

**Zeitschrift:** IABSE congress report = Rapport du congrès AIPC = IVBH  
Kongressbericht

**Band:** 11 (1980)

**Artikel:** Déformabilité des appuis et de leur fondation dans le calcul des  
structures

**Autor:** Mathivat, Jacques

**DOI:** <https://doi.org/10.5169/seals-11417>

### **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. [Siehe Rechtliche Hinweise.](#)

### **Conditions d'utilisation**

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. [Voir Informations légales.](#)

### **Terms of use**

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. [See Legal notice.](#)

**Download PDF:** 08.02.2025

**ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>**

**XI****Déformabilité des appuis et de leur fondation dans le calcul des structures**

Berücksichtigung der Verformbarkeit der Auflager und deren Setzung bei der Bemessung von Tragwerken

The Flexibility of Supports and Foundations in the Design of Structures

**JACQUES MATHIVAT**

Professeur ENPC

Centre des Hautes Etudes de la Construction

Paris, France

**RESUME**

La déformabilité des fondations et des appuis intervient dans le comportement d'un grand nombre de structures. La présente communication rappelle les méthodes permettant d'évaluer la déformabilité des fondations, et établit les formules donnant les coefficients de souplesse en tête d'un appui quelconque. Elle traite en particulier le cas des appuis formés de voiles souples ou de lignes d'appuis doublés en néoprène.

**ZUSAMMENFASSUNG**

Die Verformbarkeit von Auflagern und Setzungen des Baugrundes wirken auf das Verhalten zahlreicher Bauwerke ein. Der vorliegende Beitrag untersucht dieses Problem und stellt Formeln auf, welche die Verformungsbeiwerte für irgend ein Auflager wiedergeben. Dieser Beitrag behandelt besonders den Fall von biegsamen Stützwänden und von Neopren-Linienlagern.

**SUMMARY**

The flexibility of supports and foundations has an effect on the behaviour of a great number of structures. The present communication presents in detail the methods giving the foundation flexibility, and establishes the formulas giving the flexibility matrix at the top of any support. It deals with the case of piers made of two thin walls, or of two lines of neopren shores.



## 1. INTRODUCTION

Les *appuis* sont les éléments d'une structure destinés à transmettre les charges appliquées au terrain sur lequel elle repose. Ce sont, par exemple, les piles ou les culées d'un pont, les poteaux ou les murs-porteurs d'un bâtiment.

Un appui se compose essentiellement de trois parties :

- une *fondation* (semelles, caissons, pieux, etc.),
- le *corps de l'appui*,
- éventuellement des *appareils d'appui*.

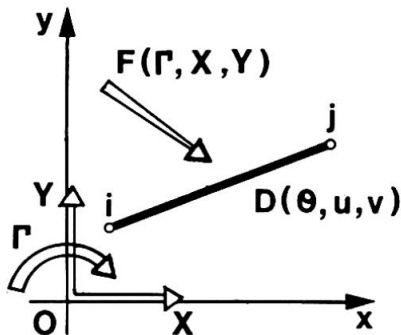
L'étude d'une structure nécessite de tenir compte de la *déformabilité des appuis*, qui interviennent dans la répartition des efforts verticaux et horizontaux mais participent aussi à la résistance à la flexion des éléments porteurs principaux (tablier ou plancher), quand ils en sont solidaires mécaniquement (portiques).

La *déformabilité* des appuis se traduit par les équations linéaires reliant les déplacements en tête de l'appui aux efforts qui lui sont appliqués. Elle est caractérisée par la *matrice d'élasticité de l'appui*.

## 2. EXPRESSION DE LA MATRICE D'ELASTICITE D'UN APPUI

### 2.1. - Expression générale

Les composantes  $\theta$ ,  $u$ ,  $v$  du déplacement  $D$  de l'extrémité  $j$  d'un appui rectiligne quelconque, de fibre moyenne  $ij$ , soumis en  $j$  à un système de forces  $F$ , dont les éléments de réduction par rapport aux axes  $o x y$  sont un moment résultant  $\Gamma$  par rapport à  $O$  et une résultante générale de composantes  $X$  et  $Y$  suivant  $Ox$  et  $Oy$ , sont données par (fig. 1) :



