

Zeitschrift: IABSE publications = Mémoires AIPC = IVBH Abhandlungen
Band: 2 (1933-1934)

Artikel: Drei Beiträge zur Frage des Tragvermögens statisch unbestimmter Stahltragwerke
Autor: Chwalla, Ernst
DOI: <https://doi.org/10.5169/seals-3394>

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. [Mehr erfahren](#)

Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. [En savoir plus](#)

Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. [Find out more](#)

Download PDF: 29.07.2025

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>

DREI BEITRÄGE ZUR FRAGE DES TRAGVERMÖGENS STATISCH UNBESTIMMTER STAHLTRAGWERKE.

TROIS CONTRIBUTIONS À LA QUESTION DE LA RÉSISTANCE DES
CHARPENTES MÉTALLIQUES HYPERSTATIQUES.

THREE CONTRIBUTIONS ON THE LOADING QUESTION OF
STATICALLY INDETERMINED STEEL TRUSSES.

Dr. Ing. ERNST CHWALLA,
Professor an der Deutschen Technischen Hochschule, Brünn.

Die in den letzten Jahren durchgeführten theoretischen und empirischen Untersuchungen¹⁾ über das Verhalten statisch unbestimmter Stahltragwerke brachten den Nachweis, daß die Bemessung derartiger Systeme bei Zugrundelegung „zulässiger Inanspruchnahmen“ auf einen größeren Sicherheitsgrad des Bestandes führen kann, als für statisch bestimmte Systeme gefordert wird. Bei Voraussetzung eines ideal plastischen Werkstoffes existiert sowohl im Falle der Achsialbelastung (Fachwerke), wie auch bei Bieungsbeanspruchung (Balkentragwerke) oder Verknüpfung von Achsialbelastung und Biegung (Bogen- und Rahmentragwerke) ein oberer Grenzwert des inneren Widerstandes und es gilt dann die folgende Feststellung: Ist die Belastung eines n -fach statisch unbestimmten Tragwerkes bis auf einen gemeinsamen Multiplikator μ gegeben und wächst μ von Null an, dann wird der obere Grenzwert des Widerstandes der Reihe nach an verschiedenen Stellen des Tragwerkes erreicht werden, wodurch der Grad der statischen Unbestimmtheit (bezogen auf die jeweils neu hinzukommenden Lastanteile) einen schrittweisen Abbau erfährt. Dieser Abbau der überzähligen Bindungen wird fortgesetzt, bis der Grenzwert des inneren Widerstandes an mindestens $(n + 1)$ durch ein kinematisches Gesetz verknüpften Tragwerkstellen zur Geltung kommt. Das System geht dann in eine kinematische Kette über und ist einer weiteren Steigerung der Belastungsintensität nicht mehr fähig, so daß der zugeordnete Multiplikator $\max \mu$ die obere Grenze des Tragvermögens unter der gegebenen ruhenden Belastung festlegt. Neben einem ideal plastischen Werkstoffverhalten (das der Baustahl nur innerhalb eines verhältnismäßig engen Formänderungs-Bereiches mit größerer Annäherung zeigt) wird bei dieser Schlußweise auch vorausgesetzt, daß ein Vorzeichenwechsel der auftretenden Verformungen im Zuge des geschilderten Abbaues der sta-

¹⁾ Vgl. M. GRÜNING, Die Tragfähigkeit stat. unbest. Tragwerke aus Stahl ..., Berlin 1926 und „Der Eisenbau“, I. Bd., Berlin 1929; J. FRITSCH, Z. Der „Bauingen“ 1930/31 u. „Z. f. ang. M. u. Mech.“ 1931; K. HOHENEMSER, Ing.-Archiv 1931; K. GIRMANN, Sitzungsber. d. Ak. d. W. in Wien, II a, 1931; G. v. KAZINCZY, Z. „Technika“ 1931 und Z. „Der Stahlbau“ 1931; H. BLEICH, Z. „Der Bauingenieur“ 1932; E. MELAN, „Z. f. ang. M. u. Mech.“ 1932; F. KANN, Z. „Der Stahlbau“ 1932; F. BLEICH, Stahlhochbauten I; weitere Arbeiten von KIST, KNACKSTEDT, EISENMANN u. a.

Über Versuche berichten MAIER-LEIBNITZ, Z. „Die Bautechnik“ 1928 und 1929; H. SCHAIM, Z. „Der Stahlbau“ 1930; F. HARTMANN, Schweiz. Bauzeitung 1933; G. GRÜNING u. E. KOHL, Z. „Der Bauingenieur“ 1933.

tischen Unbestimmtheit ausgeschlossen bleibt, da andernfalls das Entlastungsgesetz die Begrenzung des inneren Widerstandes aufheben würde. Auch wird bei diesen Untersuchungen die Möglichkeit eines vorzeitigen Ausknickens von Tragwerksteilen theoretisch nicht näher behandelt, und da diese Frage für die praktische Anwendung der Theorie von großer Bedeutung ist, soll in den folgenden Abschnitten A und B der Einfluß des Verhaltens gedrückter Baustahlstäbe auf das Tragverhalten und Tragvermögen einfach statisch unbestimmter Systeme an Hand übersichtlicher Beispiele geklärt werden. Der Abschnitt C ist dem von GRÜNING behandelten Problem des Tragverhaltens bei wiederholter Überlastung eines statisch überzähligen Baustahlstabes gewidmet.

A. Das Tragverhalten einfach statisch unbestimmter Fachwerke bei Überlastung eines überzähligen Druckstabes.

Um das Tragverhalten in übersichtlicher Weise darstellen zu können, beziehen wir uns auf das in Figur 1a gezeichnete Fachwerkmodell. Wir

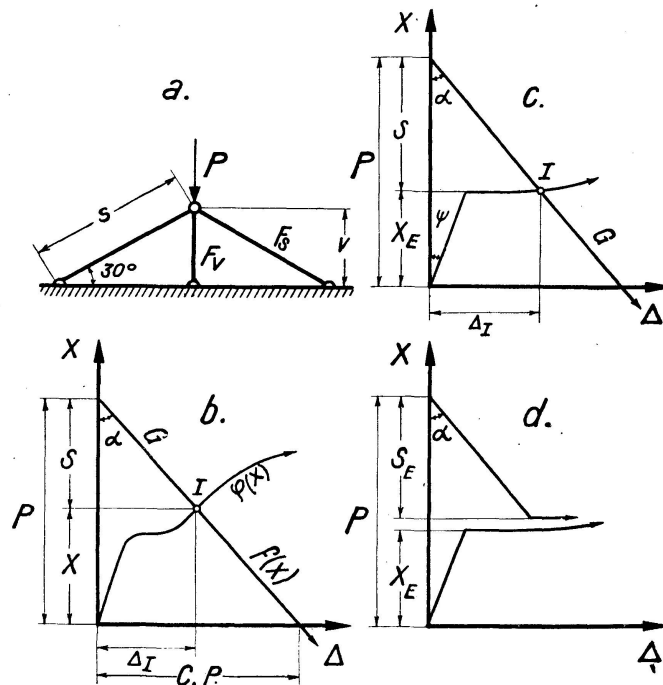


Fig. 1.

fassen die Druckkraft X in der Vertikalen als überzählig auf, durchschneiden den Stab und bringen die Doppelkraft X zwischen den Schnittflächen an. Aus der Gleichgewichtsbedingung für den Lastknoten folgt, daß die beiden Streben (die in unserem Beispiel das den überlasteten Stab „stützende Grundsystem“ bilden) die Druckkräfte $S = P - X$ erhalten. Ein Ausknicken der Stäbe aus der Fachwerkebene soll ausgeschlossen sein und wenn wir vorerst auch voraussetzen, daß die Streben vollkommen elastisch und knicksteif sind, treten in den Streben bloß die Verkürzungen $\frac{S \cdot s}{E \cdot F_s} = \frac{(P - X) \cdot s}{E \cdot F_s}$ ein, die eine gegenseitige Schnittflächenverschiebung $\Delta_s = \frac{2s}{EF_s} \cdot (P - X) = C \cdot (P - X) = f(X)$ bewirken; die Größe $C = \frac{2s}{EF_s}$ stellt hierbei allgemein

die „Federkonstante“ des stützenden Grundsystems vor. Die Verschiebung Δ_s muß durch eine entsprechende Verkürzung der Vertikalen ausgeglichen werden und da der funktionale Zusammenhang $\Delta_x = \varphi(X)$ zwischen der gegenseitigen Annäherung Δ_x der Endpunkte dieses Stabes und der Stabkraft X in der Regel durch eine Kurve festgelegt wird, wollen wir die Formänderungsbedingung $\Delta_s = \Delta_x$ graphisch befriedigen, indem wir die beiden Kurven $f(X)$ und $\varphi(X)$ zeichnen und zum Schnitt bringen. Die Funktion $f(X)$ wird in Figur 1 b durch die Gerade „G“ dargestellt, die auf der Ordinatenachse die Knotenlast P und auf der Abszissenachse die Größe $C \cdot P$ abschneidet; sie schließt mit der Ordinatenachse den Winkel $\alpha = \arctg C$ ein, der umso kleiner ist, je steifer das stützende Grundsystem ausgebildet wird. Die Kurve $\varphi(X)$ schneidet diese Gerade im Punkte I, dessen Koordinaten X und Δ_I den gesuchten Gleichgewichtszustand festlegen; hiebei stellt P die Knotenlast, X die Stabkraft in der Vertikalen, Δ_I die Senkung des Knotenpunktes und $S = P - X$ die Strebenkraft vor.

Wird die Vertikale durch einen geraden, zentrisch gedrückten Stab aus HOOKE'schem Idealmaterial gebildet, der unter der EULER'schen Knicklast $X_E = \frac{\pi^2 \cdot E \cdot J_v}{v^2}$ die Stabilitätsgrenze erreicht, dann tritt unter $X = X_E$ die Ausbiegung des Stabes ein. Der achsiale Stabwiderstand X nimmt hiebei nur geringfügig²⁾ zu, so daß der mit der Ordinatenachse den Winkel $\psi = \arctg \frac{v}{E \cdot F_v}$ einschließende Ast der Kurve $\varphi(X)$ an der Stelle $X = X_E$ in eine sehr flach verlaufende Kurve übergeht (Figur 1 c). Im erreichten, durch die Größen $X = X_E$, $S = P - X_E$ und $\Delta = \Delta_I$ gekennzeichneten Gleichgewichtszustand ist die Vertikale schon ausgeknickt, doch ist ihre seitliche Ausbiegung durch die kinematisch zugelassene Sehnungsverkürzung genau festgelegt und beträgt (da sich die Gleichgewichtsfigur des knickenden Stabes hier von einer Sinuslinie praktisch nicht unterscheidet) $y_0 = \frac{2}{\pi} \cdot \sqrt{v \cdot \left(\Delta_I - \frac{v}{E F_v} \cdot X_E \right)}$. Wird die Last P entfernt, dann geht die Ausbiegung auf Null zurück und das Fachwerk nimmt wieder die ursprüngliche Form an. Wenn hingegen die Streben nicht extrem knicksteif ausgebildet sind und unter der Eulerlast S_E selbst die Knickgrenze erreichen, dann wird das Tragvermögen des Fachwerks unter der Knotenlast $\max P = X_E + S_E$ erschöpft. Würde P nur wenig über diesen Grenzwert anwachsen, dann würde der in Figur 1 d dargestellte Fall eintreten und das Grundsystem, das die Vertikale stützt, würde versagen, bevor sich noch ein Gleichgewichtszustand ausbilden kann³⁾.

Wir haben bisher Stäbe aus HOOKE'schem Idealmaterial vorausgesetzt und wollen nun einen Schritt weiter gehen und die Vertikale aus einem Baustahl ausgebildet denken, dessen Formänderungsgesetz z. B. durch die folgenden Werte gekennzeichnet sein möge: Proportionalitätsgrenze $\sigma_P = 1900 \text{ kg/cm}^2$, $\varepsilon_P = 0,86 \text{ ‰}$, Elastizitätsmodul $E = 2,210\,000 \text{ kg/cm}^2$, Fließbereich $\sigma_F = 2700 \text{ kg/cm}^2 = \text{const. von } \varepsilon_F = 2,5 \text{ bis } \varepsilon_F' = 6 \text{ ‰}$, Zugfestigkeit $\sigma_B = 4200 \text{ kg/cm}^2$. Der Stabquerschnitt sei ein Rechteck $F_v = b \cdot h$ und für

²⁾ Vgl. dazu A. SCHNEIDER, Z. d. öst. Ing. Arch. Ver. 1901; R. v. MISES, Z. f. ang. M. u. Mech. 1924; I. MALKIN, Z. f. ang. M. u. Mech. 1926; O. DOMKE, Z. „Der Bauingenieur“ 1926 u. a.

³⁾ Der nach sehr kleinen Erhöhungen von $\max P$ theoretisch existierende Gleichgewichtszustand ist wegen der großen zugeordneten Verformung praktisch bedeutungslos.

den Schlankheitsgrad wählen wir $\lambda_v = \frac{v}{i} = 60$, wobei $i = \frac{h}{\sqrt{12}}$ bedeutet. In

Figur 2 sind die „Kurven des achsialen Widerstandes“ für zentrisch gedrückte, beiderseits gelenkig gelagerte Stäbe aus dem geschilderten Baustahl dargestellt⁴⁾ und wir entnehmen aus dem Verlaufe der Kurve „ $\lambda = 60$ “, daß

⁴⁾ Vgl. den Beitrag d. Verfassers im Bericht über d. I. Int. K. f. Brückenbau u. Hochbau, Paris 1932.

unsere Vertikale unter der Druckkraft $X_k = 2521 \cdot F_v$ kg (Knicklast nach ENGESSER-KÁRMÁN) ihre Stabilitätsgrenze erreicht und daß der in der ursprünglichen Achsenrichtung ausgeübte Widerstand bei zunehmender Scheitelausbiegung y_0 (d. i. die Ausbiegung der Gleichgewichtsfigur in Stabmitte)

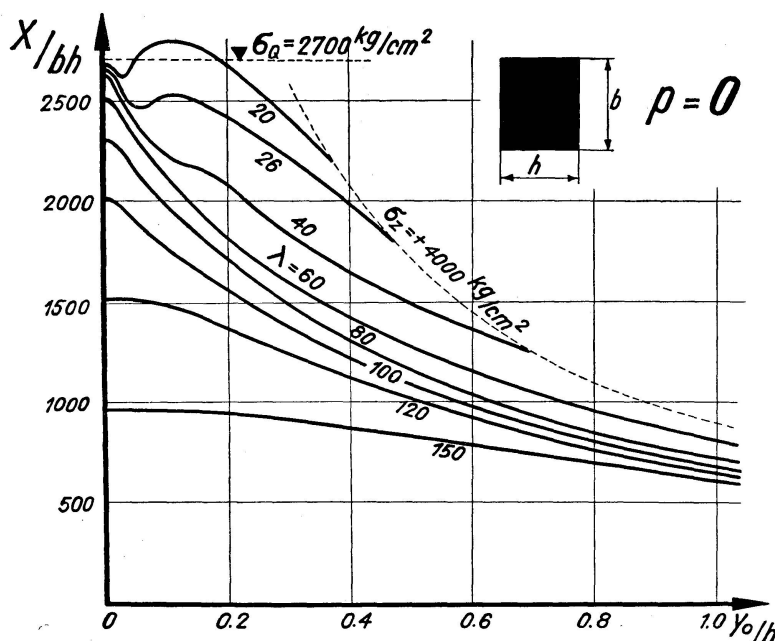


Fig. 2.

sehr stark abfällt; beispielsweise ergibt sich im Gleichgewichtsfalle für $\frac{y_0}{h} = 0,2, 0,4, 0,6, 0,8$ und $1,0$ der Reihe nach $\frac{X}{F_v} = 1830, 1420, 1150, 960$ und 810 kg/cm². Um die durch die Ausbiegung bedingte Verkürzung Δ' der Stabsehne bestimmen zu können, müssen wir die der Druckkraft X und der Scheitelausbiegung y_0 eindeutig zugeordnete „Gleichgewichtsfigur“ (Biegelinie) $y = F(x)$ bestimmen⁵⁾ und Δ' aus der Beziehung $\Delta' = \frac{1}{2} \cdot \int_v \left(\frac{dy}{dx} \right)^2 \cdot dx$ durch Quadratur ermitteln⁶⁾. Mit Hilfe dieser Werte Δ' können wir den funktionalen Zusammenhang, der im Falle $\lambda = 60$ zwischen der gegen-

⁵⁾ Vgl. diesbezügl. die Abhandlung d. Verf. in den „Sitzungsber. d. Ak. d. Wiss. in Wien“, II a, 1928, S. 469.

