

Zeitschrift: IABSE publications = Mémoires AIPC = IVBH Abhandlungen
Band: 2 (1933-1934)

Artikel: Die Berechnung zylindrischer, biegungssteifer Schalen unter beliebigem Lastangriff
Autor: Gruber, Ernst
DOI: <https://doi.org/10.5169/seals-3401>

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. [Mehr erfahren](#)

Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. [En savoir plus](#)

Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. [Find out more](#)

Download PDF: 27.07.2025

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>

DIE BERECHNUNG ZYLINDRISCHER, BIEGUNGSSTEIFER SCHALEN UNTER BELIEBIGEM LASTANGRIFF.

**CALCUL DES VOÛTES CYLINDRIQUES MINCES RIGIDES,
SOLLICITÉES PAR DES CHARGES QUELCONQUES.**

**ANALYSIS OF STIFF CYLINDRICAL SHELLS UNDER ANY
DIRECTION OF LOAD.**

Dr. Ing. ERNST GRUBER, Wien.

A. Einleitung.

Im neuzeitlichen Industriebau werden hohe Schornsteine, Kühltürme, Tonnendächer u. s. w. sehr häufig als dünnwandige Schalen ausgeführt. Meines Wissens werden solche Konstruktionen immer nur als gerade Stäbe mit ebener Spannungsverteilung berechnet. Diese Annahme ist für dickwandige Schalen in hohem Maße zutreffend. Für dünnwandige Schalen ist jedoch, wie in dieser Arbeit gezeigt werden wird, die Verteilung der Normalspannungen über den Querschnitt krummlinig und von der Art des Lastangriffes abhängig. Außerdem sind die durch die Verformungen der ringförmigen Querschnitte bedingten Biegemomente M schon so groß, daß sie bei der Bemessung berücksichtigt werden müssen. Da seit der Erfindung der gleitenden Schalung diese Bauten fast nie konisch, sondern immer nur zylindrisch mit konstanter Wandstärke ausgeführt werden, hat sich der Verfasser nur mit der Berechnung der zylindrischen Schalen befaßt. In der Folge wird deren Theorie bekannt gegeben¹⁾.

B. Die zylindrischen Schalen.

Da die biegungssteife Schale im Gegensatz zur Membrane statisch unbestimmt ist, sind wir schon für die Spannungsberechnung genötigt, auf die Formänderungen des Tragwerkes einzugehen. So wie in der Plattentheorie nehmen wir hiebei auch hier an, daß eine zur Achsfläche senkrecht stehende Strecke $d' - d''$ während der Verformung gerade und senkrecht zur Achsfläche bleibt (siehe Abb. 2). Es ist also durch die Verzerrung der letzteren der Verformungszustand der gesamten Schale bestimmt. Da es sich um ein räumliches Problem handelt, benötigen wir zur Beschreibung des Verschiebungszustandes der Achsfläche drei Parameter. Zweckmäßig wählen wir diese folgendermaßen:

1. eine horizontale, radiale Verschiebung r ,
2. eine horizontale, tangentielle Verschiebung t ,
3. eine lotrechte, achsparallele Verschiebung s .

¹⁾ Die Theorie der Tonnendächer wurde von Finsterwalder eingehend behandelt (siehe „Abhandlungen“ der Intern. Vereinigung für Brückenbau u. Hochbau, Bd. 1, 1932).

Es wird also ein beliebiges Bogenelement $R \cdot d\varphi$ eines Querschnittes nach der Verformung die Lage Δ einnehmen (siehe Abb. 1). Nehmen wir an, daß dabei $R \cdot d\varphi$ seine Länge beibehält, so ergibt sich aus dem Viereck 1 2 3 4

$$r + \frac{\partial t}{\partial \varphi} = 0 \quad 1)$$

$$\psi = \frac{1}{R} \cdot \left(\frac{\partial r}{\partial \varphi} - t \right) \quad 2)$$

wobei ψ der Winkel ist, um welchen sich das Element $R \cdot d\varphi$ um eine achsparallele Gerade dreht. Einige einfache differentialgeometrische Über-

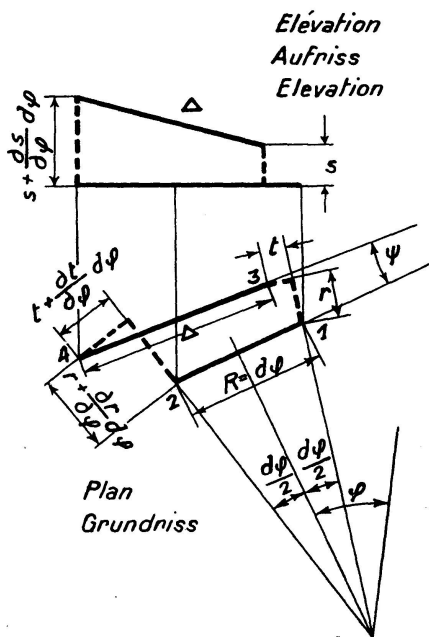


Fig. 1.