(Fig. 1)

$$\theta = S_{11} \Gamma + S_{12} X + S_{13} Y$$

$$u = S_{21} \Gamma + S_{22} X + S_{23} Y$$

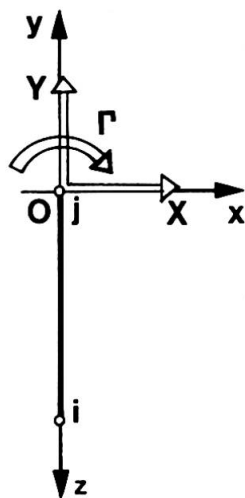
$$v = S_{31} \Gamma + S_{32} X + S_{33} Y$$

ou sous forme matricielle, par :  $(D) = (K) (F)$

La matrice carrée  $(K)$  est la matrice d'élasticité de l'appui. Elle est symétrique :

$$S_{12} = S_{21} \quad S_{23} = S_{32} \quad S_{31} = S_{13}$$

### 2.2. - Matrice d'élasticité d'un appui vertical



(Fig. 2)

Un appui est le plus souvent vertical. Si l'appui  $ij$  est orienté suivant l'axe  $o y$ , l'origine  $O$  étant confondue avec l'extrémité  $j$ , sa matrice d'élasticité se réduit alors à (fig. 2) :

$$(K) = \begin{pmatrix} S_{11} & S_{12} & 0 \\ S_{21} & S_{22} & 0 \\ 0 & 0 & S_{33} \end{pmatrix}$$

Les coefficients  $S_{11}$ ,  $S_{12}$ ,  $S_{22}$  et  $S_{33}$  sont généralement appelés :

- *souplesse de rotation* pour  $S_{11}$  et notée  $S_R$
- *souplesse de translation* pour  $S_{22}$  et notée  $S_T$
- *souplesse de translation-rotation* (ou *souplesse croisée*) pour  $S_{12} = S_{21}$  et notée  $S_{TR}$
- *souplesse verticale* pour  $S_{33}$  et notée  $S_V$ .

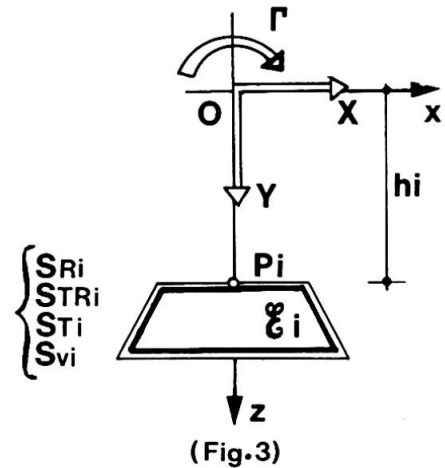
Dans la suite de cet exposé nous compterons les composantes verticales  $Y$  et  $v$  suivant l'axe  $Oz$ , dirigé de  $j$  vers  $i$ .

Le déplacement D d'un appui s'obtient par superposition des déplacements relatifs aux différents éléments qui le constituent. Si l'appui comporte plusieurs éléments  $\xi_i$  dont les coefficients de la matrice d'élasticité, calculée en un point  $P_i$  situé à la distance  $h_i$  du point d'application O des efforts  $\Gamma, X, Y$ , sont  $S_{Ri}, S_{Ti}, S_{TRi}$  et  $S_{Vi}$ , les coefficients de la matrice d'élasticité de l'ensemble de l'appui sont (fig. 3) :

$$S_R = \sum_i S_{Ri} \quad S_{TR} = \sum_i S_{TRi} + \sum_i S_{Ri} h_i$$

$$S_T = \sum_i S_{Ti} + 2 \sum_i S_{TRi} h_i + \sum_i S_{Ri} h_i^2 \quad S_V = \sum_i S_{Vi}$$

Par conséquent, à partir des valeurs des coefficients de la matrice d'élasticité de la *fondation*, du *corps d'appui* et des *appareils d'appui*, on peut obtenir les coefficients de la matrice d'élasticité de l'appui en un point quelconque, par exemple au niveau G de la fibre neutre de la structure.