⁶⁾ Begnügt man sich hier mit einer Näherungslösung, dann kann man die Gleichgewichtsfiguren durch Sinushalbwellen der Länge v und der Scheitelausbiegung y_0 ersetzen und findet dann $\Delta' = \frac{1}{2} \cdot \int_v \left(\frac{dy}{dx} \right)^2 \cdot dx = \frac{\pi^2}{4v} \cdot y_0^2$ oder wegen $\lambda = \frac{v}{h} \cdot \sqrt{12} = 60$ auch $\Delta' = \frac{0,1425}{h} \cdot y_0^2$; die so erhaltenen Näherungswerte sind grundsätzlich zu groß, doch beträgt der Fehler, wie ein Vergleich mit den genauen Lösungen zeigte, nicht mehr als etwa 8,5 %.

seitigen Annäherung der Stabenden Δ_x und dem Stabwiderstand X besteht, durch die in Figur 3 a gezeichnete Kurve $\frac{\Delta_x}{h} = \varphi_1 \left(\frac{X}{F_v} \right)$ darstellen. Wächst die mittlere Druckspannung $\frac{X}{F_v}$ von Null bis zur Proportionalitätsgrenze $\sigma_P = 1900 \text{ kg/cm}^2$ an, dann steigt $\frac{\Delta_x}{h}$ von Null bis zum Wert $\frac{\nu \cdot \sigma_P}{h \cdot E} = 0,0149$ an; erreicht $\frac{X}{F_v}$ den Wert der Knickspannung $\frac{X_k}{F_v} = 2521 \text{ kg/cm}^2$, dann ergibt sich aus der zugrundeliegenden Spannungs-Dehnungslinie $\frac{\Delta_x}{h} = 0,0251$ und der Stab beginnt sich auszubiegen, so daß von nun an die Werte $\frac{\Delta_x}{h}$ um die Beträge $\frac{\Delta'}{h}$ vermehrt werden. Da jedoch mit dieser Ausbiegung ein starker

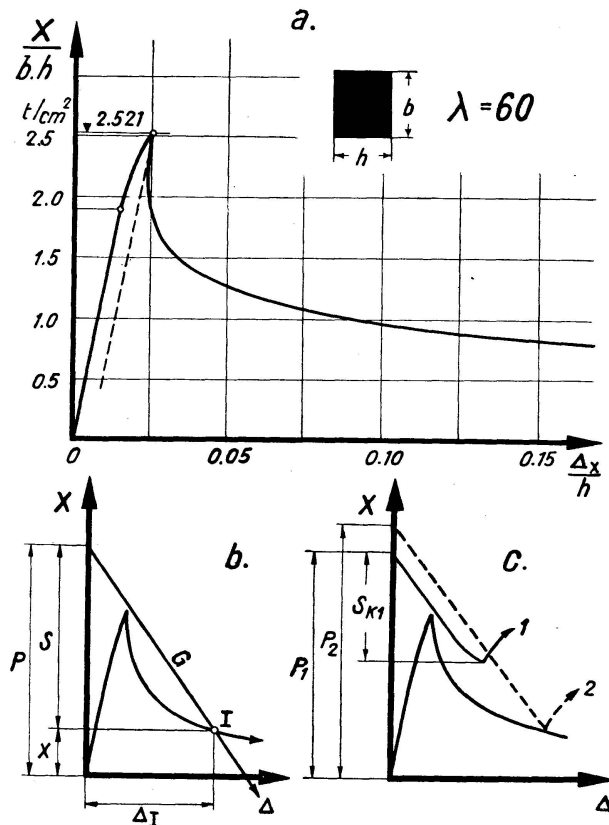


Fig. 3.

Abfall der zum Gleichgewicht erforderlichen Belastung X einsetzt, erfährt die Stabachse eine dem Entlastungsgesetze gehorchende geringe Verlängerung. Wir tragen daher $\frac{\Delta'}{h}$ in Figur 3 a von der gestrichelt gezeichneten Entlastungsgeraden auf, sind uns aber bewußt, daß dieser Vorgang nicht vollkommen exakt ist, da die in der Stabachse gelegenen Stabfasern nicht nur durch die mittlere Druckspannung $\frac{X}{F_v}$ sondern auch durch die mit der Ausbiegung zunehmende Biegespannung (die Biegespannungs-Nulllinie liegt nicht im Querschnittsschwerpunkt) beeinflusst werden; dieser Vernachlässigung dürfte die in Figur 3 a gefundene geringfügige Abnahme der Abszissenwerte bei Beginn des Ausknickens zuzuschreiben sein.

Wächst nun die Knotenlast P unseres Modellfachwerkes Figur 1 a an, bis die Vertikale die Knickgrenze X_k überschreitet, dann tritt (sofern das Strebenpaar weder ausknickt noch den HOOKE'schen Bereich verläßt) der in Figur 3 b dargestellte Fall ein. Der Schnittpunkt I der Geraden G mit der aus Figur 3 a übernommenen Kurve $\Delta_x = \varphi(X)$ legt den Gleichgewichtszustand fest und wir erkennen, daß die Strebenkräfte $S = P - X$ nunmehr wesentlich größer als bei Verwendung einer Vertikalen aus HOOKE'schem Idealmaterial (Figur 1 c) erhalten werden. Wenn wir daher die Streben bloß so bemessen würden, daß ihre Knickkraft S_k nur wenig größer als $P - X_k$ ist (was im Falle Figur 1 c als ausreichend festgestellt wurde), dann würde der in Figur 3 c skizzierte Fall „1“ zur Geltung kommen: Die Vertikale würde wieder unter der bis auf P_1 anwachsenden Knotenlast ausknicken, den geschilderten starken Abfall des Widerstandes zeigen und dadurch dem stützenden Grundsystem eine erhebliche Mehrbelastung zuweisen. Das Strebenpaar würde sich aber dieser Mehrbelastung nicht gewachsen zeigen und vor Erreichen des Gleichgewichtszustandes selbst ausknicken, worauf der Zusammenbruch des Tragwerks (da der Ordinatenunterschied der Kurven $\varphi(X)$ und $f(X)$ stark zunimmt) mit wachsender Beschleunigung erfolgt. Werden die beiden Streben biegesteifer ausgebildet, so daß ihre Knicklast S_k eine starke Erhöhung erfährt, dann kann die Tragfähigkeit des Systems bei unveränderter Vertikalen auf einen Wert P_2 gesteigert werden (Fall 2 in Figur 3 c). Die Streben vermögen hier die große Mehrbelastung, die nach dem Ausknicken der überzähligen Vertikalen entsteht, aufzunehmen und einen Gleichgewichtszustand gerade noch zuzulassen. Wir erkennen jedoch, daß dieser Grenzwert P_2 erheblich kleiner ist als der Wert $X_k + S_k$, den wir im Fall Figur 1 d bei Voraussetzung eines HOOKE'schen Idealmaterials erhalten haben.

Zur ziffernmäßigen Festlegung des Einflusses, den das geschilderte Verhalten gedrückter Baustahlstäbe auf das Tragvermögen statisch unbestimmter Fachwerke nehmen kann, denken wir uns die zentrisch gedrückten Stäbe unseres Fachwerkmodells Figur 1 a aus dem oben geschilderten Baustahl ausgeführt. Die Stablängen seien ν bzw. $s = 2\nu$, die Stabquerschnitte $F_v = b \cdot h$ bzw. F_s . Im Sinne der bestehenden Vorschriften müssen wir die Elastizitätsgleichung aufstellen und daraus die Stabkräfte

$$X = \frac{P}{1 + \frac{1}{4} \cdot \frac{F_s}{F_v}} \quad \text{und} \quad S = P - X = \frac{P}{1 + 4 \cdot \frac{F_v}{F_s}}$$

berechnen; die Normalspannung in der Vertikalen beträgt dann $\frac{X}{F_v} = \frac{4P}{F_s + 4 \cdot F_v}$ und ist allgemein viermal so groß als die Strebenspannung S/F_s . Werden nun die Stäbe so ausgebildet, daß ihre Schlankheitsgrade hinsichtlich Knickung in der Fachwerksebene z. B. $\lambda_v = \lambda_s = 60$ betragen, dann bildet die für die Vertikale geltende Knickspannung $\frac{X_k}{F_v} = 2521 \text{ kg/cm}^2$ die maßgebende Grundlage bei der Bemessung auf „zulässige Inanspruchnahme“, während die Festigkeit der beiden geringer belasteten Streben unausgenutzt bleibt. Ist ν der geforderte Knicksicherheitsgrad, dann ist die „zulässige“ Stabkraft $X_{zul} = \frac{1}{\nu} \cdot X_k$ und daher die „zulässige“ Knotenlast $P_{zul} = \frac{2521}{\nu} \cdot \left(1 + \frac{F_s}{4F_v}\right) \cdot F_v$. Die Größen $\nu \cdot P_{zul}$, die wir rein formell als „Tragfähigkeiten“ des auf zu-

lässige Inanspruchnahme bemessenen Fachwerkmodells bezeichnen können, sind in der nachfolgenden Tabelle für die drei Fälle $\frac{F_s}{F_v} = 0,5, 1,0$ und $2,0$ zusammengestellt worden; sie sind an den angegebenen ENGESSER-KÁRMÁN-schen Knickspannungswert gebunden, im übrigen aber von der amtlichen Vorschrift unabhängig. Die Größe $\nu \cdot P_{zul}$ bleibt unverändert in Geltung, auch wenn wir die Streben bei Wahrung des Flächenverhältnisses $\frac{F_s}{F_v}$ etwas schlanker ausführen, da die Knickspannung der Vertikalen nach wie vor für die Bemessung maßgebend ist.

Wenn wir nun, unabhängig von der eben dargelegten Bemessung auf „zulässige Inanspruchnahme“, die oberste Grenze des Tragvermögens P_{max} bestimmen wollen, dann haben wir an die in Figur 3 c geschilderten Fälle anzuknüpfen und vorerst die Kurve $\frac{\Delta_x}{h} = \varphi_1 \left(\frac{X}{F_v} \right)$ für die Vertikale darzustellen; diese Kurve ist in Figur 4 gestrichelt gezeichnet

No.	λ_v	λ_s	$\frac{F_s}{F_v}$	$\nu \cdot P_{zul}$	P_{max}	$X_k + S_k$	$\frac{X_k + S_k - P_{max}}{100 \cdot P_{max}}$	$\frac{P_{max} - \nu \cdot P_{zul}}{\nu \cdot P_{zul}}$
1	60	60	0,5	$2836 \cdot F_v$	$2922 \cdot F_v$	$3782 \cdot F_v$	29,4 %	3,0 %
2	60	60	1,0	$3151 \cdot F_v$	$3501 \cdot F_v$	$5042 \cdot F_v$	44,1 %	11,1 %
3	60	60	2,0	$3782 \cdot F_v$	$6022 \cdot F_v$	$7563 \cdot F_v$	25,6 %	59,2 %
4	60	120	0,5	$2836 \cdot F_v$	$2922 \cdot F_v$	$3279 \cdot F_v$	12,2 %	3,0 %
5	60	120	1,0	$3151 \cdot F_v$	$3322 \cdot F_v$	$4037 \cdot F_v$	21,5 %	5,4 %
6	60	120	2,0	$3782 \cdot F_v$	$4325 \cdot F_v$	$5553 \cdot F_v$	28,4 %	14,4 %

und stimmt mit Rücksicht auf unsere Voraussetzungen mit der Kurve Figur 3 a überein. Die Gerade G, die die Funktion $\frac{\Delta_s}{h} = f_1 \left(\frac{X}{F_v} \right)$ im HOOKE'schen Bereich unterhalb der Knickgrenze festlegt, verläßt die Ordinatenachse unter dem Winkel $\alpha = \arctg C$, wobei die Federkonstante des stützenden Grundsystems mit Rücksicht auf $s = 2\nu = 2\sqrt{12} \cdot h \cdot \lambda_v = 34,70 \cdot h$ die Größe $C = \frac{2s}{EF_s} = 0,0000314 \cdot \frac{F_v}{F_s} \cdot \frac{h}{F_v}$ besitzt. Im Falle Nr. 1 ist $\frac{F_s}{F_v} = 0,5$ gewählt worden. Wenn wir für verschiedene Werte P die Kurve $f_1 \left(\frac{X}{F_v} \right)$ zeichnen, finden wir, daß $\frac{P_{max}}{F_v} = 2922 \text{ kg/cm}^2$ die größte, ein Gleichgewicht zulassende Knotenbelastung festlegt. Die zugeordnete Grenzlage der Kurve $f_1 \left(\frac{X}{F_v} \right)$ ist in Figur 4 eingetragen und durch die beigeschriebene Nummer 1 gekennzeichnet worden; bis zur Stelle $\frac{S}{F_v} = \sigma_P \cdot \frac{F_s}{F_v} = 950 \text{ kg/cm}^2$, $\frac{\Delta}{h} = \frac{2s}{hE} \cdot \sigma_P = 0,0596$ verläuft sie geradlinig, verläßt dann den HOOKE'schen Bereich und erreicht an der Stelle $\frac{S_k}{F_v} = 2521 \cdot \frac{F_s}{F_v} = 1261 \text{ kg/cm}^2$, $\frac{\Delta}{h} = 0,1004$ die Knickgrenze, wie in der Figur durch den nach oben (Richtung der abnehmenden Strebenwiderstände) weisenden Pfeil angedeutet wurde. Werden die Streben bei Wahrung des Flächenverhältnisses $\frac{F_s}{F_v}$ schlanker, z. B. mit $\lambda_s = 120$ aus-

gebildet, dann liegt die Knickspannung der Strebe $\frac{S_k}{F_s} = 1516 \text{ kg/cm}^2$ im HOOKE'schen Gebiet und wird an der Stelle $\frac{\Delta}{h} = 0,0476$ erreicht; die oberste Grenzlage der Kurve $f_1\left(\frac{X}{F_v}\right)$ ist jedoch die gleiche wie früher, so daß $P_{max} = 2922 \cdot F_v$ nach wie vor die Tragfähigkeit begrenzt (Fall Nr. 4). Auch im Fall Nr. 5 wird das Tragvermögen schon im Augenblick des Ausknickens der Vertikale erschöpft, da auch hier das stützende Grundsystem die entstehende Mehrbelastung nicht aufzunehmen vermag; für die Grenzlaster wurde hier $P_{max} = 3322 \cdot F_v$ gefunden.

