bedeutung für die weitere Entwicklung und Verbreitung solcher Strukturen. Die Form von Seilnetzen wird nicht nur nach architektonischen Gesichtspunkten gestaltet; sie hat in erster Linie die Funktion dieser Strukturen bezüglich des Tragverhaltens zu erfüllen. Die Ermittlung der Form durch Modelle ist langwierig und ungenau. Kleine Maßstäbe verursachen zu starre Simulation der Ränder, der tragenden Maste und große Fehler bei der Messung der Geometrie und der entsprechenden inneren Kräfte. Es wird außerdem für den Fall, daß die Untersuchung der Lastfälle ungünstig ausfällt, z.B. sehr große Verschiebungen, schlaffe Seile, usw., sowohl aus wirtschaftlichen als auch aus terminlichen Gründen unzumutbar, neue Modelle zu bauen oder die vorhandenen zu ändern. Es ist angebracht, numerische Methoden zu entwickeln, die mit Hilfe von elektronischen Rechenanlagen den Vorgang der Formfindung beschleunigen und wirtschaftlicher zu gestalten. Im Abschnitt 1 des Beitrages wird auf die Forderungen, die an Seilnetzkonstruktionen gestellt werden, eingegangen, sowie auch auf Vernachlässigungen, die erlaubt sind, bis die gesuchte Gleichgewichtsfigur ermittelt worden ist. Trotz aller Argumente gegen Modelle wird im Abschnitt 2 ein rein theoretisches "Modell" beschrieben, das aus einer Materie besteht, die man mit sehr großen Kräften belasten und auch entsprechend dehnen kann, ohne das Hooke'sche Gesetz zu verletzen. Ausgehend von einem ebenen Netz, dessen Seile aus der obengenannten theoretischen Materie bestehen, lassen sich durch inkrementale Versetzung bestimmter Knoten in Richtung von vorgeschriebenen Punkten im Raum und mit Hilfe der Statik doppeltgekrümmte Gleichgewichtsfiguren erzeugen. Der so ermittelte Spannungszustand ist jedoch völlig unbrauchbar für das "Originalgebilde" und muß deshalb mit der geforderten Vorspannung transformiert werden. Die praktische Durchführung des Verfahrens und eine Reihe von Beispielen (z.B. die Formfindung des Netzdaches der Osttribüne des Olympia-Stadions in München) werden in Abschnitt 3 ausführlich behandelt. Eine typische Ingenieuraufgabe, die den Einsatz von Bildschirmgeräten fordert (s. Abschnitt 4), ist die Formfindung von vorgespannten Netzwerken. Die permanente Mann-Maschine Kommunikation zur Bewältigung solcher Aufgaben ist unerläßlich.

1. Forderungen an vorgespannte Netze. Die wichtigsten Forderungen an vorgespannte Netze sind, daß die Spann- und Tragseile (Abb.1) ausreichend vorgespannt sein müssen um Lastfälle wie z.B. Schnee, Wind und Temperatur aushalten zu können. Die Vorspannung darf