### 3. INFLUENCE DE L'INTERACTION SOL-APPUI

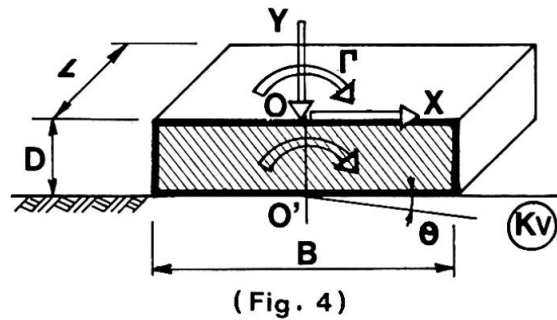
Le comportement du *sol*, qui intervient de façon importante dans la déformabilité de l'appui, dépend de la nature de la *fondation*.

#### 3.1. - Semelles superficielles

La rotation d'une semelle superficielle, supposée indéformable, de section S ( $S = B \times L$ ) sous l'effet d'un couple C, appliqué en O', est égale à (fig. 4) :

$$\theta = \frac{c}{K_V I_f}$$

$K_V$  étant le module de réaction verticale du sol de fondation et  $I_f$  le moment d'inertie de la section d'appui de la semelle sur le sol : ( $I_f = \frac{B^3 L}{12}$ ).  $K_V$  peut être obtenu à partir des essais pressiométriques (1).



Les coefficients de la matrice d'élasticité, calculée en O, au niveau supérieur de la semelle, sont :

$$S_R = \frac{1}{K_V I_f} \quad S_{TR} = \frac{D}{K_V I_f} \quad S_T = \frac{D^2}{K_V I_f} \quad S_V = \frac{1}{K_V S}$$

#### 3.2. Fondations profondes massives

C'est le cas d'une fondation constituée d'un massif en béton enterré, d'un caisson havé à l'air libre ou à l'air comprimé ou d'une colonne de grande dimension. La largeur B de la fondation est importante vis-à-vis de sa profondeur D. Sa section est  $S = B \times L$ .

##### 3.2.1. - Méthode simplifiée

On peut supposer que la fondation, considérée comme indéformable, pivote autour du milieu O' de sa base (fig. 5). Sa rotation, sous l'effet d'un couple C appliqué en O' est alors égale à :

$$\theta = \frac{C}{K_V I_f + K_H I_\ell}$$

avec :

- $K_V$  et  $K_H$  les modules de réaction vertical et horizontal du sol
- $I_f$  le moment d'inertie de la section d'appui de la fondation sur le sol
- $I_\ell$  le moment d'inertie de la surface de contact latérale de la fondation avec le sol.

$$(1) K_V = \frac{9 E}{\alpha B \lambda' + 1,5 (1 + \nu) B_0 (\lambda \frac{B_0}{B}) \alpha}$$



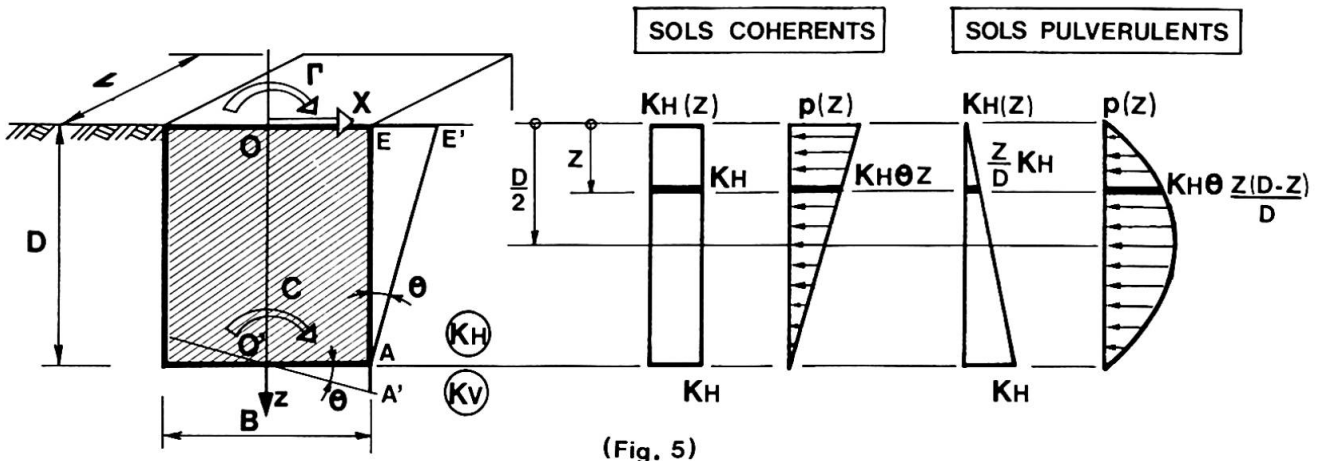
Si on admet que le module de réaction horizontal  $K_H$  est constant sur la profondeur  $D$  (sols cohérents)

$$I_\ell = \frac{D^3 L}{3}$$

Si au contraire  $K_H$  varie linéairement avec la profondeur (sols pulvérulents),  $I_\ell = \frac{D^3 L}{12}$