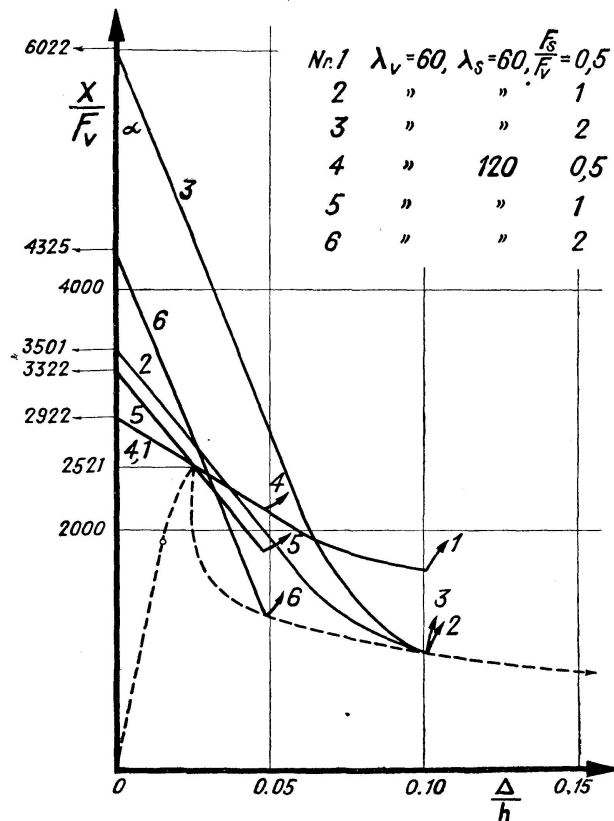


Fig. 4.

In den drei bisher geschilderten Fällen Nr. 1, 4 und 5 wird die Tragfähigkeit des Fachwerks durch den Knickwiderstand der Vertikalen festgelegt, der auch bei der Bemessung auf „zulässige Inanspruchnahme“ maßgebend war. Die Grenzlaster P_{max} stimmt daher in diesen Fällen praktisch⁷⁾ mit der Rechnungsgröße $\nu \cdot P_{zul}$ überein und die Bemessung statisch unbestimmter Fachwerke auf zulässige Inanspruchnahme braucht nicht als unwirtschaftlich verworfen zu werden. Hingegen wäre die Voraussetzung von Stäben aus HOOKE'schem Idealmaterial (also die Voraussetzung eines funktionalen Zusammenhanges zwischen Verformung und Widerstand, wie er ähnlich auch im Falle des Zuges oder der Biegung für Stäbe aus idealplastischem Material erhalten wird) vollkommen unzulässig, denn dann wäre

⁷⁾ Der geringe Unterschied, der in der Tabelle zwischen den beiden Werten besteht, ist darauf zurückzuführen, daß die gedrungene Vertikale vor dem Ausknicken schon eine plastische Verkürzung erfährt und daher einen etwas kleineren Belastungsanteil erhält, als aus der Elastizitätsgleichung erhalten wird.

nach Figur 1 d einfach $P_{max}' = X_k + S_k$ anzusetzen und wir würden in den Fällen Nr. 1, 4, 5 der Reihe nach Werte erhalten, die um 29,4, 12,2 und 21,5 % größer als P_{max} sind (vgl. die Tabelle).

In den Fällen Nr. 2, 3 und 6 erweisen sich die Streben als ausreichend widerstandsfähig, um einen Gleichgewichtszustand nach erfolgtem Ausknicken der Vertikalen zuzulassen. Die Tragfähigkeit des Fachwerkes wird hier erst in dem Augenblick erschöpft, in dem das Strebenpaar an die Knickgrenze gelangt; sie kann erheblich größer als die Rechnungsgröße $\nu \cdot P_{zul}$ sein, so daß die Vorschreibung „zulässiger Inanspruchnahmen“ auf ungewollt

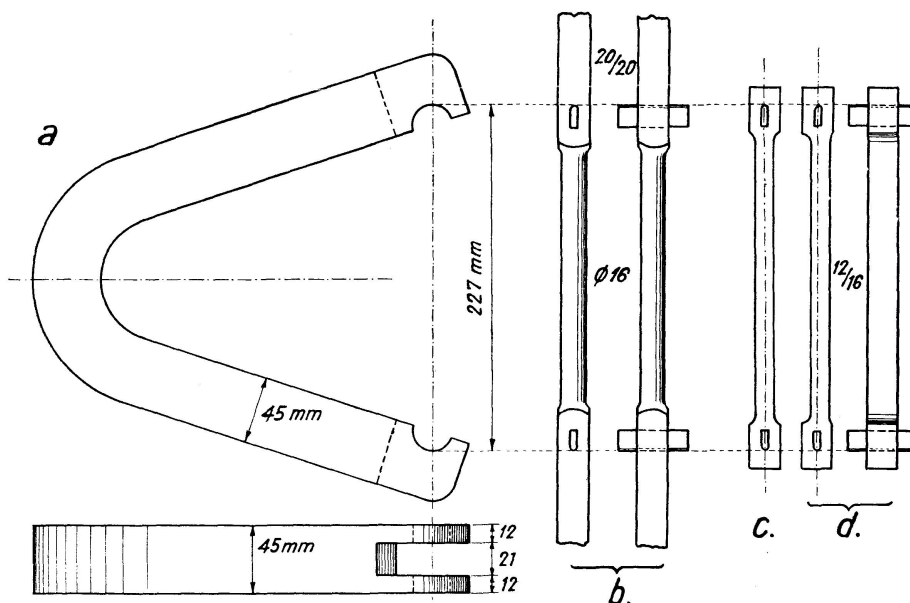


Fig. 5.

hohe Sicherheitsgrade (unwirtschaftliche Abmessungen) führt. Deutlich tritt dies im Fall Nr. 3 ($\lambda_v = \lambda_s = 60$, $\frac{F_s}{F_v} = 2,0$) zu Tage, für den die oberste Grenzlage der Kurve $f_1\left(\frac{X}{F_v}\right)$ durch den Ordinatenabschnitt $P_{max} = 6022 \cdot F_v$ festgelegt wird. Diese Kurve, die an der Stelle $\frac{S}{F_v} = \frac{F_s}{F_v} \cdot \sigma_P = 3800 \text{ kg/cm}^2$, $\frac{\Delta}{h} = 0,0596$ den HOOKE'schen Bereich verläßt, erreicht die Knickgrenze an jener Stelle $\frac{S_k}{F_v} = 2521 \cdot \frac{F_s}{F_v} = 5042 \text{ kg/cm}^2$, $\frac{\Delta}{h} = 0,1004$, an der sie die gestrichelte Kurve (die hier die Ordinate $X = 980 \cdot F_v$ besitzt) trifft. Wenn daher die Knotenlast von Null bis auf den Grenzwert $P_{max} = 980 \cdot F_v + 5042 \cdot F_v = 6022 \cdot F_v$ ansteigt, knickt vorerst die Vertikale geringfügig aus, die Streben werden dadurch stark überlastet und gelangen in dem Augenblick, in welchem ein Gleichgewichtszustand ausgebildet werden könnte, selbst an die Knickgrenze, so daß das Tragwerk mit wachsender Beschleunigung zusammenbricht. Der Wert P_{max} ist um 59,2 % größer als die Rechnungsgröße $\nu \cdot P_{zul}$, die sich ergibt, wenn wir das Fachwerk auf „zulässige Inanspruchnahme“ dimensionieren. Andererseits würden wir, wenn wir das Fachwerk so wie ein System mit Stäben aus HOOKE'schem Idealmaterial bemessen würden, nach Figur 1 d den Wert $P_{max}' = X_k + S_k = 7563 \cdot F_v$, d. i. um 25,6 % mehr als P_{max} erhalten.

Abschließend können wir feststellen, daß bei der Ermittlung der Tragfähigkeit P_{max} eines einfach statisch unbestimmten Stahlfachwerkes mit gedrückten Stäben je nach der Widerstandsfähigkeit des den überlasteten Druckstab stützenden Grundsystems zwei Fälle 1 und 2 (Figur 3 c) unterschieden werden müssen. Im Fall 1 (relativ schwaches Grundsystem) liefert die Bemessung des untersuchten Fachwerkes auf „zulässige Inanspruchnahme“ praktisch dieselben Abmessungen bzw. Sicherheitsgrade wie die unmittelbare Bezugnahme auf die Grenze des Tragvermögens; hingegen führt im Fall 2 (relativ widerstandsfähiges Grundsystem) die Zugrundelegung „zulässiger“ Spannungen auf größere Grade der Bestandsicherheit, als bei statisch bestimmten Systemen gefordert werden. Die Voraussetzung eines HOOKE'schen Idealmaterials für die überlasteten Druckstäbe (also die Verwendung von Widerstandskurven, die ähnlich verlaufen wie die von Zug- oder Biegungsstäben aus ideal-plastischem Material) erscheint unzulässig, da dadurch sowohl im Fall 1 wie auch im Fall 2 das Tragvermögen des Systems erheblich überschätzt werden kann. Sind die untersuchten Stäbe nicht genau zentrisch gedrückt und wird der Einfluß der Exzentrizität nicht voll in Rechnung gestellt, dann kommen die geschilderten Verhältnisse in noch ausgeprägterem Maße zur Geltung.

Versuche über das Tragverhalten einfach statisch unbestimmter Fachwerke mit überlasteten Druckstäben.

Zur Überprüfung der geschilderten theoretischen Ergebnisse wurden vom Verfasser Versuche mit einfach statisch unbestimmten Systemen durchgeführt⁸⁾. Um in Übereinstimmung mit den Voraussetzungen der Theorie ein elastisches, zahlenmäßig genau erfaßbares Verhalten des statisch bestimmten Grundsystems und eine gelenkige Lagerung des überzähligen Druckstabes zu erzielen, wurde die Fachwerkskonstruktion des „stützenden Grundsystems“ durch einen kräftigen Stahlbügel ersetzt. (Der Bügel ist in Figur 5 a in der Ansicht und im Grundriß dargestellt und besteht aus wasser gehärtetem Federstahl „Poldi T6H-Extra“ mit rund 10 000 kg/cm² Proportionalitätsgrenze.) Die Eichung des Bügels erfolgte mit derselben Meßeinrichtung, die bei den Hauptversuchen Verwendung fand, und ergab im gewählten Nutzbereich (für gegenseitige Annäherungen der Lagerpfannen bis zu 7,5 mm) ein lineares Formänderungsgesetz mit der Federkonstanten $C = 0,205 \text{ cm/t}$. Die Druckstäbe hatten rechteckigen Querschnitt 11,9/19,9 mm und erhielten gehärtete Schneidenkörper, die mit Hilfe eines Keilpaares gleichmäßig an die Lagerpfannen des Bügels angedrückt werden konnten. In Figur 5 c ist ein „zentrischer“ und ein „exzentrischer“ Druckstab dargestellt. Die Scheidentfernung betrug 227 mm, so daß für den Schlankheitsgrad $\lambda = \frac{227}{3,44} = 66,0$ gefunden wird. Alle Versuchsstäbe stammten aus derselben Stange; der statische Zugversuch lieferte für das Stabmaterial eine Streckgrenze $\sigma_F = 2,36 \text{ t/cm}^2$, die Zugfestigkeit $\sigma_B = 4,02 \text{ t/cm}^2$, die Bruchdehnung $\delta_{10} = 33 \%$ und die Einschnürung $\psi = 67 \%$. Das aus dem

⁸⁾ Die Versuche wurden im Laboratorium für Elastizitäts- und Festigkeitslehre der Deutschen Technischen Hochschule in Brünn durchgeführt. Für die freundliche Überlassung des Laboratoriums bin ich Herrn Prof. Dr. GIRTLEK und für die Unterstützung bei der Herstellung der Probestäbe Herrn Prof. Dr. KOTHNY zu Dank verpflichtet und ebenso danke ich meinen Mitarbeitern, den Herren Dr. WEINHOLD, Dr. SCHEINOST und JOSCHT.

Bügel mit dem eingebauten überzähligen Druckstab bestehende statisch unbestimmte System wurde der in kleinen Stufen gesteigerten Druckbelastung P ausgesetzt und hierbei die seitliche Ausbiegung y_0 in Stabmitte und die gegenseitige Annäherung Δ der Druckplatten⁹⁾ gemessen. Auf Grund des Eichungsergebnisses konnte dann für jede Laststufe der vom Bügel übernommene Lastanteil $P - X$ und daraus die Stabkraft X berechnet werden¹⁰⁾. Die auf diese Weise gewonnenen Kurven, die das Tragverhalten des untersuchten statisch unbestimmten Systems festlegen und der theoretischen Figur 3 b entsprechen, sind in Fig. 6 und 7 wiedergegeben.