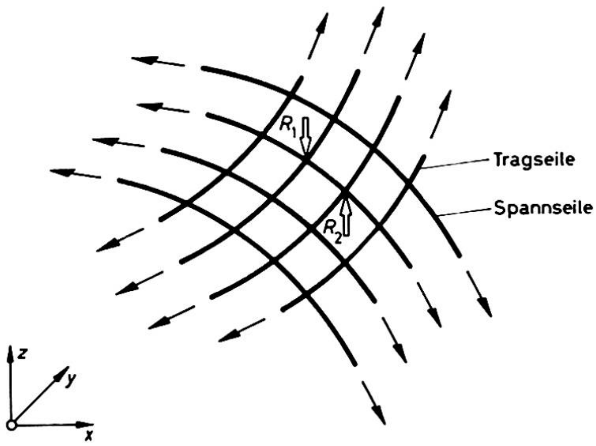

Abb.1

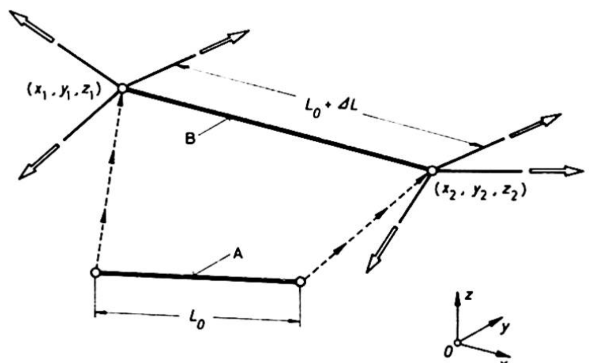

Abb. 2 A: Seil im ungespannten Zustand
B: Seil im gespannten Netz

allerdings weder zu groß noch zu klein sein. In Abbildung 1 sieht man, daß bei einer äußeren Kraft R_1 (Schnee) die Spannseile entlastet und die Tragseile belastet werden. Bei einer Belastung mit R_2 (Wind) verhält sich das Tragwerk umgekehrt. Für eine möglichst rationelle Fertigung sollten außerdem die ungedehnten Längen L_0 der Seile von Knoten zu Knoten im Innern der Netzfläche konstant sein. Die statische Berechnung von Seilnetzen soll die Lage der Knoten im Raum so bestimmen, daß die Längenänderung ΔL die geforderte Vorspannung erzeugt, und daß alle Knoten im Gleichgewicht sind. Für die Formfindung und für die ersten Untersuchungen der Lastfälle ist die Forderung nach der konstanten ungedehnten Länge von geringer Bedeutung. Übersteigt die Anzahl der unbekannten Verschiebungen die Kapazität der Rechenanlage [1], so wird die statische Berechnung mit einer breiteren Maschenweite durchgeführt als die des endgültigen Zuschnitts. Dieser wird dann durch Interpolation [1] ermittelt. Für den Fall, daß die ungedehnten Längen L_0 nicht konstant sind, begeht man den Fehler, daß die Maschenweiten der reduzierten Seilquerschnitte nicht entsprechen. Der Einfluß ist jedoch gering gegenüber der großen Dimensionen der Netze. Man kann also zunächst bei der Formfindung und der ersten Untersuchungen der Lastfälle auf L_0 = konst. verzichten. Auf die so ermittelte Fläche ist es dann kein Problem, unter Berücksichtigung der Vorspannung ein exaktes Netz zu legen [1], und die statische Berechnung für die Ermittlung der endgültigen Geometrie fortzusetzen. Ein numerisches Verfahren für die Formfindung solcher komplizierter Gleichgewichtsfiguren soll zuverlässig sein, schnell zu erwünschten Lösungen führen und vor allem benutzerfreundlich sein.

2. Ein Computer-orientiertes "Modell" für die Formfindung. Die Formfindung von räumlichen Flächen, die bestimmte Randbereiche und fast singuläre Punkte erfassen und die sich gleichzeitig im Gleichgewicht befinden sollen, bestimmt man experimentell mit der Seifenhautmethode oder an leicht deformierbaren Stoffen. Solche Versuche sind meistens kurzlebig, da der Werkstoff reißt. Es ist außerdem unmöglich verschiedene Lastfälle zu untersuchen ohne auf Draht-Meßmodelle auszuweichen. Wenn wir versuchen, die Arbeit des Modellbauers im Computer nachzuahmen, dann brauchen wir einen leicht dehnbaren Stoff. Dieser muß mit sehr großen Zugkräften belastet werden können und dabei beliebig lang dehnbar sein. Für Seile mit obigen Eigenschaften ist das Hooke'sche Gesetz für einen beliebig großen Bereich gültig. Im Computer kann dies sehr einfach durch Zahlen dargestellt werden. Ungeachtet der endgültig gesuchten Form bauen wir ein ebenes Netz, welches alle diese theoretischen Voraussetzungen erfüllt. Wir können dann durch Versetzen bestimmter Knoten das Netz zwingen, eine natürliche Gleichgewichtslage, die mit Hilfe der Statik bestimmt wird, anzunehmen. Dieses statische Experiment ist nichtlinear, da dabei große Verschiebungen auftreten, die Dehnungen bleiben aber durch

die obige "Annahme" im linearen Bereich. Mit Hilfe eines einfachen Beispieles wiederholen wir den oben geschilderten Vorgang, ohne auf die Methode der Finiten Elemente einzugehen, da sie in [2,3] ausführlich behandelt wird.

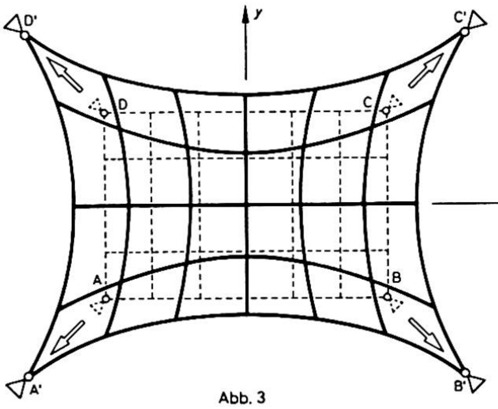

Abb. 3

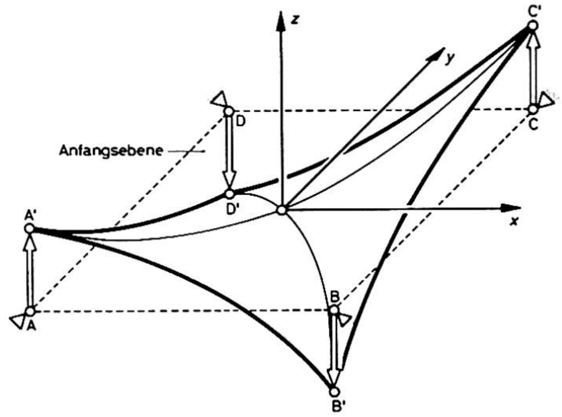

Abb. 4 Umformen einer ebenen Fläche in eine vorgespannte doppelt gekrümmte Membran durch Versetzen der Auflager