Les coefficients de la matrice d'élasticité de la fondation, calculée en  $O$ , au niveau supérieur de la fondation, sont alors :

$$S_R = \frac{1}{K_V I_f + K_H I_\ell} \quad S_{TR} = \frac{D}{K_V I_f + K_H I_\ell} \quad S_T = \frac{D^2}{K_V I_f + K_H I_\ell} \quad S_V = \frac{1}{K_V S}$$



(Fig. 5)

On remarquera que le moment de flexion agissant à la base de la fondation, sous l'effet des éléments de réduction  $\Gamma, X$  appliqués en  $O$ , est égal à :

$$(\Gamma + D X) \frac{I_f}{I_f + \frac{K_H}{K_V} I_\ell}$$

La réaction latérale du terrain a donc pour effet de *réduire* le moment de flexion dans le rapport  $\frac{I_f}{I_f + \frac{K_H}{K_V} I_\ell}$

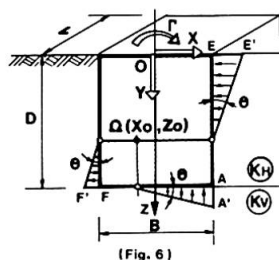
Cette réduction est très sensible quand la fondation est profonde.

Pour une fondation, dont la profondeur est supérieure au double de sa largeur ( $D \geq 2 B$ ) et pour  $K_H \neq K_V$ , la fraction du moment de flexion transmis au sol est faible (de l'ordre de quelques % du moment agissant en l'absence de terrain latéral) et sa portance est alors conditionnée essentiellement par l'effort normal appliqué.

3.2.2. - Méthode générale des rotations (1)

Dans cette méthode les efforts appliqués  $\Gamma, X, Y$  sont équilibrés uniquement par les réactions du sol, qui ne peuvent être que des *compressions* (fig. 6).

Sous l'effet des éléments de réduction  $\Gamma, X, Y$ , la fondation va alors tourner d'un angle  $\theta$  autour d'un *centre instantané de rotation*  $\Omega$ . Mais,  $\Omega$  dépendant alors des efforts appliqués, la méthode n'est pas adaptée à la recherche de la matrice d'élasticité de la fondation.



(Fig. 6)

Elle présente par contre l'avantage, connaissant les efforts appliqués à la fondation, de vérifier de façon plus exacte sa stabilité. Elle est en particulier couramment utilisée pour l'étude des fondations des piles de pont soumises aux chocs des convois fluviaux.

(1) Méthode développée par M. CASSAN « Les essais in situ en Mécanique des Sols » — Editions Eyrolles Paris 78

3.3. - Fondation sur pieux

3.3.1.- Matrice d'élasticité d'un pieu isolé

On admet que le pieu est situé dans un milieu élastique continu, caractérisé par le module de réaction  $K_H$  du sol. On appelle *longueur élastique* (ou longueur de transfert) du pieu

$$\ell_o = \sqrt[4]{\frac{4E}{K_H i}}$$

$E$  étant le module d'élasticité du matériau constitutif du pieu et  $i$  le moment d'inertie de sa section droite.

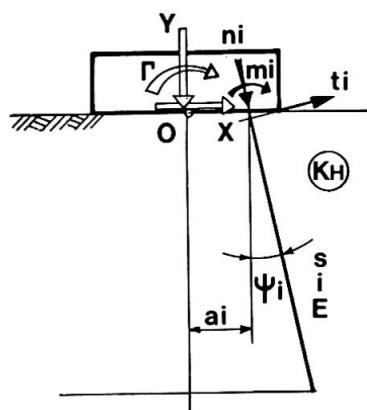
Un pieu, dont la longueur  $\ell$  est supérieure à  $3 \ell_o$ , ( $\ell_o$  généralement inférieur à 5 m) peut être assimilé à un pieu de *longueur infinie*.