Figur 6 bezieht sich auf zwei Versuche mit überzähligen Stäben, deren Druckkraft mit einem Hebelarm von ungefähr 0,5 mm angreift. Der Verlauf der Kurve $\Delta_x = \varphi(X)$ ist in seinen kennzeichnenden Eigenschaften der gleiche, den wir in Figur 3 a theoretisch abgeleitet haben. Die kritischen Zu-

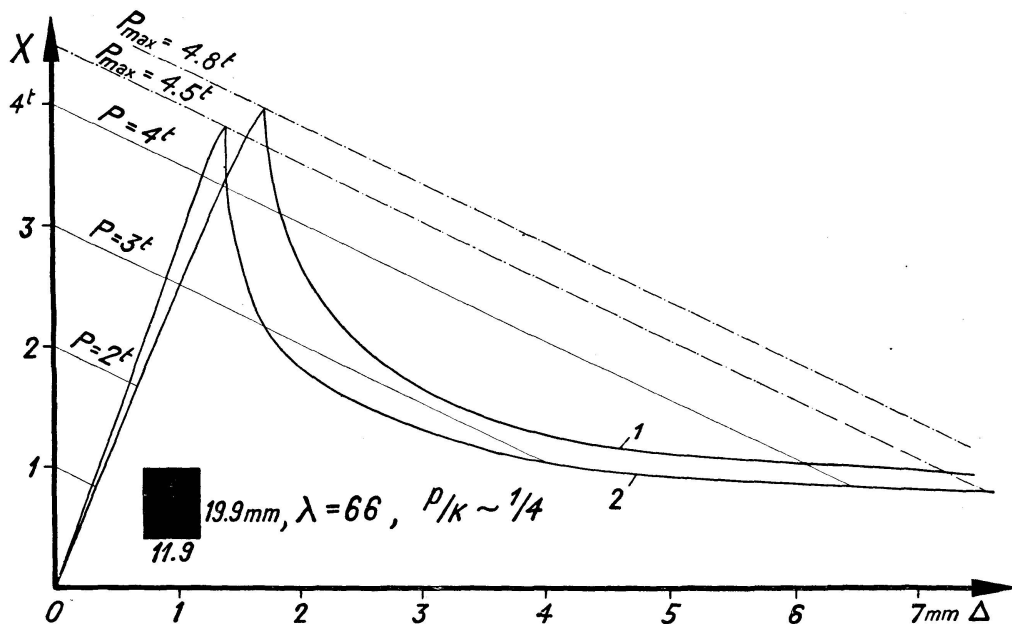


Fig. 6.

stände des statisch unbestimmten Systems werden unter den Lasten $P_{max} = 4,80$ bzw. $4,50$ t erreicht und die Belastungsanteile des Bügels betragen hierbei $0,840$ bzw. $0,688$ t, so daß für die kritische Druckkraft des überzähligen Stabes $X_{kr} = 3,960$ bzw. $3,812$ t gefunden wird; diesen Werten X_{kr} entsprechen (vgl. die theoretisch strenge Lösung für den exzentrisch gedrückten Baustahlstab unter Fußnote 4) die Exzentrizitätsmaße $\frac{p}{h} = \frac{1}{26,7}$ bzw. $\frac{1}{21,4}$ und daher die „rechnungsmäßigen“ Hebelarme $p = 0,45$ bzw. $0,56$ mm. Wir erkennen, daß der Widerstand des überzähligen Stabes im kritischen Zustand sehr stark abfällt und daß demgemäß die Verformung Δ

⁹⁾ Diese Werte Δ sind mit Rücksicht auf die Zusammenpressung der Unterlagsplatten u. a. etwas größer als die reinen Sehnenverkürzungen des ausgebogenen Druckstabes, was bei der Beurteilung der Abszissenwerte in Fig. 6, 7 zu beachten ist.

¹⁰⁾ Es sei erwähnt, daß die Kurven $X = F(y_0)$, die sich auf Grund der Messungsergebnisse punktwise zeichnen ließen, eine sehr gute Übereinstimmung mit den vom Verfasser theoretisch ermittelten Kurven (vgl. unter Fußnote 4) zeigten.

des Systems zunimmt, bis bei $\Delta = 7,88$ bzw. $7,57$ mm ein neuer Gleichgewichtszustand ausgebildet wird. Der Lastanteil des Bügels ist hier auf $3,85$ bzw. $3,69$ t, d. i. gegenüber dem kritischen Zustand auf das $4,58$ - bzw. $5,35$ -fache gestiegen und nur der elastostatischen Hochwertigkeit des hier verwendeten „stützenden Grundsystems“ ist es zu danken, daß diese Gleichgewichtszustände noch ausgebildet werden konnten.

Figur 7 bezieht sich auf zwei Versuche mit überzähligen Stäben, deren Druckkraft mit dem Exzentrizitätsmaß $\frac{p}{h} = \frac{1}{6}$ angreift (Stabausbildung nach Figur 5 d). Die kritische Last des statisch unbestimmten Systems wird hier bei $P_{max} = 3,20$ bzw. $3,29$ t erreicht und der Belastungsanteil des Bügels beträgt hierbei $0,510$ bzw. $0,598$ t, so daß sich für die kritische Druckkraft des Stabes $X_{kr} = 2,690$ bzw. $2,692$ t ergibt; wenn wir X_{kr} mit Hilfe der

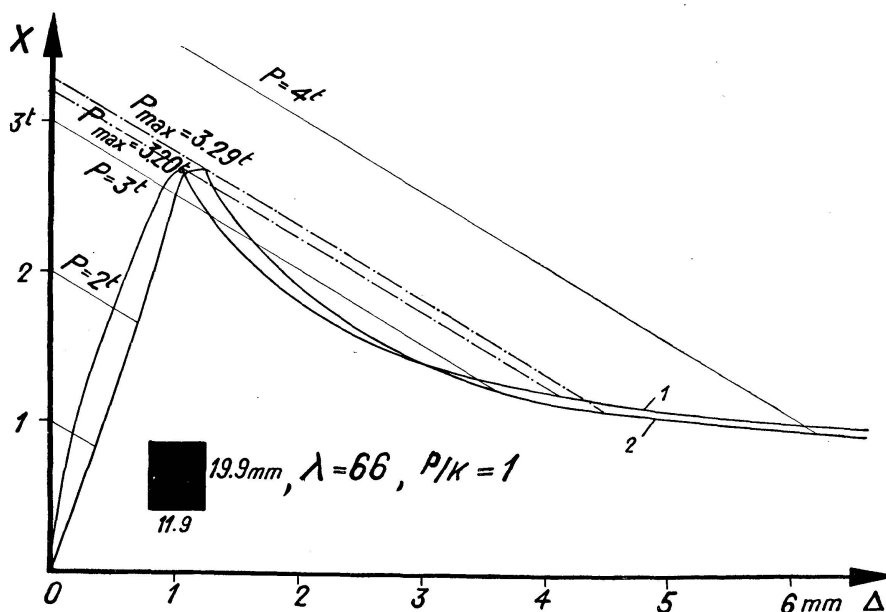


Fig. 7.

theoretisch ermittelten Tabellen für beiderseitig gelenkig gelagerte Baustahlstäbe (vgl. unter Fußnote 4) bestimmen, dann erhalten wir genau denselben Wert. Der achsiale Widerstand fällt auch hier nach Erreichen des kritischen Zustandes stark ab, so daß die Verformung Δ des statisch unbestimmten Systems stark zunimmt und erst bei $\Delta = 4,08$ bzw. $4,49$ mm ein neuer Gleichgewichtszustand erreicht wird. Das stützende Grundsystem wird auch hier stark überlastet, da die Bügelkraft im neuen Zustand $1,99$ bzw. $2,19$ t, d. i. das $3,90$ - bzw. $3,66$ -fache des Wertes im kritischen Zustand beträgt.

Wir können somit feststellen, daß das gefundene theoretische Ergebnis durch die Versuchsergebnisse voll bestätigt wird. Der starke Widerstandsabfall, den gedrückte Baustahlstäbe nach Erreichen des „Knickzustandes“ zeigen, hat eine Mehrbelastung des stützenden Grundsystems zur Folge, die ein Vielfaches des im Augenblick der Knickung des überzähligen Stabes übernommenen Lastanteils betragen kann. Am stärksten kommt diese Mehrbelastung bei zentrisch und nahezu zentrisch gedrückten Stäben und zwar, wie aus dem Verlauf der Kurven Figur 2 leicht zu schließen ist, bei Schlankheitsgraden von etwa $\lambda = 40$ bis 100 zur Geltung.

B. Das Tragverhalten einer über drei Felder durchlaufenden Stütze bei exzentrischer Druckbelastung.

Wir haben im Abschnitt A gezeigt, daß die Tragfähigkeit statisch unbestimmter Fachwerke in großem Maße vom Verhalten der gedrückten Stäbe beeinflusst werden kann und wollen nunmehr das Tragverhalten eines statisch unbestimmten Stabwerkes bei Auftreten von Druckbelastung in Untersuchung ziehen. Als Beispiel wählen wir eine über drei gleiche Felder durchlaufende Stütze aus Baustahl, die im Mittelfelde durch eine exzentrisch angreifende Druckkraft belastet wird (Figur 8a). Der Stabquerschnitt sei ein Rechteck $F = b \cdot h$ und die Hebelarme p der Druckkraft $P = \sigma_0 \cdot F$ seien

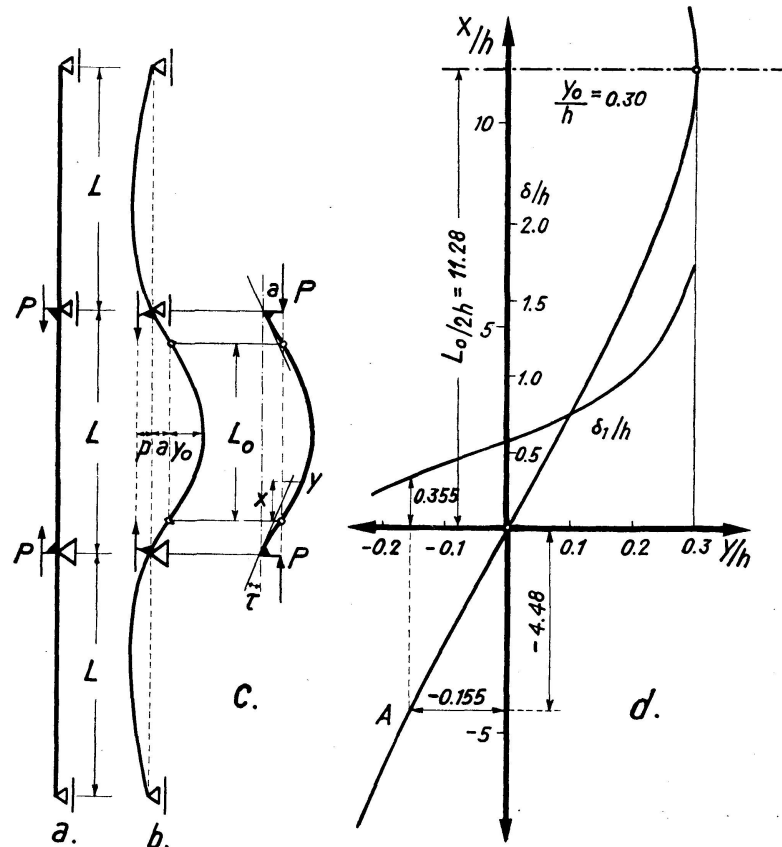


Fig. 8.

beiderseits gleich groß; der Baustahl möge der gleiche sein, den wir im Abschnitt A zugrunde legten (Proportionalitätsgrenze $\sigma_P = 1900 \text{ kg/cm}^2$, $\varepsilon_P = 0,86 \text{ ‰}$, Elastizitätsmodul $E = 2,210\,000 \text{ kg/cm}^2$, Fließbereich $\sigma_F = 2700 \text{ kg/cm}^2 = \text{const.}$ von $\varepsilon_F = 2,5$ bis $\varepsilon_F' = 6,0 \text{ ‰}$, Zugfestigkeit $\sigma_B = 4200 \text{ kg/cm}^2$).

Der Stab wird sich unter der Druckkraft P nach der in Figur 8b gezeichneten symmetrischen Kurve verbiegen und es werden über den beiden Mittelstützen gleichgroße Biegemomente $\mathfrak{M}$ entstehen, die wir als statisch überzählig ansehen wollen. Zur Bestimmung dieser Momente schalten wir über den Mittelstützen reibungsfreie Gelenke ein, lassen $\mathfrak{M}$ als äußeres Doppelmoment wirken und stellen die Bedingung auf, daß die Endverdrehungen $\text{tg } \tau$ der an der Gelenkstelle zusammenstoßenden beiden Stabteile gleiche Größe besitzen müssen. Solange der HOOKE'sche Bereich nicht

verlassen wird, werden die Stäbe in den beiden Seitenfeldern nach kubischen Parabeln verbogen und die Endverdrehung beträgt $\text{tg } \tau = \frac{\mathfrak{M} \cdot L}{3EJ}$, welche Beziehung nach Einführung des Stabträgheitsmomentes $J = \frac{bh^3}{12}$ auch in der Form $\text{tg } \tau = \frac{8}{E} \cdot \frac{L}{2h} \cdot \frac{\mathfrak{M}}{bh^2}$ angeschrieben werden kann. Wird $\mathfrak{M} > \frac{bh^2}{6} \cdot \sigma_P$ oder $\frac{\mathfrak{M}}{bh^2} > 316,7 \text{ kg/cm}^2$, dann wird der HOOKE'sche Bereich verlassen und wir müssen den funktionalen Zusammenhang zwischen $\text{tg } \tau$ und $\mathfrak{M}$ auf folgende Weise ermitteln: Wir bestimmen vorerst auf Grund der vorgegebenen Spannungs-Dehnungslinie (die wir den Biegezug- und Biegedruckspannungen zugrunde legen) und des rechteckigen Stabquerschnittes $F = b \cdot h$ den Zusammenhang zwischen dem resultierenden Spannungsmoment M und der örtlichen Achsenkrümmung $\frac{1}{\varrho}$ in Form der Kurve $\frac{h}{\varrho} = \varphi \left(\frac{M}{bh^2} \right)^{11)}$. In Figur 9 a ist die so erhaltene Kurve dargestellt worden, wobei die Punkte P, F, F' und G der Reihe nach jenen Normalspannungsverteilungen zugeordnet sind, in denen die Randspannungen die Proportionalitätsgrenze, die Fließgrenze, den Beginn der Verfestigung und die Größe $\sigma = \pm 4000 \text{ kg/cm}^2$ erreichen. Wirkt nun auf den Stab das Endmoment $\mathfrak{M}$ ein, dann können wir für den Gleichgewichtsfall die lineare Verteilung der Größe $\frac{M}{bh^2}$ angeben (Figur 9 b) und jedem Wert $\frac{M}{bh^2}$ aus Figur 9 a einen Wert $\frac{h}{\varrho}$ zuordnen. Da mit Rücksicht auf die Kleinheit der entstehenden Stabausbiegungen der linearisierte Ansatz $\frac{1}{\varrho} \sim -\frac{d^2 y}{dx^2}$ verwendet werden darf, können wir nach dem Satz von MOHR die Verteilung $\frac{h}{\varrho}$ als Belastung auffassen und die h -fache Endverdrehung $\text{tg } \tau$ als Stützkraft unter dieser gedachten Belastung ermitteln (Figur 9 b). Auf diese Weise erhalten wir $\text{tg } \tau$ in der Form $\text{tg } \tau = k \cdot \frac{L}{2h} \cdot \frac{\mathfrak{M}}{bh^2}$ und finden z. B. für $\frac{\mathfrak{M}}{bh^2} = 316,7, 454,3, 604,5, 696,6$ und $794,7$ der Reihe nach $k = 3,62, 3,70, 4,18, 6,65$ und $12,73 \text{ mal } 10^{-6}$.