Gegeben sei ein ebenes Netz ABCD (Abb.3), gesucht wird seine Form wenn wir die Eckknoten A,B,C,D nach A', B', C', D' verschieben. Die Knoten A,B,C,D werden mit Auflager versehen und dann inkremental versetzt bis sie die Punkte A', B', C', D' erreichen. Bei jeder inkrementalen Verschiebung der Knoten wird der Belastungsvektor $\mathbf{R}_u$ (Ungleichgewichtskräfte an den Knoten, siehe Ref.1,3) sowie die Gesamtsteifigkeitsmatrix des Netzes $[\mathbf{K}_E + \mathbf{K}_G]$ für große Verschiebungen aufgebaut und das lineare Gleichungssystem

$$\mathbf{R}_u = [\mathbf{K}_E + \mathbf{K}_G]\,\mathbf{r}_\Delta$$

aufgelöst. Die daraus ermittelten inkrementalen Verschiebungen werden zur alten Geometrie hinzuaddiert und danach werden die Ecken des Netzes erneut versetzt. Wird bei dem Start der Berechnung angenommen, daß sich das ebene Netz im Gleichgewicht befindet, was nicht unbedingt der Fall sein muß, so wäre der Vektor $\mathbf{R}_u$ ein Nullvektor, da die resultierende Kraft an jedem Knoten gleich Null ist. Nachdem aber die Knoten zum ersten Mal versetzt worden sind, entstehen die ersten Ungleichgewichtskräfte. In Abbildung 5 wird der Knoten C nach C^* verschoben, dadurch entstehen die Ungleichgewichtskräfte

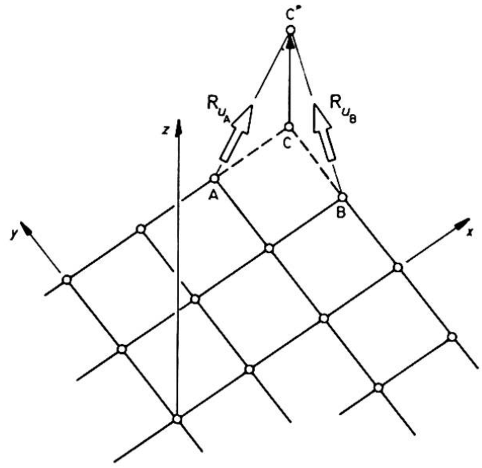

Abb. 5 Ungleichgewichtskräfte beim Hochziehen des Knotens C

$$\mathbf{R}_{u_A} = \{ R_{u_{Ax}} \; R_{u_{Ay}} \; R_{u_{Az}} \}$$

$$\mathbf{R}_{u_B} = \{ R_{u_{Bx}} \; R_{u_{By}} \; R_{u_{Bz}} \}$$

$$\mathbf{R}_u = \{ 0\,0\,0, \ldots, R_{u_{Ax}} \, R_{u_{Ay}} \, R_{u_{Az}}, 0 \ldots 0, R_{u_{Bx}} \, R_{u_{By}} \, R_{u_{Bz}}, \ldots 0\,0\,0 \}$$

Somit wird das Netz gezwungen entsprechend der Belastung eine neue Gleichgewichtslage im Raum einzunehmen. Während der einzelnen Schritte entstehen sehr große Ungleichgewichtskräfte, die nicht stören, solange die Struktur stabile Lagen durchquert. Sobald die Knoten A,B,C,D ihre Soll-Lage erreicht haben, wird weiter iteriert bis die Restkräfte einen Gleichgewichtszustand darstellen. Das gleiche Prinzip kann man auch anwenden, wenn bestimmte Knoten räumlich verschoben werden. In Abb.4 sieht man die Entstehung einer doppeltgekrümmten Fläche durch Verschieben der Knoten A,B,C,D nach A',B',C',D'. Die auf diesem Wege gewonnenen Figuren befinden sich im Gleichgewicht. Der Spannungszustand ist jedoch unbrauchbar, da durch die Seile sehr große Kräfte übertragen werden.

2.1. Transformation der aus dem "Modell" gewonnenen Werte auf das "Original".

Der Spannungsverlauf im "Modell" muß so transformiert werden, daß er angenähert dem der erwünschten Vorspannung P_{N_f} entspricht. Dies ist möglich, wenn die ungedehnten Längen des ebenen Netzes entsprechend P_{N_f} neu berechnet werden.