En supposant le module de réaction  $K_H$  du sol *constant* avec la profondeur, les coefficients de la matrice d'élasticité d'un pieu isolé de *longueur infinie*, sont alors :

$$S_R = \frac{4}{\ell_o^3 K_H B} \quad S_{TR} = \frac{2}{\ell_o^2 K_H B} \quad S_T = \frac{2}{\ell_o K_H B} \quad S_V = \frac{\ell}{E s}$$

$s$  étant la surface de la section droite du pieu.

3.3.2 - Matrice d'élasticité d'un système de pieux



( Fig. 8 )

Sous l'effet des éléments de réduction  $\Gamma, X, Y$  appliqués en O, chaque pieu, incliné de  $\psi_i$  sur la verticale et situé à la distance  $a_i$  du point O, est soumis en tête aux efforts  $m_i, n_i, t_i$ .

Les coefficients de la matrice d'élasticité du système de pieux s'obtiennent en écrivant :

- les équations d'équilibre ;
- les équations de déformation des pieux (3.3.1.) ;
- les conditions de comptabilité des déformations exprimant que les têtes des pieux sont solidaires de la semelle.

On admet généralement que les pieux de gros diamètres sont *encastrés* en tête dans la semelle. Pour les pieux de faible diamètre ( $B < 0,8$  m) il est plus réaliste de les supposer *articulés* en tête ( $m_i = 0$ ).

4. INFLUENCE DU CORPS DE L'APPUI

4.1. - Expression générale de la matrice d'élasticité

Les coefficients de la matrice d'élasticité d'un corps d'appui, de hauteur  $h$ , sont (fig. 9) :

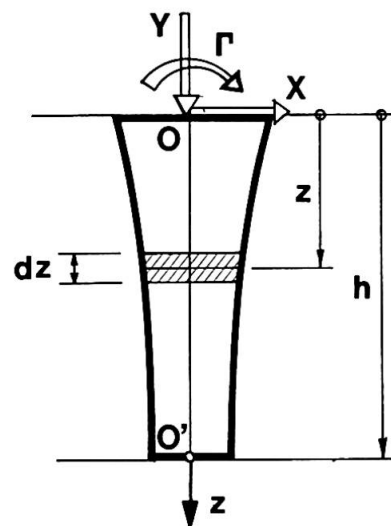
$$S_R = \int_0^h \frac{dz}{E I(z)} \quad S_{TR} = \int_0^h \frac{z dz}{E I(z)} \quad S_t = \int_0^h \frac{z^2 dz}{E I(z)} \quad S_V = \int_0^h \frac{dz}{E S(z)}$$

avec :

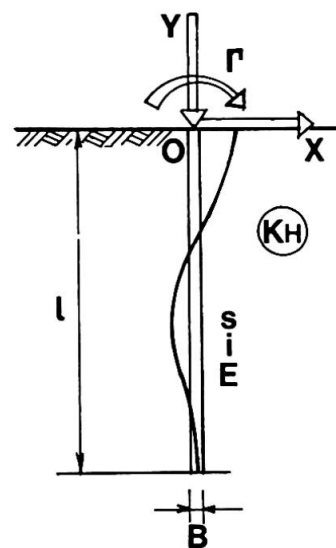
- $E$  module d'élasticité du matériau de l'appui
- $S(z)$  et  $I(z)$  la surface et le moment d'inertie de la section du corps d'appui, de cote  $z$ .

Dans le cas d'un appui, de surface et de moment d'inertie constants :

$$S_R = \frac{h}{EI} \quad S_{TR} = \frac{h^2}{2EI} \quad S_T = \frac{h^3}{3EI} \quad S_V = \frac{h}{ES}$$



( Fig. 9 )