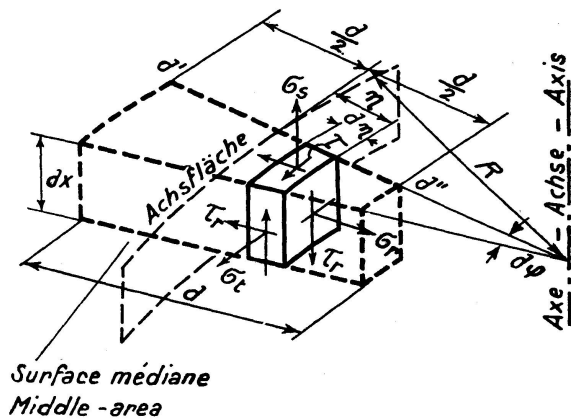


Fig. 2.

legungen liefern uns nun die für die folgende Rechnung nötigen Verformungsgrößen der Achsfläche:

1. die bezogene Dehnung einer Zylindererzeugenden

$$\epsilon_x = \frac{\partial s}{\partial x} \quad 3)$$

2. die Krümmungsänderung des Querschnittes

$$\frac{1}{R} \cdot \left(\frac{\partial^2 r}{\partial \varphi^2} - \frac{\partial t}{\partial \varphi} \right) \quad 4)$$

3. die Änderung des rechten Winkels, den die Zylindererzeugende mit einer Querschnittstangente einschließt

$$\gamma = \frac{1}{R} \cdot \frac{\partial s}{\partial \varphi} + \frac{\partial t}{\partial x} \quad 5)$$

Weiters ergibt sich für eine zur Achsfläche im Abstände η konzentrisch liegende Zylinderfläche (siehe Abb. 2) die der oberen Winkeländerung γ entsprechende Winkeländerung γ_η zu

$$\gamma_{\eta} = \frac{\partial s}{\partial \varphi} \cdot \frac{1}{R} + \frac{\partial t}{\partial x} - \left[\left(\frac{\partial^2 r}{\partial \varphi \cdot \partial r} - \frac{\partial t}{\partial x} \right) \frac{1}{R} - \frac{\partial^2 r}{\partial x \partial \varphi} \right] \eta \quad (6)$$

Um über das auftretende Kräftespiel Klarheit zu gewinnen, wurde in Abb. 2 ein Volumselement mit den daran angreifenden Spannungen dargestellt. So wie wir beim geraden Stab die zur Stabachse senkrecht stehenden Normalspannungen wegen ihrer Kleinheit vernachlässigen, werden wir auch hier die zur Achsfläche normalen Spannungen σ_r als unbedeutend unterdrücken. Eine weitere Vereinfachung ergibt sich, wenn wir wie in der Plattentheorie die längs der Strecke $d' - d''$ liegenden Elemente in eines zusammenfassen. Es ergibt sich so das in Abb. 3 dargestellte Volumselement von der

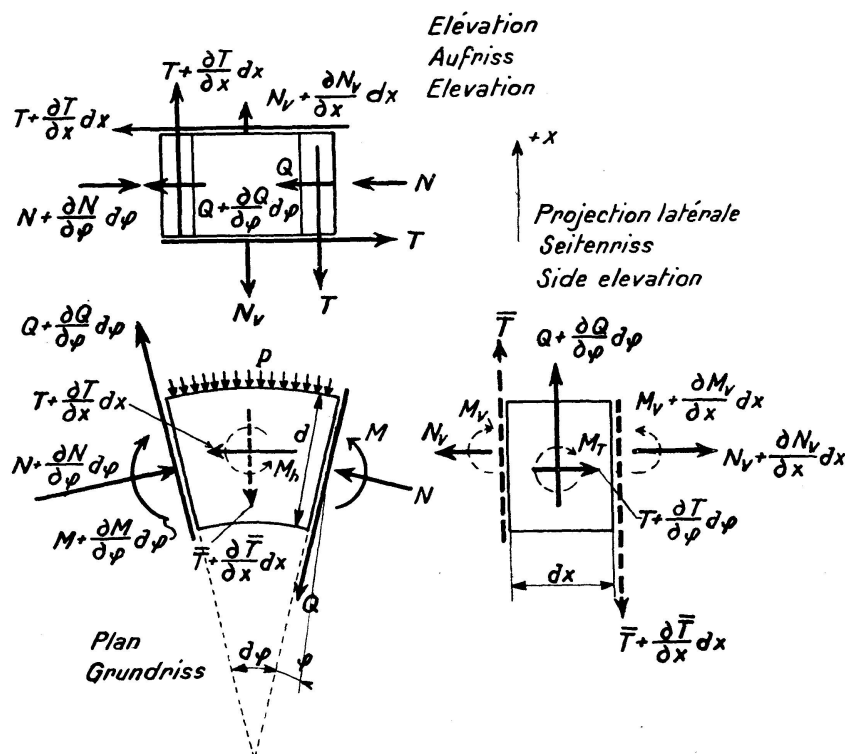


Fig. 3.