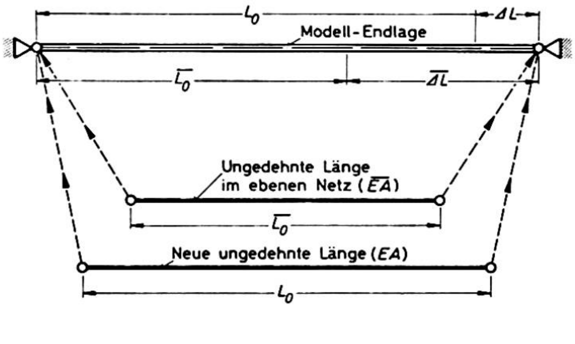

Abb.6 Neue ungedehnte Länge entsprechend der geforderten Vorspannung P_{N_1} ($EA = \overline{EA}$)

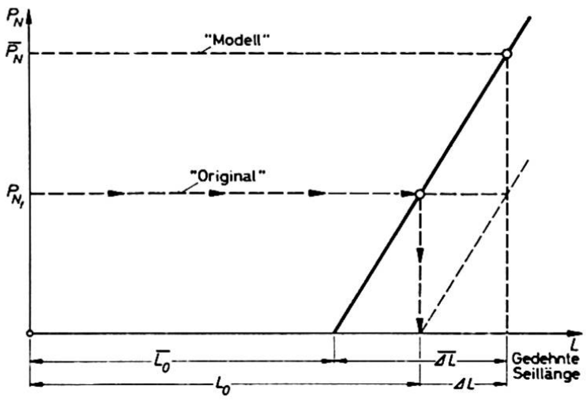

Abb. 7

Damit jedes Seilstück von der Anfangsebene aus seine Gleichgewichtslage im Raum einnehmen kann (Abb.6), muß es um ΔL gedehnt werden. Aus den folgenden 3 Gleichungen

"Modell": $\overline{P_N} = \overline{EA}\,\dfrac{\overline{\Delta L}}{\overline{L_0}}$ "Original" $P_{N_f} = EA\,\dfrac{\Delta L}{L_0}$

und der Bedingung $\overline{L_0} + \overline{\Delta L} = L_0 + \Delta L$ lassen sich die ungedehnten Längen des "Originalnetzes" so bestimmen, daß innerhalb jedes Seilnetzes die erforderliche Zugkraft übertragen wird.

$$L_0 = \frac{\overline{L_0} + \overline{\Delta L}}{(1{,}0 + P_{N_f}/EA)} \qquad (EA = \overline{EA})$$

Durch die Änderung der Längen L_0 bzw. der inneren Kräfte des Netzes ist die Gleichgewichtslage des Netzes verletzt und somit wird die iterative Gleichgewichtsermittlung erneut vorgenommen, bis die Ungleichgewichtskräfte hinreichend klein sind. Danach haben wir eine Gleichgewichtsfigur, deren Spannungsverteilung in der Nähe der geforderten Vorspannung liegt. Für die Randseile gilt die gleiche Prozedur. Auch sie nehmen eine Gleichgewichtslage im Raum ein.

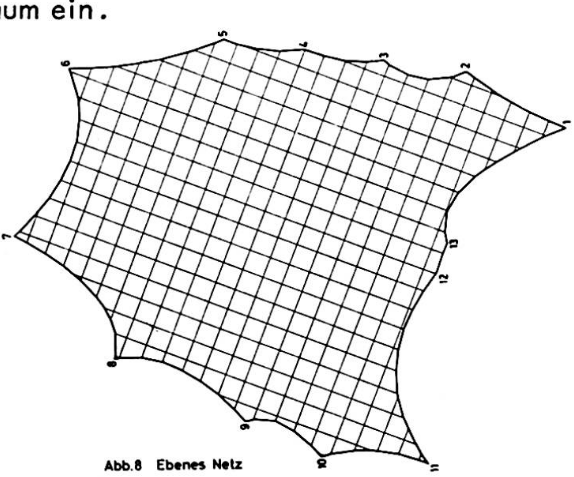

Abb.8 Ebenes Netz

3. Praktische Durchführung des Verfahrens und Beispiele.

Eine interessante vorgespannte Netzfläche mit dem Verfahren zu testen, bietet der Entwurf des Netzdaches für die Osttribüne des Olympiastadions in München [1]. Das Dach besteht aus drei miteinander gekoppelten Netzen. Wir wollen nun das Generieren eines der drei Netze (Abb.8) durch das im Abschnitt 2 beschriebene Verfahren verfolgen (siehe auch Flußdiagramm Abb.9). Die endgültigen Untersuchungen der einzel-