Im Mittelfeld wirkt auf den Stab außer dem Endmoment $\mathfrak{M}$ noch die exzentrische Druckkraft P ein. Da wir die Untersuchung im weiteren auf einzelne Laststufen $P = \text{const.}$ beziehen, dürfen wir $\mathfrak{M} = P \cdot p'$ setzen, wobei der gedachte Hebelarm p' dem Angriffshebel p entgegenwirkt und der entlastenden Wirkung des Stabes im Seitenfeld Rechnung trägt. Die resultierende Belastung des Mittelfeldes besteht dann aus einer Druckkraft $P = \sigma_0 \cdot F$, die mit dem Hebelarm $a = p - p'$ exzentrisch angreift und eine Gleichgewichtsfigur nach Art der Figur 8 c erzeugt. Der innerhalb der Wendepunkte gelegene Ast dieser Figur ist offenbar identisch mit der Biege-

¹¹⁾ Bezüglich der Ermittlung dieses Zusammenhanges siehe unter Fußnote 5. Es erscheint empfehlenswert, die Kurve Fig. 9 a mit der Kurve zu vergleichen, die bei Voraussetzung eines idealplastischen Werkstoffes erhalten wird und den unter Fußnote 1 erwähnten theoretischen Untersuchungen im Fall der Biegung zugrunde liegt. Wir erkennen, daß die Kurventangente an keiner Stelle parallel zur Ordinatenachse verläuft, daß also auch bei beschränkter Verformung sog. „Plastizitätsgelenke“ mit Rücksicht auf die starke Verfestigung nicht zur Ausbildung gelangen.

linie, die ein beiderseits gelenkig gelagerter, zentrisch gedrückter Stab der Länge L_0 unter der Druckkraft $P = \sigma_0 \cdot F$ ausbildet und als „Grundkurve“ $y = \psi(x)$ bezeichnet werden möge. (Bezüglich der Bestimmung dieser Grundkurven vgl. unter Fußnote 5.) Wir legen das Koordinatenkreuz mit der x -Achse in die Grundkurvensehne und mit dem Ursprung an das eine Grundkurvenende, fassen die außerhalb der Wendepunkte liegenden Äste als polarsymmetrische Fortsetzungen dieser Grundkurve auf und können feststellen, daß die für die Stelle $x = -\frac{L-L_0}{2}$, $y = -a$ gefundenen Achsenverdrehung $\left. \frac{dy}{dx} \right|_{y=-a}$ mit Rücksicht auf unsere Formänderungsbedingung mit der Endverdrehung $\operatorname{tg} \tau$ übereinstimmen muß. Nach Einführung von $\mathfrak{M} = P \cdot p' = bh \cdot \sigma_0 \cdot (p - a)$ läßt sich diese Bedingung auch in der Form $\frac{a}{h} = \frac{p}{h} - \frac{1}{k \cdot \sigma_0} \cdot \frac{2h}{L} \cdot \left. \frac{dy}{dx} \right|_{y=-a}$ schreiben und ermöglicht so eine bequeme Ermittlung der Gleichgewichtszustände für zugrunde gelegte Laststufen $\sigma_0 = \frac{P}{bh}$. Wir gehen hierbei zweckmäßig von einem gewählten Wert y_0 aus, bestimmen den genauen Verlauf und die Länge L_0 der Grundkurve, zeichnen diese Grundkurve einschließlich ihrer polarsymmetrischen Fortsetzungen und suchen jene Größe L auf, für die unsere Formänderungsbedingung befriedigt wird. Diese „Gleichgewichtslänge L “ legt die Feldweite fest, die die dreifeldrige Stütze besitzen muß, damit bei Einhaltung des Wertes y_0 ein Gleichgewichtszustand unter der gegebenen Druckbelastung ausgebildet werden kann; die hierbei entstehende Biegelinie ähnelt der Kurve Figur 8 b und zeigt in Stabmitte eine seitliche Ausbiegung von der Größe $\bar{y}_0 = y_0 + p' - p = y_0 - a$.

Die Durchführung dieses Lösungsverfahrens sei an einem Zahlenbeispiel gezeigt, für das wir $\frac{P}{bh} = 1500 \text{ kg/cm}^2$, $\frac{p}{h} = 0,20$, $\frac{y_0}{h} = 0,30$ wählen. Die Grundkurve für den prismatischen Stab aus dem geschilderten Baustahl ist für den Fall $\sigma_0 = 1500 \text{ kg/cm}^2$, $\frac{y_0}{h} = 0,30$ in Figur 8 d einschließlich ihrer polarsymmetrischen Fortsetzung im Koordinatensystem $\frac{x}{h}$, $\frac{y}{h}$ dargestellt worden und da für jede Stelle $\frac{y}{h}$ die Länge der vom Scheitelpunkt aus gemessenen Sehne $\frac{L}{2h}$ und auch die Größe $\frac{dy}{dx}$ bekannt ist, können wir für jede Stelle $\frac{y}{h}$ die Hilfsgröße $\frac{\delta_1}{h} = \frac{1}{k \cdot \sigma_0} \cdot \frac{2h}{L} \cdot \frac{dy}{dx}$ bestimmen und die Kurve $\frac{\delta_1}{h} = f_1\left(\frac{y}{h}\right)$ zeichnen (Figur 8 d). Der HOOKE'sche Bereich wird im Seitenfeld verlassen, wenn $p' = \frac{\mathfrak{M}}{P} = \frac{316,7 \cdot bh^2}{1500 \cdot bh} = 0,211 h$, also $\frac{a}{h} = 0,2 - \frac{p'}{h} = -0,011$ beträgt und demgemäß sind die Ordinaten dieser Kurve rechts von der Stelle $\frac{y}{h} = -0,011$ mit Verwendung des HOOKE'schen Wertes $k = \frac{8}{E}$ und links von dieser Stelle mit Hilfe eines nach Figur 9 ermittelten größeren Wertes k zu berechnen. Die Kurve $f_1\left(\frac{y}{h}\right)$ ermöglicht uns, unmittelbar jenen Punkt des Grundkurvenzuges anzugeben, für den die Formände-

rungsbedingung $\frac{a}{h} = \frac{p}{h} - \frac{\delta_1}{h} = 0,2 - \frac{\delta_1}{h}$ befriedigt wird; es ist dies der Punkt A mit den Koordinaten $\frac{x}{h} = -4,48$, $\frac{y}{h} = \frac{a}{h} = -0,155$ und der zugeordneten Hilfsgröße $\frac{\delta_1}{h} = 0,355$. Der Ordinatenunterschied des Scheitels und des Punktes A besitzt die Größe $\frac{L}{2h} = \frac{L_0}{2h} + 4,48 = 15,76$, so daß die Gleichgewichtslänge $L = 31,52 \cdot h$ und der Schlankheitsgrad $\lambda = \frac{L}{h} \cdot \sqrt{12} = 109,0$ beträgt. Wir können somit feststellen, daß die untersuchte dreifeldrige Stütze, sofern sie die Feldweite $L = 31,52 \cdot h$ besitzt, unter der exzentrischen Druckbelastung $P = 1500 \cdot b \cdot h$, $p = 0,2 \cdot h$ eine Gleichgewichts-

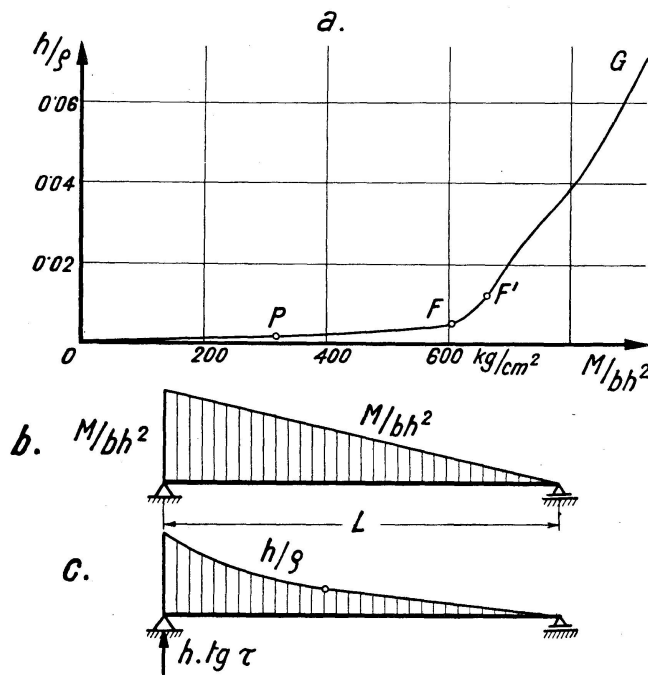


Fig. 9.

figur nach Art der Figur 8 b ausbildet, deren Wendepunkte in der Entfernung $4,48 \cdot h$ von den Mittelstützen gelegen sind und die in Stabmitte die seitliche Ausbiegung $\bar{y}_0 = 0,30 \cdot h + 0,155 \cdot h = 0,455 \cdot h$ aufweist. Das Stützenmoment beträgt in diesem Zustand $\mathfrak{M} = bh \cdot \sigma_0 \cdot (p - a) = 532 \cdot b \cdot h^2$ und die größte Randspannung im Seitenfeld liegt (vgl. Figur 9 a) noch unterhalb der Fließgrenze.

Die systematische Bestimmung der Schlankheitsgrade $\lambda = L/i$, die zur Ausbildung von Gleichgewichtszuständen der untersuchten dreifeldrigen Stütze notwendig sind, wird in Figur 10 vorgeführt. Auch dieses Graphikon bezieht sich auf Stäbe, deren Querschnitt ein Rechteck $F = b \cdot h$ ist und deren Baustahl dem geschilderten Formänderungsgesetz gehorcht; die Laststufe ist durch die mittlere Druckspannung $\sigma_0 = \frac{P}{F} = 1500 \text{ kg/cm}^2$ festgelegt und als Angriffsexzentrizität werden verschiedene Werte p/h in Rechnung gestellt. Wir haben vorerst die Schar der Grundkurven, die unter der Druckkraft $P = 1500 \cdot F$ bei verschiedenen Werten der Scheitelausbiegung y_0/h aus-

gebildet werden, genau zu bestimmen und ferner auch die Hilfsgröße „ k “ für verschiedene Werte $\frac{\mathfrak{M}}{bh^2}$ nach dem geschilderten Verfahren festzulegen; für den HOOKE'schen Bereich ergab sich $k = 3,62 \cdot 10^{-6}$. Um das Auftreten sehr kleiner Dezimalwerte zu vermeiden, wollen wir unsere Formänderungsbedingung beiderseits mit $\frac{10^6 \cdot k}{3,62}$ multiplizieren, also in der Form $\frac{10^6 \cdot k}{3,62} \cdot \left(\frac{p}{h} - \frac{a}{h} \right) = \frac{10^6}{3,62 \cdot 1500} \cdot \frac{2h}{L} \cdot \frac{dy}{dx}$ oder kurz $\frac{\delta_2}{h} = \frac{\delta_1}{h}$ schreiben. Die Funktion $\frac{\delta_1}{h} = 184,17 \cdot \frac{2h}{L} \cdot \frac{dy}{dx} = f_1\left(\frac{y}{h}\right)$ läßt sich, ähnlich wie in Figur 8 d gezeigt wurde, für verschiedene Parameter $\frac{y_0}{h}$ aus den Grundkurven bestimmen (in Figur 10 wird sie durch die dick gezeichneten Kurven wieder-

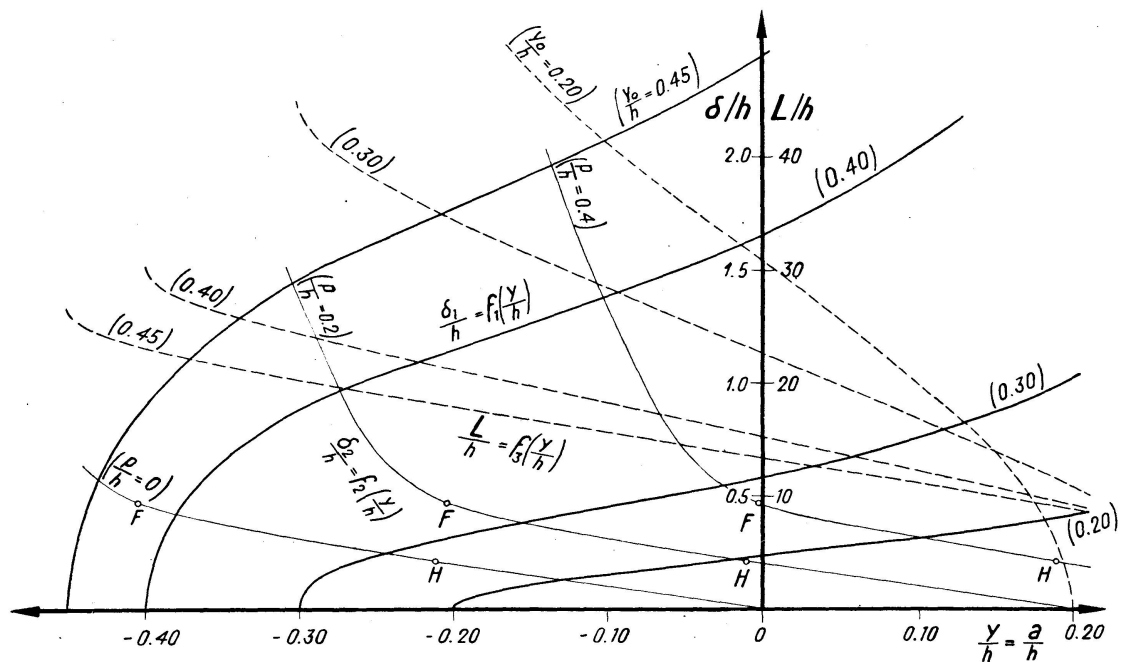


Fig. 10.

gegeben, die für $\frac{y_0}{h} = 0,20, 0,30, 0,40$ und $0,45$ dargestellt wurden). Auch können wir für verschiedene Werte $\frac{p}{h} - \frac{a}{h} = \frac{p'}{h} = \frac{\mathfrak{M}}{1500 \cdot b h^2}$ die Hilfsgröße $\frac{\delta_2}{h} = \frac{10^6 \cdot k}{3,62} \cdot \frac{p'}{h}$ berechnen und, da für die Lösung $\frac{y}{h} = \frac{a}{h}$ gilt, gleichfalls als Funktion $\frac{\delta_2}{h} = f_2\left(\frac{y}{h}\right)$ darstellen (in Figur 10 wird diese Funktion durch die dünn ausgezogenen Kurven wiedergegeben, die für die Exzentrizitätsmaße $\frac{p}{h} = 0, 0,2$ und $0,4$ gezeichnet wurden). Auf diesen Kurven finden wir die Punkte H und F , die jenen Zuständen zugeordnet sind, in denen im Seitenfeld die Proportionalitätsgrenze bzw. die Fließgrenze erreicht wird; links vom Punkt F nehmen die Beiwerte „ k “ stark zu und daher steigen die Kurven hier steil an. Die Schnittpunkte der beiden Kurven

$f_1\left(\frac{y}{h}\right)$ und $f_2\left(\frac{y}{h}\right)$ befriedigen die Formänderungsbedingung; damit wir an den Abszissenorten $\frac{y}{h} = \frac{a}{h}$ dieser Schnittpunkte unmittelbar die zugeordnete Größe L/h abmessen und daraus die gesuchte Schlankheit $\lambda = \frac{L}{h} \cdot \sqrt{12}$ berechnen können, wurde mit Hilfe der Grundkurvenschar auch die Funktion $\frac{L}{h} = f_3\left(\frac{y}{h}\right)$ graphisch festgelegt (gestrichelte Kurven in Figur 10, gezeichnet für die Parameter $\frac{y_0}{h} = 0,20, 0,30, 0,40$ und $0,45$). Wir gewinnen auf diese