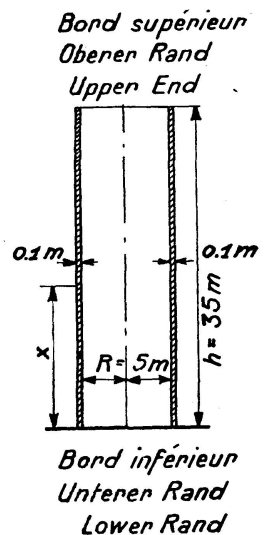


Fig. 4.

endlichen Dicke d . Bei diesem Vorgang werden die in Abb. 2 dargestellten Spannungen σ und τ längs der Schalendicke summiert. Führen wir diese Integrationen durch, so gelangen wir zu den in Abb. 3 dargestellten endlichen Querschnittskräften M , Q , N_v , T , M_h , M_v , N , M_T und $\bar{T}$. Ist nun die Länge der Schale gegenüber deren Durchmesser groß, so werden sich die Erzeugenden bedeutend weniger verkrümmen als die Querschnitte, so daß wir M_v gegenüber M vernachlässigen können. Handelt es sich außerdem um dünnwandige Schalen, so kann man in Gl. 6) das zweite Glied gegenüber dem ersten Glied unterdrücken. Die durch die Winkeländerung γ (siehe Gl. 5) bedingten Schubspannungen τ werden daher längs der Schalendicke d näherungsweise konstant sein. Es ist also $M_h = 0$ und $M_T = 0$. Hiermit ergibt sich aus der Momentengleichung um die Querschnittstangente auch die Schubkraft $\bar{T} = 0$. Es bleiben also an einem Volumselement nur die in Abb. 3 mit vollen Linien dargestellten Querschnittskräfte übrig.

Da diese mit den äußeren Lasten im Gleichgewicht stehen müssen, folgen daraus die Gleichgewichtsbedingungen

$$\frac{1}{R} \cdot \frac{\partial M}{\partial \varphi} + Q = 0 \quad 7)$$

$$\frac{\partial N_v}{\partial x} + \frac{1}{R} \cdot \frac{\partial T}{\partial \varphi} = 0 \quad 8)$$

$$p \cdot R + N - \frac{\partial Q}{\partial \varphi} = 0 \quad 9)$$

$$R \cdot \frac{\partial T}{\partial x} + \frac{\partial N}{\partial \varphi} = 0 \quad 10)$$

welche sich durch Elimination der Größen Q und N zu

$$R \cdot \frac{\partial p}{\partial \varphi} - \frac{\partial T}{\partial x} \cdot R + \frac{1}{R} \cdot \frac{\partial^3 M}{\partial \varphi^3} = 0 \quad 11)$$

$$\frac{\partial N_v}{\partial x} + \frac{1}{R} \cdot \frac{\partial T}{\partial \varphi} = 0 \quad 12)$$

vereinfachen lassen.

Wir wollen nun die Querschnittskräfte T , N_v und M durch die Verschiebungskomponenten s , t und r ausdrücken. Erinnern wir uns, daß die Bogenlänge $R \cdot d\varphi$ ihre Länge beibehalten soll, so erhalten wir nach den Regeln der Dehnungslehre

$$N_v = \frac{m^2}{m^2 - 1} \cdot E \cdot d \cdot \frac{\partial s}{dx} \quad 12a)$$

$$T = G \cdot d \cdot \left(\frac{ds}{\partial \varphi} \cdot \frac{1}{R} + \frac{\partial t}{\partial x} \right) \quad 13)$$

$$M = \frac{E d^3}{12 R^2} \cdot \frac{m^2}{m^2 - 1} \cdot \left(\frac{\partial^2 r}{\partial \varphi^2} - \frac{\partial t}{\partial \varphi} \right) = - \frac{E d^3}{12 R^2} \cdot \frac{m^2}{m^2 - 1} \left(\frac{\partial^3 t}{\partial \varphi^3} + \frac{\partial t}{\partial \varphi} \right) \quad 14)$$

Setzen wir diese Werte in Gl. 11) und Gl. 12) ein, so erhalten wir nach einigen Umformungen die Beziehungen

$$\frac{m^2}{m^2 - 1} \cdot R^2 \cdot d \cdot E \cdot \frac{\partial^3 s}{\partial x^3} - \frac{m^2}{m^2 - 1} \cdot \frac{E d^3}{12 R^3} \cdot \frac{\partial^5}{\partial \varphi^5} \left(\frac{\partial^2 t}{\partial \varphi^2} + t \right) + R \cdot \frac{\partial^2 p}{\partial \varphi^2} = 0 \quad 15)$$

$$\frac{2m}{m-1} \cdot R \cdot \frac{\partial^2 s}{\partial x^2} + \frac{1}{R} \cdot \frac{\partial^2 s}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2 t}{\partial x \partial \varphi} = 0 \quad 16)$$

in welchen wir mit Gl. 1) drei simultane, partielle, lineare, nicht homogene Differentialgleichungen dritter Ordnung zur Bestimmung der Unbekannten r , s und t gefunden haben. Unser nächstes Ziel ist nun die Integration des obigen Systems. Zunächst lösen wir diese Aufgabe für den Fall, daß die Belastungsfunktionen die Form