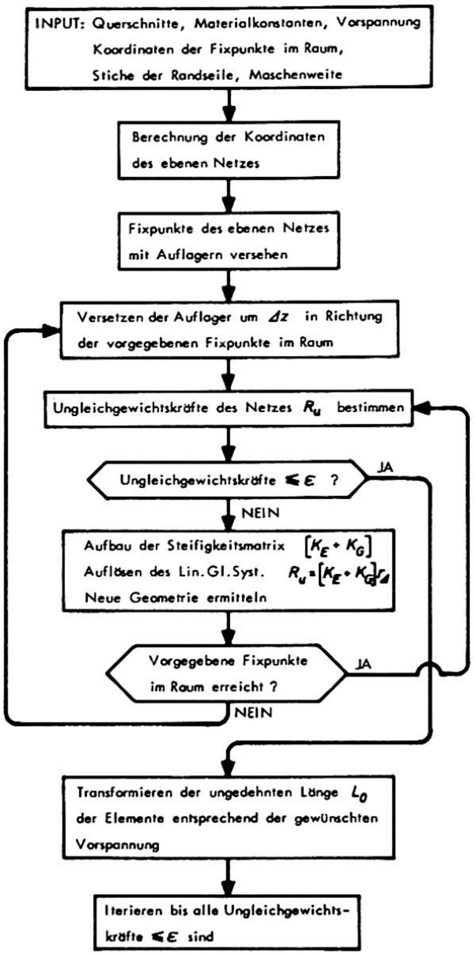

Abb.9 **Flußdiagramm für die Formfindung durch Versetzen der Auflager**

nen Lastfälle sollen mit einer ungedehnten Länge L_0 von 3m untersucht werden. Zuerst wird ein ebenes Netz L_0 =2,9m berechnet. Als Vorspannung wird im Inneren des Netzes eine Kraft von 1 Mp und am Rand eine Kraft von etwa 10 Mp angenommen. Diese Anfangswerte der Vorspannung spielen keine Rolle. Man schreibt deshalb irgendwelche kleineren Werte vor. Die EA-Werte werden im allgemeinen aus einfachen Vorberechnungen bestimmt und werden gleich für das Ebenen Netz übernommen. Man kann sie auch schätzen und während der Berechnungen für die Formfindung abändern. Für die Osttribüne sind folgende EA-Werte für die Maschenweite angesetzt worden:

EA-Rand=65250 Mp, EA-Trag-Spannseile= 10930 Mp.

Für die Schnittpunkte der Randseile untereinander im ebenen Netz wurden die Projektionen der räumlich vorgegebenen Fixpunkte genommen. Als nächster Schritt wird eine Niveauhöhe gewählt und daraus die Z-Distanzen ermittelt um welche die 13 Knoten inkremental versetzt werden. Weiterhin unterdrücken wir die möglichen Verschiebungen der Knoten 1 bis 13, damit kann das Versetzen der Knoten beginnen. Die Endlagen in z-Richtung werden in 10 Schritten erreicht (siehe Flußdiagramm Abb.9). Anschließend wird in 4 weiteren Iterationen, bei denen die Knoten festgehalten werden, die Gleichgewichtslage des "Modells" ermittelt (Abb.10). Aus dieser "Modell" Endlage (Abb.10) werden die ungedehnten Längen des "Originals" berechnet. Für die Trag- und Spannseile werden 12 Mp Zugkraft gefordert und für die Randseile 150 Mp . In Abbildung 10 sieht man 5 räumliche Phasen der Formfindung. Zuerst eine Gerade, die das Ebene Netz darstellt, anschließend drei Zwischenstufen der Entwicklung und am Ende die Geometrie des "Originals", welche kaum von der des "Modells" abweicht. Die Differenz der Koordinaten variiert zwischen 0.01 und 0.14m bei einer maximalen Länge und Breite des Netzes von ca.68 bzw. 60m. In der Abbildung 11 sind die Zugkräfte "Modell", "Original" über die Randseilelemente aufgetragen. Verblüffend ist dabei die Ähnlichkeit der Kurven. Die zwei Knicke der Kurven werden durch den Ansschluß der waagerechten Seile erzeugt. Weitere Auswertungen des Verfahrens sind die Abbildungen 12,13. Hier sind die Zugkräfte entlang der Elemente sowie die ermittelte Geometrie aufgetragen. Die Kurven haben die gleiche Ähnlichkeit wie Abb.11. Sehr interessant sind auch die sogenannten S-Kurven (Abb.14), die man auch im Tüllmodell (Institut für leichte Tragwerke Universität Stuttgart) sehen kann. Im Durchschnitt aber ist die geforderte Spannungsverteilung nicht erreicht, sondern etwa um 30% geringer. Dies ist jedoch kein Hindernis, zumal wir die Möglichkeit haben, automatisch die Spannung zu erhöhen (Abb.15) durch Nachspannen am Rand (siehe auch Ref. 1 Abschnitt 4). Die ungedehnten Längen der Seile im Inneren nach der Transformation beträgt etwa im Durchschnitt 3.01 bis 3.15m.