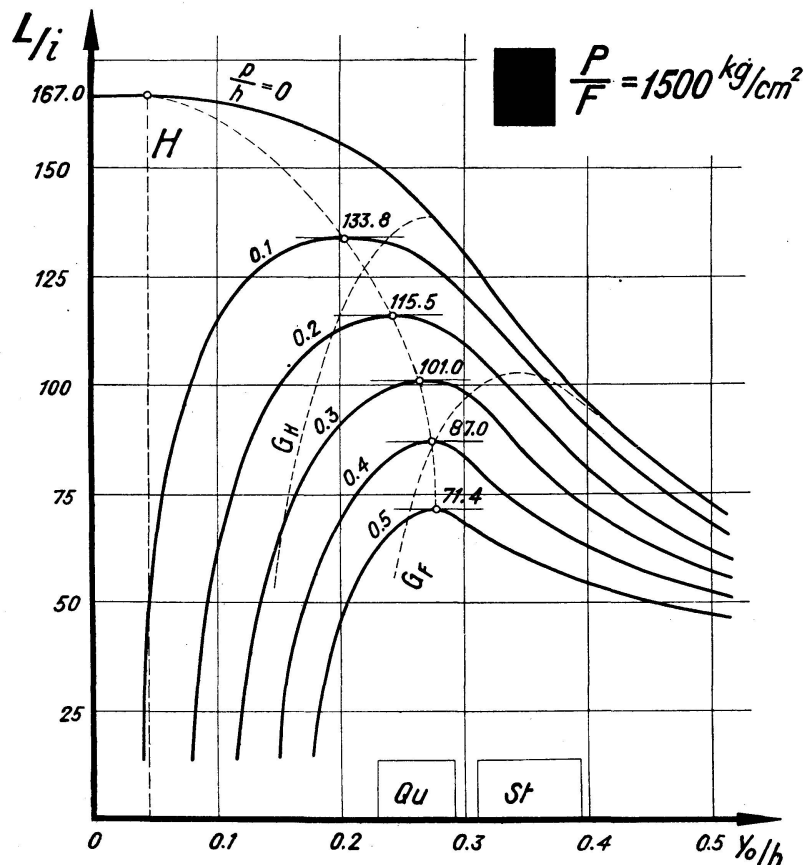


Fig. 11.

Weise für jedes gewählte Exzentrizitätsmaß p/h eine Serie zusammengehöriger Wertepaare $\lambda, \frac{y_0}{h}$ und können daher die Kurven $\lambda = f_4\left(\frac{y_0}{h}\right)$ punktweise bestimmen. In Figur 11 ist das so erhaltene „Diagramm der Gleichgewichtszustände“ für die Exzentrizitätsmaße $\frac{p}{h} = 0, 0,1, 0,2, 0,3, 0,4$ und $0,5$ dargestellt worden; die Abszissen beziehen sich hierbei, wie nochmals erwähnt sei, auf die Scheitelausbiegungen der Grundkurve und führen erst in der Form $\bar{y}_0 = y_0 - a$ auf die effektiven seitlichen Ausbiegungen in Stabmitte.

Um in Figur 11 die größte im Mittelfeld auftretende Stabspannung leicht abschätzen zu können, wurde die Grenzgerade „ H “, das Quetschintervall „ Qu “ und das Streckintervall „ St “ eingezeichnet. Alle Diagrammpunkte

links von „H“ gehören Gleichgewichtszuständen an, in denen im Mittelfeld die Proportionalitätsgrenze noch nicht erreicht ist. Fällt die Abszisse eines Diagrammpunktes in das Intervall „St“, dann liegt die größte (am Außenrand des Stabscheitels auftretende) Zugspannung im Streckbereich $\sigma_F = +2700 \text{ kg/cm}^2$, während die gleichzeitig auftretende größte Randpressung (da das Quetschintervall schon verlassen wurde) dem Verfestigungsbereich angehört. Um auch die größte im Seitenfeld auftretende Randspannung bequem abschätzen zu können, wurden die Grenzlinien „ G_H “ und „ G_F “ gestrichelt eingetragen. Alle Kurvenpunkte links außerhalb von G_H gehören Gleichgewichtszuständen an, in denen im Seitenfeld der HOOKE'sche Bereich nicht verlassen wird ($\mathfrak{M} < 316,7 \cdot bh^2$); alle Kurvenpunkte rechts außerhalb von G_F hingegen sind Zuständen zugeordnet, in denen $\mathfrak{M} > 604,5 \cdot bh^2$ ist und daher die Randspannung im Seitenfeld die Fließgrenze $\sigma_F = 2700 \text{ kg/cm}^2$ erreicht hat.

Die Kurve für den Sonderfall des zentrischen Kraftangriffes „ $\frac{p}{h} = 0$ “ zweigt von der Ordinatenachse (die einen Ast dieser Kurve bildet) mit waagrechtlicher Tangente ab. Die Ordinate λ_k des Verzweigungspunktes stellt die Gleichgewichtsschlankheit für eine infinitesimale Ausbiegung („Knickschlankheit“) vor und wird nach den Lehren der Stabilitätstheorie aus der „Knickbedingung“ gewonnen. Wenn wir uns auf die maßgebenden symmetrischen Biegelinienformen beschränken, lautet diese Knickbedingung $\cos \frac{\beta \cdot L}{2} + \frac{3 \cdot \beta \cdot E \cdot J}{P \cdot L} \cdot \sin \frac{\beta \cdot L}{2} = 0$, wobei $\beta = \sqrt{\frac{P}{TJ}}$ bedeutet und T den ENGESSER-KÁRMÁN'schen Knickmodul vorstellt. In unserem Falle ist $\frac{P}{F} = 1500 \text{ kg/cm}^2$, somit $T = E$, und wir erhalten als kleinste Knickwurzel $\beta \cdot L = 4,35$ und daraus $\lambda_k = 4,35 \cdot \sqrt{\frac{E}{1500}} = 167,0$ als Ordinate des Abzweigungspunktes der Kurve „ $\frac{p}{h} = 0$ “.

Betrachten wir das gefundene Diagramm der Gleichgewichtszustände Figur 11, dann sehen wir, daß die Kurven für exzentrische Lastangriffe ausgeprägte Maxima aufweisen. Die diesen Maxima zugeordneten Ordinaten $\max \lambda = \lambda_{kr}$ („kritische Schlankheitsgrade“) stellen die größten Schlankheitsgrade der dreifeldrigen Stütze vor, die noch die Ausbildung eines Gleichgewichtszustandes unter der gegebenen Belastung zulassen; wäre die Schlankheit größer als λ_{kr} , dann würde der Stab die gegebene Last nicht zu tragen vermögen und sich immer mehr ausbiegen, bis er eine äußere Stützung findet oder eine Gefügetrennung erfährt. So können wir z. B. aussagen, daß die Stütze mit der Feldschlankheit $\frac{L}{i} = 101,0$ zusammenbricht, wenn die mit $p = 0,3 \cdot h$ exzentrisch angreifende Druckkraft die Größe $P = 1500 \cdot F$ erreicht, da die Wertegruppe $\frac{P}{F} = 1500$, $\frac{p}{h} = 0,3$, $\lambda = 101,0$ in Figur 11 einem kritischen Gleichgewichtszustand angehört¹²⁾. Aus der Lage des Kurvenpunktes gegenüber den Intervallen „Qu“

¹²⁾ Die Lösung ist exakt und zur Begründung dieser Exaktheit erscheint noch die folgende Bemerkung geboten: Wächst P von Null bis zum kritischen Wert an, dann ändert sich der Biegelinienverlauf und die Wendepunkte werden sich innerhalb eines bestimmten Bereiches verschieben. Es existiert daher in der Umgebung der Wendepunkte

und „St“ sowie der Grenzkurve „ G_F “ können wir hier den Schluß ziehen, daß im kritischen Zustand (d. i. im Augenblick des Zusammenbruches) die größte Pressung des Stabes im Mittelfeld innerhalb des Quetschbereiches und die größte Zugspannung unter der Fließgrenze gelegen ist und daß auch die größte Randspannung im Seitenfeld die Fließgrenze noch nicht erreicht hat.

In gleicher Weise vermögen wir aus Figur 11 auch zu entnehmen, daß die untersuchte dreifeldrige Stütze zusammenbricht, wenn die Feldschlankheit $\frac{L}{i} = 133,8$ beträgt und die mit dem Hebelarm $p = 0,1 \cdot h$ angreifende Druckkraft die Größe $P = P_{kr} = 1500 \cdot F$ erreicht. Dieses Ergebnis ist deshalb von besonderem Interesse, weil hier der Zusammenbruch des statisch unbestimmten Systems schon eingeleitet wird, bevor noch im Seitenfelde der HOOKE'sche Bereich verlassen wird und die größte Pressung im Mittelfelde ganz an die Quetschgrenze gelangt. Es erscheint daher in dieser Beziehung bei der Beurteilung des Tragvermögens statisch unbestimmter Stabwerke mit gedrückten Gliedern einige Vorsicht am Platze¹³⁾. Den genauen Wert der im kritischen Zustand entstehenden Größtspannung im Seitenfeld können wir mit Hilfe der Figur 10 leicht ermitteln, da sich hier für $\frac{p}{h} = 0,1$, $\frac{y_0}{h} = 0,203$ die Abszisse $\frac{a}{h} = -0,077$ ergibt und damit $M = P \cdot (p - a) = 265,5 \cdot b h^2$ und $\sigma_{max} = \frac{6 \cdot M}{b h^2} = 1593 \text{ kg/cm}^2$ berechnet werden kann. Die im kritischen Zustand auftretende seitliche Ausbiegung in Stabmitte beträgt $\bar{y}_0 = y_0 - a = 0,280 \cdot h$ und für die Entfernung der Wendepunkte der Biegelinie von den Mittelstützen finden wir $0,102 \cdot L$, so daß der Biegelinienverlauf im Augenblick des Zusammenbruches der Figur 8 b ähnelt. Würden wir auf die entlastende Wirkung der Stäbe in den beiden Seitenfeldern verzichten und das statisch bestimmte Grundsystem (mit Gelenken über den Mittelstützen) ausführen, dann wäre die Grenzlast des Systems mit der kritischen Druckkraft des Mittelstabes identisch und würde $P_{kr} = 850 \cdot F$ betragen (vgl. die unter Fußnote 4 genannte Abhandlung, in der sich eine Tabelle der kritischen Spannungen von exzentrisch gedrückten, beiderseits gelenkig gelagerten Stäben aus dem hier zugrunde gelegten Baustahl befindet). Wir ersehen daraus, daß die Tragfähigkeit im untersuchten Beispiel durch die Wahl der statisch unbestimmten Anordnung (d. h. durch die biegesteife Verbindung

ein Bereich, innerhalb dessen das Vorzeichen der Achsenkrümmung während der Laststeigerung geändert wird und daher im allgemeinen das lineare Entlastungsgesetz im Spannungsbilde zur Geltung kommen kann. Im untersuchten Fall ist eine derartige (an sich nicht bedeutungsvolle) Beeinflussung der Rechnung zugrunde liegenden Formänderungsgesetzes ausgeschlossen, da die mittlere Druckspannung nur bis zum kritischen Wert 1500 kg/cm^2 anwächst und die überlagerten Biegespannungen in der Nähe der Wendepunkte sehr klein sind.

¹³⁾ In diesem Zusammenhang sei auch auf das Verhalten schlanker Stahlbogenträger mit geringer Pfeilhöhe hingewiesen. Die theoretischen Untersuchungen des Verfassers haben hier ergeben, daß für den Nachweis der „Knicksicherheit“ nicht die Vollbelastung sondern die halbseitige Belastung maßgebend ist, da dann die Stützlinie von der Bogenachse stark abweicht, also eine stark exzentrische Druckbelastung des Stabes eintritt. Bei üblicher Bemessungsweise (Nachweis der „zulässigen Inanspruchnahme“ im Querschnitt des Viertelpunktes) kann der Sicherheitsgrad gegen diese Art des Zusammenbruches bis auf etwa ,61 heruntersinken.

parallel zu „ G “ verläuft) mit der Kurve $\varphi(X)$ legt den Selbstspannungszustand II fest, der nach Entfernung von P ausgebildet wird; die Vertikale besitzt hier die Druckkraft X_{II} , die Strebe die Zugkraft $S_{II} = -X_{II}$ und der Lastknoten erreicht nicht mehr die ursprüngliche Lage sondern zeigt die bleibende Verschiebung Δ_{II} . Wächst die Last nunmehr zum zweiten Mal von Null auf den früheren Endwert P an, dann steigt die Kurve $\varphi(X)$ wieder bis zur Geraden G an und legt hier den neuen Gleichgewichtszustand III fest u. s. w.; wir sehen, so lange die obere Lastgrenze P unverändert bleibt, müssen die Punkte I, III, V, ... (Gleichgewichtszustände unter P) auf der Geraden G und die Punkte II, IV, VI, ... (Selbstspannungszustände nach Entfernen von P) auf der Geraden G' gelegen sein.

Da die Achsialspannung in der plastisch gedehnten Vertikalen beim Übergang in den Selbstspannungszustand das Vorzeichen wechselt, wird der Verlauf des Kurvenzuges $\varphi(X)$ durch jenen Komplex von Erscheinungen beeinflusst, der unter dem Namen „Bauschinger Effekt“ bekannt ist. Im Rahmen dieses Effektes werden die konventionellen Grenzen, vor allem die Elastizitätsgrenze, entsprechend ihrer Abstufung und je nach der Größe der vorher aufgetretenen plastischen Verformung verändert¹⁴⁾. Der Einfluß des zeitlichen Ablaufes der Belastungen kann durch die beiden Grenzfälle Fig. 12 b und c zur Darstellung gebracht werden. Im ersten dieser Grenzfälle, der durch die Einschaltung ausreichend großer Ruhepausen zwischen den Lastwechseln gekennzeichnet ist, erfährt die Elastizitätsgrenze im Zuge der Alterung eine Hebung bis zum vorher erreichten Punkt I, so daß bei der zweiten und jeder weiteren Belastung derselbe Ast I—II der Kurve $\varphi(X)$ durchlaufen wird und der Formänderungszustand ein stationärer ist. Im Grenzfall unmittelbar aufeinander folgender Lastwechsel erscheint hingegen die Elastizitätsgrenze für die jeweils folgende Beanspruchung des entgegengesetzten Vorzeichens merkbar gesenkt, so daß die Kurve $\varphi(X)$ eine offene Schleife bildet, deren Spitzen I, III, V, ... bzw. II, IV, VI, ... die Gleichgewichtszustände nach der Belastung bzw. Entlastung festlegen. Diese Einzwängung des Schleifenzuges in das Geradenpaar G, G' ist durch das Übermaß an kinematischer Bindung des Systems bedingt und daher typisch für statisch unbestimmte Tragwerke; sie bewirkt bei zunehmender plastischer Verformung eine fortschreitende Abnahme der Stabkraft X (also eine fortschreitende Entlastung des überzähligen Stabes im überlasteten System), die allerdings mit einer Zunahme der entgegengesetzt gerichteten Stabkraft im Selbstspannungszustand verknüpft ist. Je steifer das stützende Grundsystem ist, je kleiner also der Neigungswinkel α des Geradenpaares G, G' ist, umso ausgeprägter tritt dieser Entlastungsprozeß in Erscheinung. Durch die Abwärtsführung der Schleife werden die durch die Belastungen neu hinzukommenden Dehnungsanteile allmählich verkleinert und jene des Selbstspannungszustandes immer mehr vergrößert, so daß nach einer ausreichenden Zahl von Wechseln beide Anteile übereinstimmen werden. Die Schleife ist dann in sich geschlossen, der Formänderungszustand wird stationär. Die lotrechten Senkungen Δ des Lastknotens pendeln dann zwischen den Werten Δ_n und Δ_{n+1} hin und her, es besteht zwar keine Proportionalität, jedoch vollkommene Elastizität. Erfährt die Elastizitätsgrenze des Baustahls im Zuge

¹⁴⁾ Vgl. dazu L. BAUSCHINGER, Ziviling. 1881 und Mitt. Mech. Techn. Laborat. München 1886; G. MASING und W. MAUKSCH, Wiss. Ver. Siemens Konzern, 1925/26; G. SACHS und H. SHOJI, Z. f. Physik, 1927; W. KUNTZE, Z. d. V. d. Ing., 1928, S. 1488; W. KUNTZE und G. SACHS, Mitt. d. deutschen Mat.-Prüfungsanst., Sonderheft XIV, 1930.

der Belastungswiederholung eine fortschreitende Hebung, dann nimmt die Breite der Schleifen ab und es kann zur „vollständigen Konvergenz“ kommen, bei der der Schleifenzug in einer einzigen Geraden $n \rightarrow n + 1$ zusammenfällt.