$$p = f(x) \cdot \Phi(\varphi) = f(x) \cdot \sum_0^\infty C_n \cdot \cos n\varphi \quad 17)$$

besitzen, wobei der Summenausdruck die Fourier'sche Reihenentwicklung für $\Phi(\varphi)$ sein soll. Für einen Windangriff stellt z. B. in Gl. 17) $f(x)$ die Windstärke in ihrer Abhängigkeit von der Bodenentfernung x dar, während $\Phi(\varphi)$ das Gesetz ist, nach welchem der Wind längs der Rundung der Schale abgleitet. Lautet für die Partialbelastung $p_n = C_n \cdot f(x) \cdot \cos n\varphi$ die Lösung des Systems schematisch Ω_n , so ergibt sich nach dem Überlagerungsgesetz der Baustatik die Lösung für die Gesamtlast

$$p = f(x) \cdot \sum_0^{\infty} C_n \cdot \cos n\varphi$$

zu

$$\sum_0^{\infty} \Omega_n.$$

Für

$$p_n = C_n \cdot f(x) \cdot \cos n\varphi$$

läßt sich aber eine alle Randbedingungen befriedigende Lösung in der Form

$$s = y'(x) \cdot \cos n\varphi \quad (18)$$

darstellen, wobei die noch unbekannte Funktion $y(x)$ so gewählt werden muß, daß die Differentialgleichungen 15 und 16 erfüllt werden. In diesem Sinne ergibt sich zunächst aus Gl. 16) unter Bedachtnahme auf Gl. 18)

$$t = \left[-\frac{2m}{m-1} \cdot \frac{R}{n} \cdot y''(x) + \frac{n}{R} y(x) \right] \cdot \sin n\varphi. \quad (19)$$

Substituiert man Gl. 18) und Gl. 19) in Gl. 15), so erhalten wir

$$y^{IV} - \frac{2m}{m-1} \cdot n^4(n^2-1) \cdot \frac{d^2}{12R^4} y'' + n^6(n^2-1) \frac{d^2}{12R^6} y - \frac{m^2-1}{m^2} \cdot \frac{n^2 C_n}{Ed \cdot R} f(x) = 0 \quad (20)$$

in welcher man die Bestimmungsgleichung für $y(x)$ erkennt. Das allgemeine Integral derselben lautet für $f(x) \equiv \omega$

$$y = \bar{C}_1 \operatorname{Cof} \beta x + \bar{C}_2 \operatorname{Sin} \beta x + \bar{C}_3 \operatorname{Cof} \gamma x + \bar{C}_4 \operatorname{Sin} \gamma x + \\ + \frac{m^2-1}{m^2} \cdot \frac{C_n \cdot R^2 \omega}{E z^3 n^4 (n^2-1)} \quad (21)$$

wenn

$$\beta^2 = \frac{m z \cdot n^3}{12(m-1)R^2} \left\{ (n^2-1)n \cdot z \pm \sqrt{(n^2-1) \left[n^2(n^2-1)z^2 - 12 \left(\frac{m-1}{m} \right)^2 \right]} \right\} \\ z = \frac{d}{R} \quad (22)$$

bedeutet. Da der Beiwert von y positiv ist, müssen entweder β^2 und γ^2 gleichzeitig reell und gleich bezeichnet, oder gleichzeitig konjugiert komplex sein. Daraus folgt, daß entweder alle vier Wurzeln von Gl. 22) reell oder alle vier Wurzeln konjugiert komplex sind.

Während nun die bisherigen Gleichungen für jede zylindrische Schale mit konstanter Wandstärke gültig sind, ist es nicht möglich, die Integrationskonstanten $\bar{C}_1$, $\bar{C}_2$, $\bar{C}_3$ und $\bar{C}_4$ der Gl. 21) für alle Schalen gemeinsam anzugeben. Um die für die Bestimmung obiger Konstanten nötigen Randbedingungen zu erhalten, muß man auf den statischen Charakter des jeweils vorliegenden Tragwerkes eingehen. Wir wollen dies für eine unter Windangriff stehende lotrechte, unten eingespannte Kragsschale vorführen (siehe Abb. 4). Für eine solche ergibt sich

$$t = 0; \quad s = 0 \quad \text{für} \quad x = 0 \quad (23)$$

$$T = 0; \quad N_v = 0 \quad \text{„} \quad x = h \quad (24)$$

Diese Gleichungen lassen sich unter Zuhilfenahme von Gl. 12), 18) und 19) umformen in