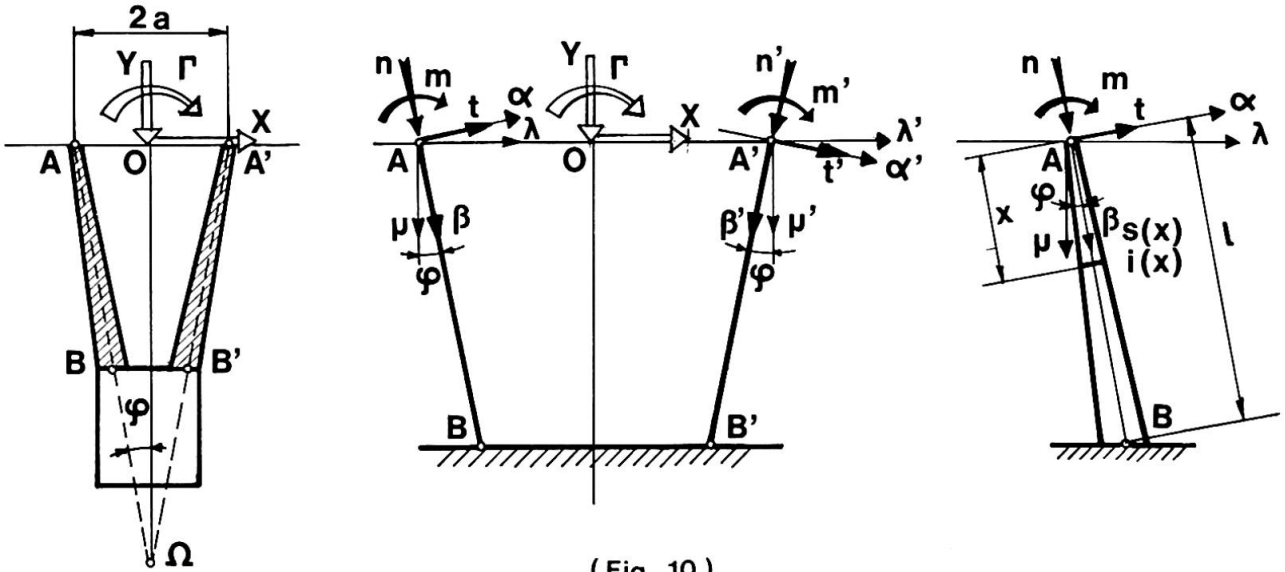


( Fig. 7 )



4.2. - Cas particulier d'un corps d'appui comportant des voiles souples

On suppose les voiles, de longueur  $\ell$ , identiques et inclinés symétriquement de  $\varphi$  sur la verticale.



( Fig 10 )

La surface et le moment d'inertie de la section droite située à la distance  $x$  du sommet A (ou A') de chaque voile sont respectivement  $s(x)$  et  $i(x)$ . On pose :

$$\frac{1}{\sigma} = \frac{1}{\ell} \int_0^{\ell} \frac{dx}{s(x)} \quad \rho_0 = \frac{s(o) a^2}{2 i(o)} \quad I = 2 i(o) (1 + 2 \rho_0)$$

$$U = \int_0^{\ell} \frac{dx}{i(x)} \quad v = \int_0^{\ell} \frac{x dx}{i(x)} \quad W = \int_0^{\ell} \frac{x^2 dx}{i(x)}$$

Soient  $\Gamma, X, Y$  les éléments de réduction par rapport au point O (milieu de AA') et  $\theta, u, v$  les composantes du déplacement de la section AA' (fig. 10). En désignant par  $m, t, n,$  et  $m', t', n'$  les efforts dans les voiles en A et A', on peut écrire les relations suivantes :

a) Conditions d'équilibre

$$\begin{cases} \Gamma = m + m' + a \sin \varphi (t + t') + a \cos \varphi (n - n') \\ X = (t + t') \cos \varphi - (n - n') \sin \varphi \\ Y = (t - t') \sin \varphi + (n + n') \cos \varphi \end{cases}$$

b) Conditions de déformation

Les déplacements  $\omega, \alpha, \beta$  du point A sont donnés par

$$\begin{cases} \omega = \omega_0 + \frac{mU}{E} + t \frac{V}{E} \\ \alpha = \omega_0 \ell + \frac{mV}{E} + \frac{tW}{E} \\ \beta = \frac{n\ell}{E\sigma} \end{cases}$$

$\omega_0$  étant la rotation du voile A en  $\beta$  et E le module d'élasticité longitudinale du béton. Des expressions analogues donnent les déplacements  $\omega', \alpha', \beta'$  du point A'.