Die Frage, ob das Erreichen eines stationären Formänderungszustandes durch Schließen der Hysteresisschleife auch vom Standpunkt der Dauerfestigkeit der Rückführung in den elastischen Bereich gleichkommt, scheint noch nicht endgültig geklärt zu sein. Würde der überlastete Stab einem statisch bestimmten System angehören, dann würde die Stabspannung bei jedem Lastwechsel zwischen der unteren Grenze $\sigma_u = 0$ und einer oberen Spannungsgrenze σ_0 schwanken und daher einer Zeitfestigkeit vom Typus der „Ursprungsfestigkeit“ unterliegen. Ist der wiederholt gereckte Stab ein überzähliger Stab eines statisch unbestimmten Systems, dann tritt die geschilderte Abwärtsführung der beiden Spannungsgrenzen σ_u und σ_0 ein; die Spannungsdifferenz $\sigma_0 - \sigma_u$ bleibt hierbei annähernd die gleiche, hingegen nimmt das arithmetische Mittel $\frac{1}{2}(\sigma_0 + \sigma_u)$, die „statische Vorspannung“, immer mehr ab, so daß sich die Beanspruchungsweise immer mehr der „schwingenden“ nähert. Da nun der doppelte Wert der Schwingungsfestigkeit (also die ganze Spannungsdifferenz $\sigma_0 - \sigma_u$) für den Baustahl im allgemeinen größer¹⁵⁾ ist als die Ursprungsfestigkeit, wirkt sich der geschilderte Entlastungsprozeß auch vom Standpunkt der Dauerfestigkeit günstig aus; allerdings darf nicht übersehen werden, daß die vorangegangene Überlastung des Stabes die Dauerfestigkeit herabzusetzen vermag.

Versuche über das Tragverhalten einfach statisch unbestimmter Fachwerke mit wiederholt überlasteten Zugstäben.

Bei den Versuchen mit wiederholt überlasteten, statisch überzähligen Zugstäben fand ebenso wie bei den im Abschnitt A geschilderten Druckversuchen der in Figur 5 a gezeichnete Stahlbügel Verwendung, der die Fachwerkskonstruktion des „stützenden Grundsystems“ vertritt und ein elastisches, ziffernmäßig genau festlegbares Verhalten dieses Grundsystems gewährleistet sowie eine gelenkige Lagerung des untersuchten Stabes ermöglicht. Die Eichung des Bügels zeigte, daß innerhalb des Nutzbereiches (Vergrößerungen der Lagerentfernung bis zu 7,5 mm) das HOOKE'sche Gesetz befolgt wird und die Federkonstante, wenn die Messung mit derselben Meßeinrichtung wie bei den Hauptversuchen erfolgt, $C = 0,197 \text{ cm/t}$ beträgt¹⁶⁾. Die nach Figur 5 b ausgebildeten Versuchsstäbe wurden mit ihren verstärkten Enden (Querschnitt 20/20 gegenüber einem Kreisquerschnitt mit $d = 16 \text{ mm}$, $F = 2,01 \text{ cm}^2$ innerhalb der Meßstrecke) in die Beißkeile der Maschine eingespannt, nachdem die gehärteten, beiderseits angeordneten Schneidenkörper mit Hilfe eines Keilpaares gleichmäßig an die Lagerpfannen des Bügels angedrückt wurden. Alle Versuchsstäbe stammten aus derselben Stange; der statische Zugversuch ergab für das Stabmaterial eine obere und untere Streckgrenze $\sigma_{Fo} = 2,42$ bzw. $\sigma_{Fu} = 2,36 \text{ t/cm}^2$, eine Zugfestigkeit $\sigma_B = 4,02 \text{ t/cm}^2$, die Bruchdehnung $\delta_{10} = 33 \%$ und die Einschnürung $\psi = 67 \%$.

Die Messung der Dehnungen Δ_0 erfolgte über eine Meßstrecke von 150 mm. Da aus diesen Messungsergebnissen auf die gesamte Längenände-

¹⁵⁾ Vgl. O. GRAF, Die Dauerfestigkeit der Werkstoffe, Berlin 1929; K. SCHAECHTERLE, Z. „Die Bautechnik“ 1932, S. 592; A. THUM und W. BUCHMANN, Dauerfestigkeit und Konstruktion, Berlin 1932; P. LUDWIK u. J. KRYSTOF, Z. d. V. d. Ing. 1933, S. 629.

¹⁶⁾ Dieser Wert ist um 0,008 cm/t kleiner als der bei den Druckversuchen in Rechnung gestellte, da bei der hier gewählten Meßeinrichtung die Einpressungen der Unterlagsplatten etc. im Ablesungsergebnis nicht enthalten sind.

rung des Stabes zwischen den beiden Schneidenkörpern geschlossen werden mußte, wurden die Ergebnisse des statischen Zugversuches verwendet, um die Dehnungen der beiden Stabenden (vom Ende der Meßstrecke bis zum Schneidenkörper) allgemein als Bruchteil $k\%$ der Meßstrecken-Dehnung auszudrücken¹⁷⁾. Mit Hilfe des so gewonnenen Graphikons konnte zu jeder Ablesung Δ_0 unmittelbar die zwischen den Schneiden auftretende Gesamtdehnung $\left(1 + \frac{k}{100}\right) \cdot \Delta_0$ angegeben werden und mit Hilfe des Ergebnisses der Bügeleichung ließ sich dann auch der Lastanteil $(P - X)$ des Bügels und die Kraft X im überzähligen Stab genau festlegen. Die auf diese Art

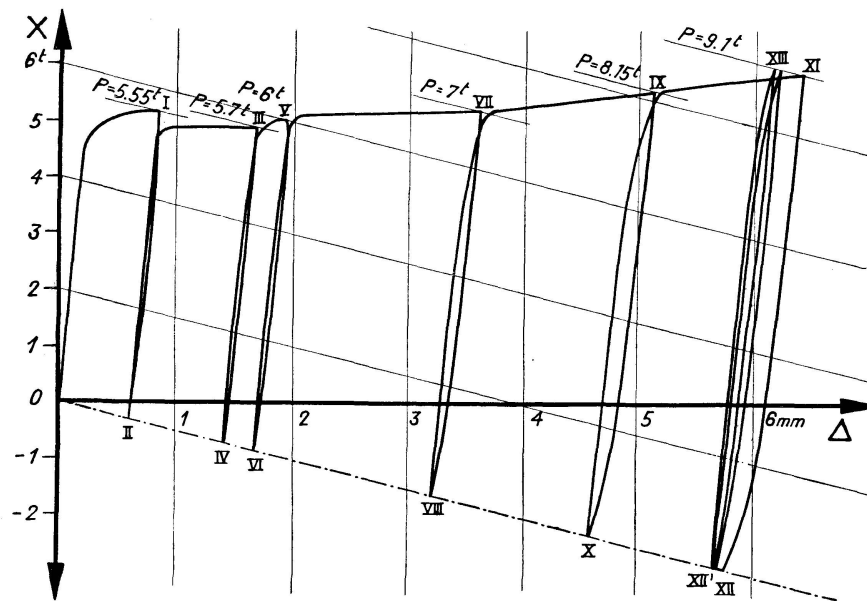


Fig. 13.

punktweise bestimmten Kurven sind in Fig. 13, 14 und 15 für drei Versuche wiedergegeben worden. Die Darstellungsweise ist die gleiche wie im theoretischen Schaubild Figur 12 und jeder Laststufe P entspricht eine Gerade G , während den Selbstspannungszuständen die Gerade G' zugeordnet ist.

Im Rahmen des ersten Versuches (Figur 13) wurde die Belastung des statisch unbestimmten Systems vorerst auf $P = 5,55$ t, d. i. bis zum Erreichen der oberen Streckgrenze im Stabe gesteigert und hierauf wieder abgebaut; im Zuge der neuen Belastung konnte die „obere“ Streckgrenze mit Rücksicht auf ihre Labilität nicht mehr erreicht werden¹⁸⁾. Die Last wurde nunmehr der Reihe nach auf $P = 5,70$, $6,00$, $7,00$, $8,15$ und $9,10$ t erhöht. Die oberen Äste der Kurve $\Delta = \varphi(X)$ beschreiben hierbei die Formänderungslinie des statischen Zugversuches und die Spannungen $\frac{X}{F} = \frac{X}{2,01}$ t/cm² des Stabes gelangen tief in den Verfestigungsbereich. Die Schleifenbreite nimmt nach jeder Laststeigerung zu und da der Bauschinger Effekt bei den abwärts und

¹⁷⁾ Der Korrekturbeiwert „ k “ schwankt nach Beginn des Fließens in der Meßstrecke zwischen 8,5 und 11 %; innerhalb des elastischen Bereiches, der auch bei den Entlastungen zur Geltung kommt, beträgt er 22,6 %.

¹⁸⁾ Vgl. dazu die Diskussion in der Z. V. d. I., 1928, S. 1859 und K. MEMMLER und K. LAUTE, Mitteilungen d. d. Materialprüfungsanstalten, Sonderheft XV, 1931, S. 60.

aufwärts führenden Schleifenästen angenähert im gleichen Maße zur Geltung kommt, wird der Zuwachs an bleibender Dehnung unter der vorher schon erreichten Laststufe nur sehr klein. Nach Ausbildung des Selbstspannungszustandes XII wurde das System durch 21 Tage unbelastet gelassen. Die Gesamtdehnung Δ_{XII} des Stabes nahm während dieser Ruhepause (unter Berücksichtigung der Temperaturwirkung) auf den Wert Δ_{XII}' ab und da auch die Elastizitätsgrenze des Stabmaterials im Zuge der Alterung eine Hebung erfuhr, ergab sich bei der neuerlichen Belastung mit $P = 9,1$ t ein Gleichgewichtszustand XIII, dem ein kleinerer Dehnungswert als dem vorher ausgebildeten Gleichgewichtszustand XI zugeordnet ist. Die Gesamtdehnung Δ_{XI} konnte hier auch nach mehreren Lastwechseln nicht erreicht werden.

Beim 2. Versuch (Figur 14) wurde die Belastung des statisch unbestimmten Systems in einem Zuge bis auf $P = 8,0$ t gesteigert, so daß der

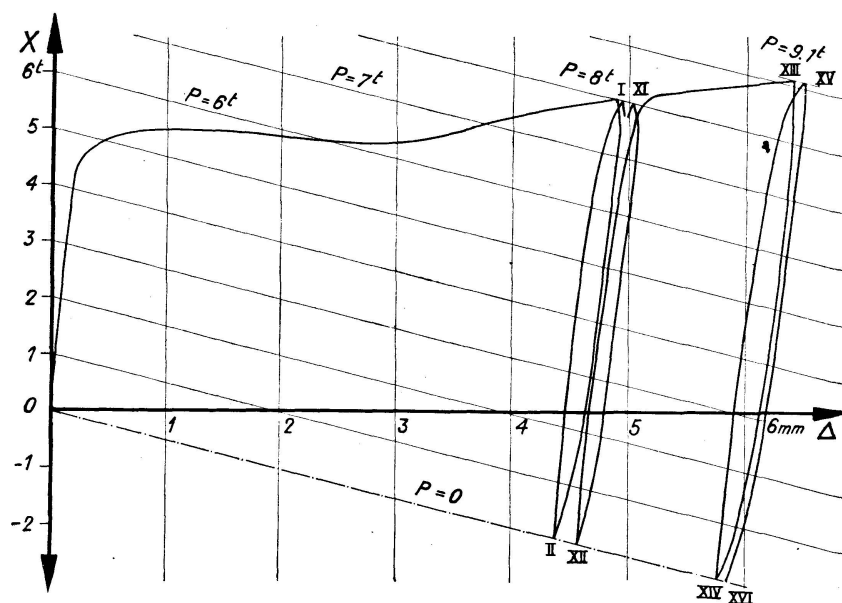


Fig. 14.

überzählige Stab eine starke plastische Dehnung erfährt. Hierauf wurde entlastet und nun sechsmal dieser Lastwechsel vollzogen. Wir sehen, daß die bleibenden Dehnungen nur geringfügig zunehmen, da der Bauschinger Effekt bei der Be- und Entlastung nahezu in gleichem Maße zur Geltung kommt. Die in der Mitte (bei $P = 4,0$ t) gemessene Schleifenbreite betrug bei diesen sechs Lastwechseln der Reihe nach 0,1777, 0,1176, 0,1070, 0,1010, 0,0973 und 0,1218 mm; die Konvergenz wird durch das letzte Messungsergebnis gestört. Die Belastung wurde dann auf $P = 9,1$ t erhöht und hier ein Lastwechsel durchgeführt, durch den die bleibende Dehnung gleichfalls nur geringfügig vermehrt wurde.