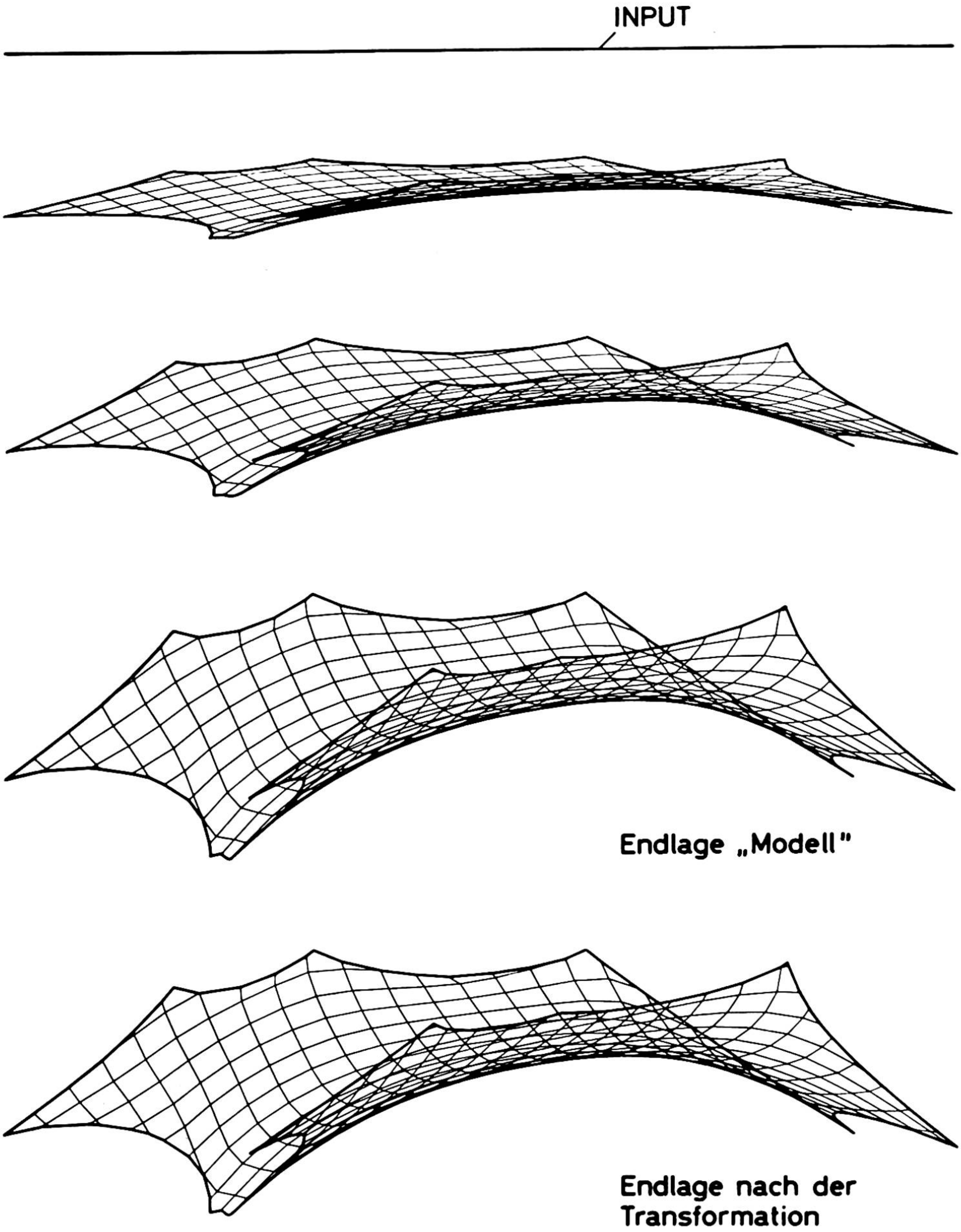

Abb.10 Hochziehen eines Netzes
Osttribüne des Olympiastadions München

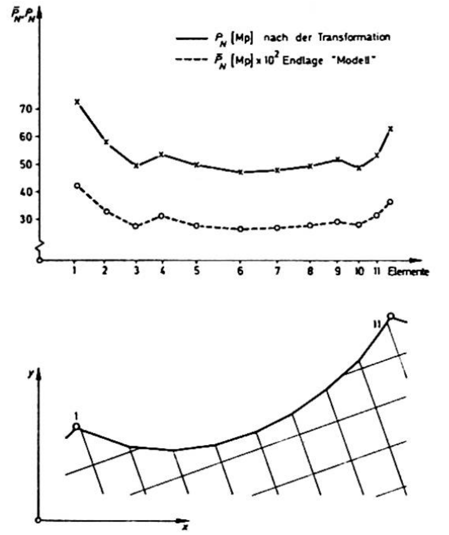

Abb.11 Kraftverlauf längs eines Randseiles (Osttribüne, München)