$$y'(0) = 0 \quad (25)$$

$$y''(h) = 0 \quad (26)$$

$$e \cdot y''(0) = y(0) \quad (27)$$

$$y'''(h) = 0 \quad (28)$$

$$\varrho = \frac{2m}{m-1} \cdot \frac{R^2}{n^2} \quad (29)$$

womit wir die vier Randbedingungen unserer Aufgabe gefunden haben. Führt man nun die Auflösung der Gl. 25) bis 28) im Detail durch, so ergeben sich für den Fall der komplexen Wurzeln der Gl. 22) und für $f(x) \equiv \omega$ die Integrationskonstanten in der umgebildeten Form:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} U_1^{(n)} &= E_n \cdot \cos^2 \varphi_n + 1 - \mathfrak{Cof}(2N_n h \cos \varphi_n); \quad U_3^{(n)} = (E_n + 4) \sin 2\varphi_n \\ U_2^{(n)} &= F_n \cdot \sin 2\varphi_n; \quad U_4^{(n)} = -2F_n \cdot \cos^2 \varphi_n \end{aligned} \quad (30)$$

wobei

$$E_n = \mathfrak{Cof}(2N_n h \cdot \cos \varphi_n) - \cos(2N_n \cdot h \cdot \sin \varphi_n) - 8 \cdot \sin^2 \varphi_n \quad (31)$$

$$F_n = \operatorname{tg} \varphi_n \cdot \mathfrak{Sin}(2N_n \cos \varphi_n) + \sin(2N_n \cdot \sin \varphi_n) \quad (32)$$

$$\beta_n = A_n + B_n i = N_n (\cos \varphi_n + i \sin \varphi_n) \quad (\text{siehe Gl. 22}) \quad (33)$$

bedeutet. β ist hierbei die erste Wurzel von β^2 . Mit diesen Werten erhalten wir weiters die Funktion $y(x)$ mit ihren ersten drei Ableitungen

$$\begin{aligned} y_n^{(\nu)} &= \frac{k_n}{2D_n} \cdot \left[\cos B_n x \cdot \mathfrak{Cof} A_n x \left(U_3^{(n)} + \frac{1}{2} \cos(\nu+1)\pi \cdot \cos \nu \varphi + U_7^{(n)} + \frac{1}{2} \cos(\nu+1)\pi \sin \nu \varphi \right) \right. \\ &\quad + \cos B_n x \cdot \mathfrak{Sin} A_n x \left(U_3^{(n)} + \frac{1}{2} \cos \nu \pi \cdot \cos \nu \varphi + U_7^{(n)} + \frac{1}{2} \cos \nu \pi \sin \nu \varphi \right) \\ &\quad + \sin B_n x \cdot \mathfrak{Sin} A_n x \left(U_7^{(n)} + \frac{1}{2} \cos(\nu+1)\pi \cdot \cos \nu \varphi - U_3^{(n)} + \frac{1}{2} \cos(\nu+1)\pi \sin \nu \varphi \right) \\ &\quad + \sin B_n x \cdot \mathfrak{Cof} A_n x \left(U_7^{(n)} + \frac{1}{2} \cos(\nu+1)\pi \cdot \cos \nu \varphi - U_3^{(n)} + \frac{1}{2} \cos \nu \pi \sin \nu \varphi \right) \Big] \\ &\quad + \frac{d^\nu}{dx^\nu} (k_n) \quad \nu = 0, 1, 2, 3, \end{aligned} \quad (34)$$

wobei

$$\begin{aligned} D_n &= N_n^2 \varrho_n \cos 2\varphi_n - \cos 4\varphi_n - \cos^2 \varphi_n (N_n^2 \varrho_n - 1) \cdot \cos(2N_n \cdot h \cdot \sin \varphi_n) + \\ &\quad + \sin^2 \varphi_n \cdot (N_n^2 \varrho + 1) \cdot \mathfrak{Cof}(2N_n \cdot h \cdot \cos \varphi_n) \end{aligned} \quad (35)$$

$$k_n = \frac{12(m^2 - 1) \cdot C_n \cdot R^2 \omega}{m^2 \cdot E \cdot \chi^3 n^4 (n^2 - 1)} \quad (36)$$

bedeutet.

Mit Hilfe der Gl. 1), 8), 12 a), 13), 14) und 19) erhalten wir mit den obigen Werten die Spannungen und Formänderungen des Tragwerkes in der Form

$$\sigma = C_1 \frac{h^2 \omega}{d \cdot R} \left(\frac{\xi^2}{2} - \xi + \frac{1}{2} \right) \cos \varphi + \frac{m^2}{m^2 - 1} \cdot E \sum_2^\infty y_n''(x) \cdot \cos n \varphi \quad (37)$$

$$\tau = C_1 \frac{h \omega}{d} (1 - \xi) \cdot \sin \varphi - \frac{R m^2}{m^2 - 1} \cdot E \sum_2^\infty \frac{1}{n} \cdot y_n'''(x) \cdot \sin n \varphi \quad (38)$$

$$M = \frac{E m^2 \cdot d \cdot \chi^2}{12(m^2 - 1)} \cdot \sum_2^\infty n(n^2 - 1) \left[-\frac{2m}{m-1} \cdot \frac{R}{n} y_n''(x) + \frac{n}{R} y_n(x) \right] \cos n \varphi \quad (39)$$