Während die Zeit für die Durchführung eines Lastwechsels bei den ersten beiden Versuchen mit Rücksicht auf die vielen erforderlichen Ablesungen 3 bis 5 Minuten betrug, wurde beim 3. Versuch (Figur 15) die Versuchsgeschwindigkeit nach Möglichkeit erhöht, um eine Annäherung an Überlastungen dynamischer Natur zu erzielen. Es wurde daher die Dehnungsmessung nur an den Schleifenspitzen und in der Schleifenmitte durchgeführt, wodurch die Versuchsgeschwindigkeit auf rund 30 Sekunden pro Lastwechsel gesteigert werden konnte. Für die Laststufe wurde $P = 6,5$ t gewählt, so

daß der überzählige Stab an das Ende des Fließbereiches gelangt. Die Schleifenbreite nahm bei den zwölf in rascher Folge durchgeführten Lastwechseln im allgemeinen ab (sie betrug der Reihe nach 0,0725, 0,0575, 0,0534, 0,0495, 0,0490, 0,0534, 0,0435, 0,0448, 0,0454, 0,0447, 0,0450 und 0,0508 mm), doch wird auch hier die Konvergenz gestört. Nach Erhöhung der Last auf $P = 9 \text{ t}$ und zwei weiteren Lastwechseln wurde der Selbstspannungszustand XXX erreicht. Nun sollte festgestellt werden, wie sich das System bei wiederholter Einwirkung kleinerer Lasten verhält und es wurden daher zwölf Lastwechsel mit $P = 4,0 \text{ t}$ durchgeführt, für das sich nach der üblichen Berechnung (d. h. aus der Elastizitätsgleichung für den Anfangszustand) angenähert $\frac{X}{F} = \sigma_P$ ergeben würde. Wie wir aus Figur 15 entnehmen, pendelt die Stabkraft X bei diesen Lastwechseln zwischen den Grenzen $X = -2,94$ und $+0,97 \text{ t}$ hin und her, der Stab wird also durch die Ein-

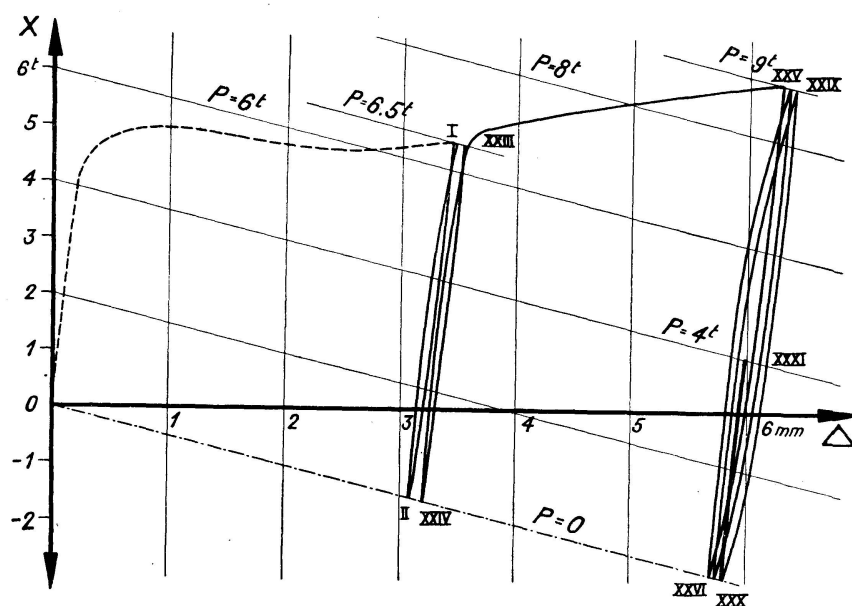


Fig. 15.

wirkung der vorhandenen großen Restspannungen nunmehr vornehmlich gedrückt. Die einzelnen Schleifen fallen hier mit großer Annäherung in einer Geraden zusammen, der Formänderungszustand ist praktisch stationär (die bleibenden Dehnungen nahmen bei diesen zwölf Wechseln sogar um 0,015 mm ab). Die starke Überlastung des Systems hat somit außer einer großen bleibenden Verformung auch die Verwandlung des Zugstabes in einen vorwiegend gedrückten Stab zur Folge und diese Änderung der Beanspruchungsweise wird ebenso wie die vorangegangene Überlastung des Stabes von Einfluß auf die Dauerfestigkeit sein.

Zusammenfassung.

Im Abschnitt A wird der Einfluß, den das Verhalten gedrückter und bis über die Knickgrenze belasteter Baustahlstäbe auf das Tragverhalten eines einfach statisch unbestimmten Fachwerks nimmt, theoretisch untersucht und das gefundene Ergebnis durch sorgfältig durchgeführte Versuche bestätigt.

Wird bei einem gedrückten Baustahlstab üblichen Schlankheitsgrades der Knickzustand erreicht, dann sinkt der vom Stab ausgeübte achsiale Widerstand im Zuge der eintretenden Ausbiegung stark herunter (Figur 2) und die Kurve, die den Zusammenhang zwischen diesem Widerstand und der gegenseitigen Annäherung der beiden Stabenden festlegt, zeigt den in Figur 3 a gezeichneten Verlauf. Wenn nun der Stab einem statisch unbestimmten Fachwerk als statisch überzähliger Stab angehört und durch eine Überlastung des Systems an die Knickgrenze gelangt, bewirkt dieser Widerstandsabfall eine starke Mehrbelastung des „Grundsystems“, das den überzähligen Stab stützt. Ist das Grundsystem einer derartigen Mehrbelastung nicht gewachsen, dann ist das Tragvermögen des statisch unbestimmten Fachwerks in dem Augenblick erschöpft, in dem der überzählige Stab den Knickzustand erreicht. Ist hingegen das stützende Grundsystem so kräftig ausgeführt, daß es die große Mehrbelastung übernehmen kann, dann wird ein neuer Gleichgewichtszustand ausgebildet und das Fachwerk ist einer weiteren Belastungssteigerung bis zur Traggrenze des „stützenden Grundsystems“ fähig; die Bemessung auf „zulässige Inanspruchnahme“ führt in derartigen Fällen auf eine größere Bestandsicherheit, als für statisch bestimmte Systeme gefordert wird. Die theoretisch erhaltenen Ergebnisse wurden durch Versuche, bei deren Durchführung die Fachwerkskonstruktion des „stützenden Grundsystems“ durch einen geeichten Stahlbügel (Figur 5 a) ersetzt wurde, voll bestätigt (Fig. 6 und 7).

Der Abschnitt B enthält eine theoretisch exakte Untersuchung einer über drei gleiche Felder durchlaufenden Stütze aus Baustahl, in deren Mittelfeld eine Druckkraft exzentrisch angreift (Figur 8 a). Der Baustahl ist hierbei durch seine Formänderungskurve gegeben und für den Stabquerschnitt wird ein Rechteck $F = b \cdot h$ vorausgesetzt. Als Beispiel wird in Figur 11 der Verlauf jener Schlankheitsgrade L/i dargestellt, die die Stütze besitzen muß, wenn sie die Druckkraft $P = 1500 \cdot F$ kg bei verschiedenen Werten der anwachsenden Ausbiegung im Gleichgewichte halten soll. Die Kurven weisen ausgeprägte Maxima auf, die den „kritischen“ Gleichgewichtszuständen unmittelbar vor dem Zusammenbruch zugeordnet sind. Es zeigt sich, daß der Zusammenbruch dieses statisch unbestimmten Tragwerks grundsätzlich schon einsetzen kann, bevor noch die größte Spannung im Seitenfeld an die Proportionalitätsgrenze gelangt und die größte Pressung im Mittelfeld die Quetschgrenze erreicht.

Im Abschnitt C wird das Tragverhalten eines einfach statisch unbestimmten Fachwerks bei wiederholter Überlastung eines überzähligen Zugstabes theoretisch und experimentell untersucht. Bei rasch aufeinander folgenden Lastwechseln findet, wie schon GRÜNING festgestellt hat, im Zuge des Anwachsens der bleibenden Dehnung eine fortschreitende Entlastung des überlasteten Stabes statt. Diese Entlastung, mit der ein Ansteigen der im Stabe auftretenden Restspannungen verknüpft ist, wird in der Regel noch vor Erreichen des „elastischen“ Bereiches beendet, da sich durch Schließen der Hysteresisschleife ein stationärer Formänderungszustand ausbildet. Durch die in den Selbstspannungszuständen auftretenden großen Restspannungen wird die Beanspruchungsweise des Stabes verändert und der Mittelwert der Spannungsgrenzen herabgesetzt. Dem günstigen Einfluß, den diese Verminderung der „statischen Vorspannung“ auf die weitere Dauerfestigkeit des Stabes ausübt, steht die ungünstige Beeinflussung durch die vorangegangene Überlastung entgegen.

Résumé.

Dans la partie A de la présente étude, l'auteur étudie théoriquement l'influence qu'exerce le comportement de barres en acier de construction soumises à une compression et chargées jusqu'au-dessus de la limite de flambage sur la capacité de charge d'une charpente en treillis simplement statiquement indéterminée. Ses recherches sont d'ailleurs confirmées par des essais extrêmement poussées. Lorsque dans une barre en acier de construction, présentant un degré de finesse courant et soumise à une compression, l'état de flambage se trouve atteint, la résistance axiale exercée par cette barre diminue considérablement au fur et à mesure de son fléchissement (figure 2) et la courbe qui traduit la relation entre cette résistance et l'importance du rapprochement entre les deux extrémités de la barre présente l'allure qu'indique la figure 3 a.

Si la barre considérée appartient à une charpente en treillis statiquement indéterminée, à titre d'élément statiquement surabondant et si cette barre se trouve amenée à l'état de flambage par suite d'une surcharge de ce système, la chute de résistance qui en résulte intervient alors sous la même forme qu'une forte surcharge du système qui soutient cette barre. Si ce système n'est pas lui-même en mesure de subir une telle surcharge, il en résulte une chute immédiate de la capacité de charge du système statiquement indéterminé, au moment même où la barre surabondante atteint l'état de flambage. Si, par contre, le système de base sur lequel s'appuie la barre est assez robuste pour supporter cette forte augmentation de charge, on arrive à un nouvel état d'équilibre et la charpente elle-même est susceptible de se prêter à une nouvelle augmentation de la charge jusqu'à ce que l'on ait atteint la limite de capacité du système de base sur lequel s'appuie la barre considérée. La détermination des contraintes admissibles conduit, en pareil cas, à un degré de sécurité effectif plus élevé que ne l'exigent les systèmes statiquement déterminés.

Les résultats déterminés par des voies théoriques ont été entièrement confirmés par des essais (figures 6 et 7), pour l'exécution desquels on a remplacé la construction en treillis pour le système de base servant d'appui par un étrier métallique dont on connaissait les caractéristiques de résistance (figure 5).

La partie B expose les résultats d'une étude théorique rigoureuse portant sur une poutre d'appui continue, intéressant trois panneaux ou travées égales, la travée médiane étant soumise à un effort de compression excentré (figure 8 a). L'acier de construction employé est caractérisé par son diagramme de déformation et on admet que la section de la barre est un rectangle de section $F = b \cdot h$. A titre d'exemple, on a représenté sur la figure 11 les degrés divers d'élancement L/i que doit posséder l'élément pour pouvoir équilibrer l'effort de compression $P = 1500 F$ kg pour différentes valeurs croissantes du fléchissement. Ces courbes accusent des maxima très marqués, auxquels correspondent les états d'équilibre „critiques“ qui précèdent immédiatement la rupture. On constate que, en principe, la rupture de ce système statiquement indéterminé peut se produire avant même que la contrainte maxima sur le panneau latéral ait atteint la limite de proportionnalité et que la compression la plus forte dans le panneau médian ait atteint la limite de compression.

Dans la partie C, l'auteur étudie théoriquement et expérimentalement le comportement d'un système une fois statiquement indéterminé sous l'in-

fluence d'une surcharge répétée appliquée à une barre tendue surabondante. Lorsque les alternances de la charge se produisent à une cadence rapide, et ainsi que GRÜNING l'a déjà montré, il se produit une décharge progressive de la barre surchargée au fur et à mesure de l'apparition de l'allongement permanent. Cette décharge, qui s'accompagne d'une augmentation de l'importance des contraintes rémanentes dans la barre, prend fin, en règle générale, avant même que l'on arrive à la zone élastique, car par suite de la fermeture de la boucle hystérétique, il prend naissance un état de déformation stationnaire. Le régime de contrainte de la barre se trouve modifié par les contraintes rémanentes importantes et la valeur moyenne des limites des efforts admissibles se trouve réduite. L'influence défavorable de la surcharge se trouve opposée à l'influence favorable que cette réduction de „contrainte statique préliminaire“ exerce sur la résistance ultérieure de la barre à la fatigue.

Summary.

In section A, a theoretical investigation is made on the influence of the behaviour of structural steel members, which are under compression and loaded up to and over the buckling limit, on the carrying capacity of a simply statically indeterminate lattice-work; the result obtained is confirmed by carefully conducted tests. When a structural steel member of the usual degree of slenderness is under compression and reaches the buckling limit, the axial resistance exerted by the member falls greatly in consequence of the bending (fig. 2), and the curve determining the connection between this resistance and the mutual approach of the two ends of the member, runs as indicated in fig. 3a. If now the member forms part of a statically indeterminate lattice-work as a statically superfluous member, and reaches the buckling limit owing to an overloading of the system, this reduction in resistance causes a considerably increased loading of the "main system" by which the superfluous member is supported. If the main system is not capable of withstanding such an increased loading, the carrying capacity of the statically indeterminate framework is exhausted at the moment when the superfluous member reaches the buckling stage. On the other hand, if the supporting main system is made so strong that it can stand the increased loading, a new condition of equilibrium will then be formed and the framework is capable of standing a further increase in load up to the carrying limit of the "supporting main system"; in such cases, choosing the dimensions in accordance with "admissible stressing" leads to a greater certainty of stability than is required for statically determinate systems. The results obtained theoretically were fully confirmed by tests (figs. 6 and 7). When carrying out these tests the framework structure of the "supporting main system" was replaced by a calibrated steel yoke (fig. 5a).

Section B contains a theoretically accurate investigation of a structural steel member, passing through three equal bays and eccentrically loaded by pressure applied in the middle bay (fig. 8a). The structural steel is defined by its tension-extension diagram, and for a cross-section of the member a rectangle $F = b \cdot h$ is assumed. As an example, in fig. 11 the run of the curve of the degree of slenderness L/i is shown which the member must have if it is to keep the pressure force $P = 1500 \text{ F kg}$ in equilibrium for various values of the increasing bending. The curves show pronounced maxima, which are associated with the "critical" state of equilibrium imme-

diately before collapse. It is seen that the collapse of this statically indeterminate supporting structure may in principle start before the greatest stress in the side bay has reached the limit of proportionality and before the greatest pressure in the middle bay comes to the squeezing limit.

In section C, the behaviour of a simply statically indeterminate frame work with repeated overloading of a superfluous tension member is investigated theoretically and experimentally. When the changes in load occur rapidly after each other, a progressive reduction in tension in the overloaded member takes place in connection with the increase of the permanent elongation, as has already been determined by GRÜNING. This reduction in tension, with which an increase of the residual stresses occurring in the member is connected, has as a rule already terminated before the elastic zone is reached, since a permanent condition of change of shape is formed by closing the hysteresis loop. Through the great residual stresses occurring in the self-stressing stages, the manner in which the member is stressed is changed, and the average value of the stress limits is reduced. This reduction of the "static pre-stressing" of the member has a favourable effect on its subsequent fatigue strength, but against that has to be set the unfavourable effect of the previous overloading.