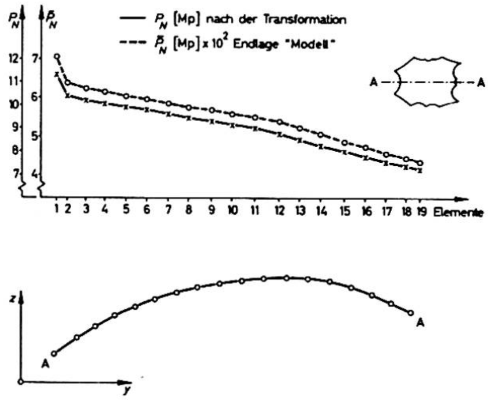

Abb.12 Kraftverlauf und Geometrie längs des Seiles A - A (Osttribüne, München)

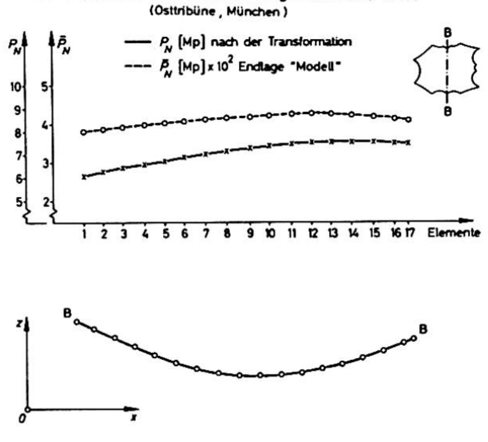

Abb.13 Kraftverlauf und Geometrie längs des Seiles B - B (Osttribüne, München)

Wir wollen jedoch wiederholen, daß es kein Problem ist, aus dieser Geometrie durch Berücksichtigung der EA-Werte und der ermittelten Vorspannung, ein Netz mit konstanter ungedehnter Länge zu berechnen. Das Verfahren soll trotzdem erweitert werden, indem die konstante ungedehnte Länge beibehalten wird. Zwei weitere Netze (Abb.16, 17), die man in der Praxis antrifft, sind mit dem gleichen Verfahren aus einem ebenen Netzwerk erzeugt worden. Das in Abbildung 16 dargestellte Netzdach kann man vielleicht analytisch vorgeben. Schwierigkeiten gibt es jedoch bei Randseilen, die das Netz in Richtung der Fundamente abspannen. Speziell soll mit diesem Beispiel gezeigt werden, daß man ausgehend von einem Ebenen Netz große Entfernungen (hier 37.5m) durch Versetzen bestimmter Knoten (hier wird nur der Mittelpunkt des Kreises versetzt) erreichen kann.

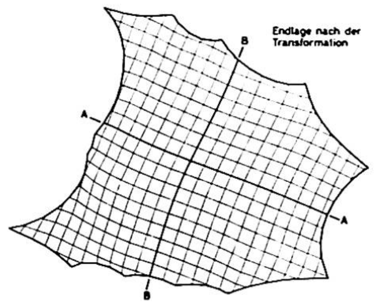

Abb.14 Grundriß der Anfangs- und Endlage beim Hochziehen

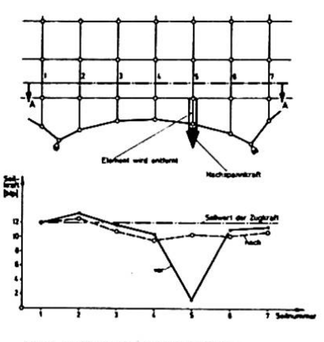

Abb.15 Nachspannen am Rand des Netzes
Kraftverlauf im Schnitt A-A vor und nach dem Nachspannen

Das in Abb.17 entwickelte Netz hat ebenso eine komplizierte Geometrie, insbesondere unter dem Bogenträger.

4. Der Einsatz von Bildschirmgeräten für die Formfindung und Berechnung von Seilnetzen.

Die komplizierte Geometrie von vorgespannten Netzen fordert eine schnelle Kommunikation zwischen Ingenieur und Computer. Tausende von Knotenkoordinaten und entsprechende Anzahl von Elementen müssen ständig kontrolliert werden. Sehr oft müssen gezielte Änderungen vorgenommen werden, wie z.B. Entfernen und Zufügen von Knoten und Elementen oder Nachspannen (Abb.15) in Bereichen mit Spannungsabfall bzw. Erhöhung. Speziell bei der Formfindung müssen flache Bereiche, die unerwünscht sind, sofort erkannt und entsprechend behandelt werden. Als sehr gutes Gerät für diese Forderungen erweist sich ein aktiver Bildschirm [4], wie z.B. das im ISD der Universität Stuttgart installierte System Control Data 1700 mit Display Konsole.