On obtient les déplacements  $\theta, \lambda, \mu$  et  $\theta', \lambda', \mu'$  en effectuant les changements de coordonnées correspondants.

c) Conditions de compatibilité

Les conditions de compatibilité entre les déplacements des points A, A' et O s'écrivent :

$$\begin{cases} u = \lambda = \lambda' \\ \mu = v + a \theta \\ \mu' = v - a \theta \end{cases}$$

L'élimination des inconnues entre les différentes relations ci-dessus permet de calculer  $\theta$ ,  $u$ ,  $v$  en fonction de  $\Gamma$ ,  $X$ , et  $Y$  et d'obtenir par conséquent les coefficients de la matrice d'élasticité des voiles. (1)

Dans le cas de voiles *verticaux* de *section constante*, les calculs se simplifient et on trouve en particulier :

<b>voiles encastés aux deux extrémités</b>	<b>voiles encastés en tête et articulés à la base</b>	<b>voiles articulés en tête et encastés à la base</b>
$\left\{ \begin{array}{l} S_R = \frac{\ell}{EI} \\ S_{TR} = \frac{\ell^2}{2EI} \\ S_T = \frac{\ell^3}{6EI} (2 + \rho_0) \end{array} \right.$	$\left\{ \begin{array}{l} S_R = \frac{\ell}{EI} \left(1 + \frac{1}{2\rho_0}\right) \\ S_{TR} = \frac{\ell^2}{EI} \left(1 + \frac{1}{2\rho_0}\right) \\ S_T = \frac{\ell^3}{3EI} \left(1 + \frac{1}{2\rho_0}\right) (3 + 2\rho_0) \end{array} \right.$	$\left\{ \begin{array}{l} S_R = \frac{\ell}{EI} \left(1 + \frac{1}{2\rho_0}\right) \\ S_{TR} = 0 \\ S_T = \frac{\ell^3}{3EI} (1 + 2\rho_0) \end{array} \right.$

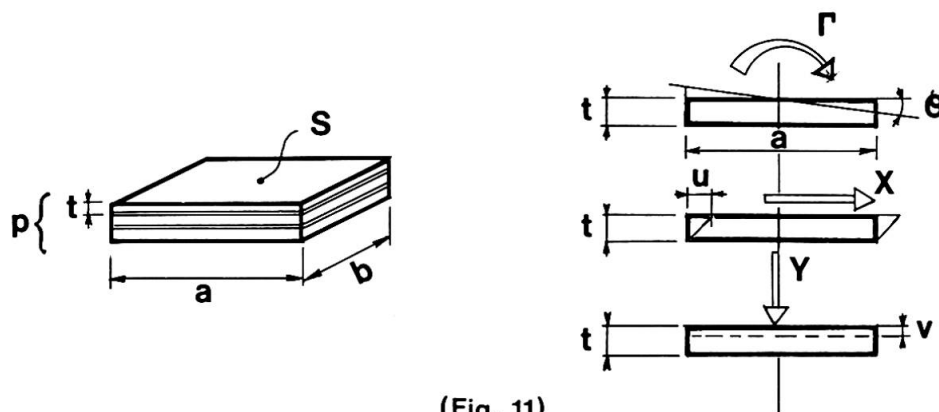
et dans le cas des voiles articulés aux deux extrémités :

$$S_R = \frac{\ell}{EI} (1 + 2\rho_0) \quad S_{TR} = 0 \quad S_T = \infty$$

### 5. INFLUENCE DES APPAREILS D'APPUI

#### 5.1. - Appareils d'appui en élastomère fretté

Les appareils d'appui en *élastomère fretté* sont constitués par un empilement de feuillets d'élastomère associés à des plaques d'acier (inoxydable ou non) assurant leur frettage (fig. 11).



(Fig. 11)

Les coefficients de la matrice d'élasticité d'un appareil d'appui en élastomère fretté, de surface  $S$  ( $a \times b$ ), comportant  $p$  feuillets élémentaires ayant chacun une épaisseur  $t$  de néoprène, sont :

$$S_R = p \frac{c' t^3}{GS a^4} \quad S_{TR} = 0 \quad S_T = p \frac{t}{GS} \quad S_V = p \frac{ct^3}{GS a^2}$$

avec :