$$s = \frac{m^2 - 1}{m^2} \cdot C_1 \frac{\omega \cdot h^3 \xi}{2E d \cdot R} \left(\frac{\xi^2}{3} - \xi + 1 \right) \cos \varphi + \sum_2^\infty y_n'(x) \cdot \cos n \varphi \quad (40)$$

$$r = -\frac{m^2-1}{m^2} \cdot \frac{\omega \cdot h^2}{Ed \cdot R^2} C_1 \left[-\frac{2m}{m-1} \cdot R^2 \left(\frac{\xi^2}{2} - \xi + \frac{1}{2} \right) + h^2 \left(\frac{\xi^4}{24} - \frac{\xi^3}{6} + \frac{\xi^2}{4} + \frac{m}{m-1} \cdot \frac{R^2}{h^2} \right) \right] \cdot \cos \varphi$$

$$- \sum_2^\infty n \left[-\frac{2m}{m-1} \cdot \frac{R}{n} y_n''(x) + \frac{n}{R} y_n(x) \right] \cos n \varphi \quad (41)$$

$$t = \frac{m^2-1}{m^2} \cdot \frac{\omega h^2}{Ed \cdot R^2} C_1 \left[-\frac{2m}{m-1} R^2 \left(\frac{\xi^2}{2} - \xi + \frac{1}{2} \right) + h^2 \left(\frac{\xi^4}{24} - \frac{\xi^3}{6} + \frac{\xi^2}{4} + \frac{m}{m-1} \cdot \frac{R^2}{h^2} \right) \right] \cdot \sin \varphi$$

$$+ \sum_2^\infty \left[-\frac{2m}{m-1} \cdot \frac{R}{n} y_n''(x) + \frac{n}{R} y_n(x) \right] \sin n \varphi \quad (42)$$

Ist in Gl. 35) das Glied mit dem hyperbolischen Cosinus gegenüber den anderen Gliedern groß, so ergibt sich die Funktion $y(x)$ mit ihren Ableitungen in sehr guter Näherung ohne vorherige Bestimmung der Konstanten $U_v^{(n)}$ zu

$$y_n^{(\nu)} = (-1)^{\nu+1} \cdot \frac{k_n N_n^\nu}{\sin \varphi_n (N_n^2 \varrho_n + 1)} \cdot e^{-A_n x} \cdot \sin [B_n x + (1 - \nu) \varphi_n] +$$

$$\nu = 0, 1, 2, 3 \quad + \frac{d^\nu}{dx^\nu} \cdot (k_n) \quad (43)$$

Für den sehr selten vorkommenden Fall reeller Wurzeln ergeben sich die Integrationskonstanten zu

$$\bar{C}_3 = \frac{k_n \beta_n}{G_n} \left[(\beta_n - \gamma_n) \mathfrak{Cof} (\gamma_n + \beta_n) h - (\beta_n + \gamma_n) \mathfrak{Cof} (\gamma_n - \beta_n) h + \frac{2 \beta_n^2}{\gamma_n} \right]$$

$$\bar{C}_4 = -\frac{k_n \cdot \beta_n}{G_n} \left[(\beta_n - \gamma_n) \cdot \mathfrak{Sin} (\gamma_n + \beta_n) h - (\gamma_n + \beta_n) \mathfrak{Sin} (\gamma_n - \beta_n) h \right] \quad (44)$$

$$\bar{C}_1 = \frac{k_n}{\beta_n^2 \varrho_n - 1} - \bar{C}_3 \frac{\gamma_n^2 \varrho_n - 1}{\beta_n^2 \varrho_n - 1} \quad \bar{C}_2 = -\frac{\gamma_n}{\beta_n} \bar{C}_4$$

wobei

$$G_n = 2 \beta_n \gamma_n \varrho_n (\gamma_n^2 + \beta_n^2) - \frac{2 (\gamma_n^4 + \beta_n^4)}{\beta_n \gamma_n} - (\beta_n + \gamma_n)^2 (\gamma_n \beta_n \varrho_n - 1) \mathfrak{Cof} (\beta_n - \gamma_n) h -$$

$$- (\beta_n - \gamma_n)^2 (\gamma_n \beta_n \varrho_n + 1) \cdot \mathfrak{Cof} (\beta_n + \gamma_n) h \quad (44)$$

ist.

Es ist selbstverständlich, daß man nach dieser hier vorgeführten Methode jede wie immer geartete zylindrische Schale berechnen kann, indem man für jeden einzelnen Fall die nötigen Randbedingungen berücksichtigt.