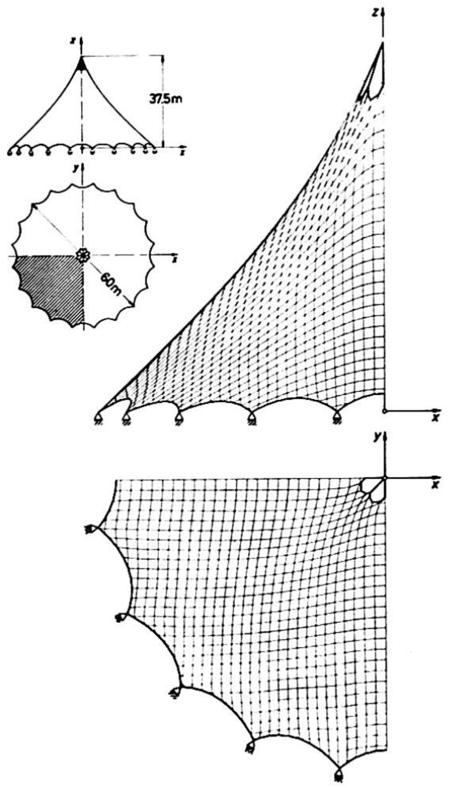

Abb.16 Hochziehen eines ebenen kreisförmigen Netzes

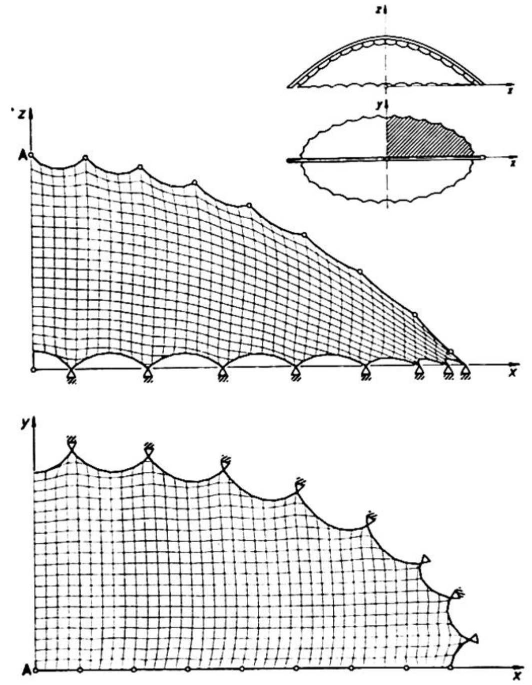
Abb.17 Formfindung durch Hochziehen
Netzüberdachung eines elliptischen Grundrißes mit Hilfe eines Bogenträgers

Besondere Vorteile bietet der ON-LINE Betrieb mit einer Großrechenanlage, wie z.B. CDC 6600. Man kann die in diesem Beitrag (siehe auch Ref.1) dargelegte Problematik fast kontinuierlich verarbeiten. Überdies hat der Ingenieur ausreichende Möglichkeiten um in die Berechnungen eingreifen zu können. Wir glauben, daß Netzwerke in Zukunft nur wirtschaftlich mit Hilfe von Bildschirmgeräten entwickelt werden können.

Literatur

[1] J.H. Argyris und T. Angelopoulos. Theorie, Programmentwicklung und Erfahrung an vorgespannten Netzwerkkonstruktionen Vorbericht des 9. IVBH Kongreßes 1972, in Amsterdam

[2] J.H. Argyris und D.W. Scharpf. Berechnung vorgespannter Netzwerke, Bayer. Akad. Wiss., Sonderdruck 4 aus den Sitzungsberichten 1970 München

[3] J.H. Argyris and D.W. Scharpf Large Deflection Analysis of Prestressed Networks Journal of Structural Division, ASCE, Vol.98 No.ST3, March 1972

[4] I. Grieger. Über den Einsatz von Bildschirmgeräten bei der Tragwerksberechnung, an die Universität Stuttgart eingereichte Dr.Ing. Dissertation.

Zusammenfassung

Die Formfindung von vorgespannten Netzwerken läßt sich nicht nur durch Modelle sondern auch durch numerische Wege ermitteln. Mit dem in diesem Beitrag dargelegten Verfahren lassen sich beliebige vorgespannte Flächen erzeugen. Weiterhin ist es möglich mit Hilfe von Bildschirmgeräten diese Berechnungsmethode erheblich zu beschleunigen und wirkungsvoller zu gestalten.