- $G$  module d'élasticité transversal du néoprène
- $c$  et  $c'$  coefficients de forme dépendant du rapport  $\frac{b}{a}$

b/a	0,5	0,6	0,7	0,75	0,8	0,9	1	1,2	1,4	1,5	2	3	4	5	10	$\infty$
c	5,83	4,44	3,59	3,28	3,03	2,05	2,37	2,01	1,78	1,70	1,46	1,27	1,18	1,15	1,01	1
c'	136,7	116,7	104,4	100,0	96,2	90,4	86,2	80,4	74,7	75,3	70,8	66,8	64,9	63,9	61,9	60

(1) Cf. « Constructions par encorbellement des ponts en béton précontraint » par J. MATHIVAT (Editions Eyrolles - Paris 78) Chapitre III - Conception des appuis





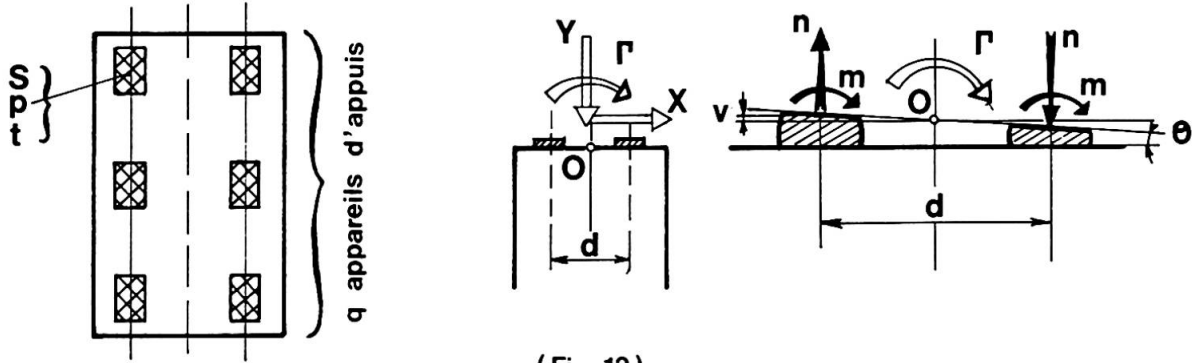
### 5.2. - Appuis comportant une seule file d'appareils d'appui en élastomère fretté

Si  $q$  est le nombre d'appareils d'appui, les coefficients de la matrice d'élasticité sont :

$$S_R = \frac{p}{q} \frac{c' t^3}{GS a^4} \quad S_{TR} = 0 \quad S_T = \frac{p}{q} \frac{t}{GS} \quad S_V = \frac{p}{q} \frac{c t^3}{GS a^2}$$

### 5.3. - Appuis comportant une double file d'appareils d'appui en élastomère fretté

La présence de deux files d'appareils d'appui distantes de  $d$ , crée un encastrement partiel des éléments principaux de la structure sur leurs appuis (fig. 12).



( Fig. 12 )

Soient  $n$  et  $m$  l'effort normal et le moment transmis aux appareils d'appuis sous l'effet du couple  $\Gamma$  appliqué en tête de l'appui, on a :

$$\Gamma = n d + 2 m \quad \theta = \frac{2 v}{d}$$

$$\Gamma = \frac{p}{q} \frac{GS a^2}{t^3} \left( \frac{d^2}{2c} + \frac{2a^2}{c'} \right) \theta$$

$q$  représentant le nombre d'appareils d'appuis par file.

La raideur des appareils d'appuis vis-à-vis des rotations peut généralement être négligée ( $\frac{2a^2}{c'}$  faible eu égard à  $\frac{d^2}{2c}$ )

Les coefficients de la matrice d'élasticité sont alors :

$$S_R = \frac{p}{q} \frac{2 c t^3}{GS a^2 d^2} \quad S_{TR} = 0 \quad S_T = \frac{p}{2q} \frac{t}{GS} \quad S_V = \frac{p}{2q} \frac{c t^3}{Gsa^2}$$

## 6. CONCLUSIONS

Malgré les nombreuses incertitudes (caractéristiques du sol, fonctionnement des appareils d'appui) que comporte la détermination de la déformabilité des appuis, il est nécessaire d'en tenir compte dans l'étude des structures hyperstatiques, en particulier dans celle des ouvrages d'art.

Il est alors recommandé d'introduire dans le calcul des structures deux valeurs de la déformabilité des appuis (appui souple et appui raide) encadrant leur valeur probable, afin de se prémunir contre les incertitudes précitées.