C. Praktische Anwendung.

Wir wollen die Berechnung eines Kühlturmes unter Windangriff ziffernmäßig durchführen. Die Abmessungen des Tragwerkes sind aus vorstehender Abb. 4 ersichtlich. Nehmen wir die Windlast nach der österreichischen Verordnung an, so lautet die Funktion $\Phi(\varphi)$

$$\Phi(\varphi) = 0; \text{ für } x = 0 \text{ bis } \frac{\pi}{2} \text{ und } x = \frac{3}{2} \pi \text{ bis } 2\pi$$

$$\Phi(\varphi) = \cos^2 \varphi \text{ für } x = \frac{\pi}{2} \text{ bis } \frac{3}{2} \pi.$$

Gemäß Gl. 17) haben wir $\Phi(\varphi)$ in eine Fourier'sche Reihe zu entwickeln und erhalten für die Koeffizienten derselben²⁾

$$C_1 = -\frac{4}{3\pi}; \quad C_2 = +\frac{1}{4}; \quad C_3 = -\frac{4}{15\pi}; \quad C_4 = 0; \quad C_5 = \frac{4}{105\pi} \dots$$

Für die Berechnung des Gliedes $n = 2$ benützen wir die exakten Ausdrücke Gl. 30)–36). Es ergibt sich zunächst aus Gl. 22)

$$\beta_2 = N_2(\cos \varphi_2 + i \sin \varphi_2) = 0,05657 (0,71413 + 0,700006 i)$$

$$D_2 = 4,86570$$

$$U_1^{(2)} = -9,36134; \quad U_2^{(2)} = +8,61739$$

$$U_3^{(2)} = +9,49617; \quad U_4^{(2)} = -8,793108.$$

Für die weiteren Glieder unserer Lösung genügen die Näherungswerte Gl. 43). Es ergibt sich zunächst

$$\text{für } n = 3 \quad \beta_3 = 0,1328 (0,7242 + 0,6896 i) \quad \varrho_3 = 5,55556$$

$$\text{für } n = 4 \quad \text{kommt nicht in Frage da } C_4 = 0$$

$$\text{für } n = 5 \quad \beta_5 = 0,3701 (0,7576 + 0,6528 i) \quad \varrho_5 = 2,00000$$

Mit diesen Werten findet man nach Gl. 43) die Funktion $y(x)$ mit ihren Ableitungen, woraus man mit den Gl. 37)–42) die Spannungen und Form-

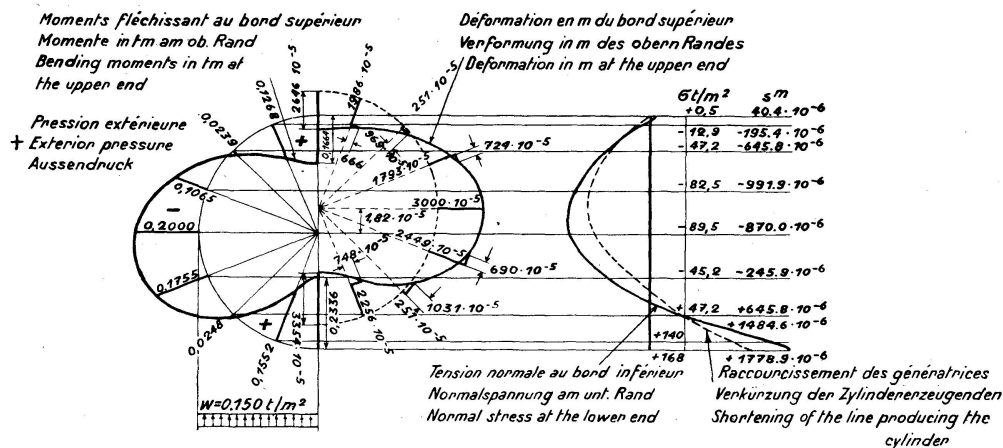


Fig. 5.

änderungen in jedem Punkte des Tragwerkes berechnen kann. Wir wollen jedoch hier nur die maximalen Werte derselben angeben. Es ergibt sich mit $\omega = 0,150 \text{ t/m}^2$ für den unteren Einspannungsrand

$$\sigma = -78 \cos \varphi + 90 \cos 2\varphi - 11,8 \cos 3\varphi + 0,488 \cos 5\varphi + \dots \text{ t/m}^2$$

$$\tau = -22,2 \sin \varphi + 16,7 \sin 2\varphi - 0,294 \sin 3\varphi \dots$$

und für den oberen freien Rand

$$M = 0,200 \cos 2\varphi - 0,0354 \cos 3\varphi + 0,00182 \cos 5\varphi \dots \text{ tm}$$

$$s = -\frac{910}{E} \cos \varphi + \frac{870}{E} \cos 2\varphi + \frac{1,14}{E} \cos 3\varphi \dots \text{ Meter}$$

²⁾ Der Koeffizient C_0 spielt bei dieser Aufgabe keine Rolle, da dieses Glied einer gleichförmigen radial gerichteten Gleichlast entspricht, welche entsprechend der Annahme S. 197 keine Spannungen zur Folge hat.

$$t = -\frac{18,2}{E} \sin \varphi + \frac{10000}{E} \sin 2 \varphi - \frac{443}{E} \sin 3 \varphi \dots \text{Meter}$$

$$r = +\frac{18,2}{E} \cos \varphi - \frac{30000}{E} \cos 2 \varphi + \frac{3540}{E} \cos 3 \varphi \dots \text{Meter}$$

Diese Ergebnisse sind der besseren Übersicht halber in Abb. 5 zur Darstellung gebracht. Man sieht, daß die genauen Resultate von der üblichen Rechnungsweise mit ebener Spannungsverteilung erheblich abweichen. Wird jedoch das Verhältnis der Schalendicke zum Radius größer, so nähern sich die Ergebnisse ungemein rasch der linearen Spannungsverteilung. Der Verfasser rechnete dasselbe Beispiel für $d = 0,1$ m, $R = 1,00$ m, $h = 35$ m durch und fand für diesen Fall die Abweichung von der linearen Spannungsverteilung zu $\sim 0,5$ %. Zum Schlusse sei noch erwähnt, daß die Rechnungen in der Regel mit einem vierstelligen Rechenschieber durchgeführt werden können.

Zusammenfassung.

Im neuzeitlichen Industriebau werden hohe Schornsteine, Kühltürme usw. sehr häufig als dünnwandige Schalen ausgeführt. Solche Bauwerke wurden bisher immer als gerade Stäbe mit ebener Spannungsverteilung berechnet. Diese Annahme ist für dickwandige Schalen in hohem Maße zutreffend. Für dünnwandige Schalen ist jedoch, wie in dieser Arbeit gezeigt wird, die Verteilung der Normalspannungen über den Querschnitt krummlinig und von der Art des Lastangriffes abhängig. Außerdem sind die durch die Verformung der ringförmigen Querschnitte auftretenden Biegemomente schon so groß, daß sie bei der Bemessung des Tragwerkes schon berücksichtigt werden müssen. Im Abschnitt B wird nun für die zylindrischen biegesteifen Schalen eine Theorie entwickelt, welche auf den Annahmen der bekannten KIRCHHOFF'schen Plattentheorie aufgebaut ist. Indem man die Spannungen durch die Verschiebungskomponenten der Achsfläche ausdrückt, gelangt man zu den Bestimmungsgleichungen des Problems. Sie ergeben sich als 3 simultane, lineare, nicht-homogene partielle Differentialgleichungen 7ter Ordnung, deren allgemeines Integral sich in Form einer Fourier'schen Reihe leicht angeben läßt.

Mit Hilfe dieser allgemeinen Lösung werden nun für den Sonderfall eines unten eingespannten Schornsteines gebrauchsfertige Berechnungsformeln abgeleitet. Zum Schlusse wird ein solches Tragwerk ziffernmäßig durchgerechnet. Es zeigt sich dabei, daß die eingangs erwähnten Behauptungen richtig sind.

Résumé.

L'industrie emploie depuis un certain temps des cheminées et des tours de refroidissement de grande hauteur, qui sont très fréquemment conçues comme ouvrage à parois minces. Ces ouvrages ont toujours été calculés, jusqu'à maintenant, comme des éléments rectilignes avec répartition uniforme des efforts. Cette hypothèse est exacte, dans une large mesure, en ce qui concerne les ouvrages à parois épaisses; toutefois, ainsi que le montre la présente étude, dans les ouvrages à parois minces, la répartition des contraintes normales sur la section présente une allure incurvée et dépend du

mode d'application de la charge. En outre, les moments fléchissants qui se manifestent sous l'influence de la déformation de la section annulaire sont assez élevés pour qu'il soit nécessaire de les faire intervenir dans le calcul du système porteur.

Dans le chapitre B, l'auteur expose une théorie concernant les parois minces cylindriques rigides, théorie qui est basée sur les hypothèses de la théorie des dalles, bien connue, de KIRCHHOFF. En exprimant les contraintes au moyen des composantes de déformation de la section médiane, on arrive aux équations de détermination du problème. Elles se présentent sous la forme de 3 équations différentielles partielles du septième ordre, simultanées, linéaires, non homogènes, dont l'intégrale générale peut être obtenue facilement sous la forme d'une série de Fourier.

A l'aide de cette solution générale, l'auteur étudie des formules de calcul pratique, dans le cas particulier d'une cheminée encastrée à sa base. Il termine par le calcul complet d'un système porteur analogue, calcul qui met en évidence l'exactitude des considérations exposées au début de l'étude.

Summary.

Structures such as tall chimneys, cooling towers, etc. for industrial purposes, are very often designed as thin-walled shells. Such structures have hitherto always been calculated as straight bars with uniform distribution of the stresses. This assumption is to a large extent correct for thick-walled shells. But in the case of thin-walled shells, as is shown in this paper, the distribution of the normal stresses over the cross-section is curvilinear and depends on the way in which the load acts. In addition, the bending moments induced by the deformation of the annular cross-sections are so great that they must be taken into consideration when the dimensions of the structure are being calculated. In Section B, a theory is developed for cylindrical shells resistant to bending; this theory is based on the assumptions of the well-known KIRCHHOFF slab theory. The stresses are expressed through the components of the displacement of the axial surfaces, and in this way the equations determining the problem are obtained. They are three simultaneous, linear, non-homogeneous partial differential equations of the 7th order, whose general integral can easily be obtained in the form of a FOURIER'S series.

With the help of this general solution serviceable formulae are derived for calculating the special case of a chimney rigidly fixed at the bottom. Finally, such a supporting structure is calculated numerically. It is thereby demonstrated that the assumptions made at the start are correct.