Zeitschrift: IABSE publications = Mémoires AIPC = IVBH Abhandlungen
Band: 2 (1933-1934)

Artikel: Die Wirkung der Gelenkreibung bei Bogenbrücken
Autor: Hawranek, Alfred
DOI: https://doi.org/10.5169/seals-3404

Nutzungsbedingungen
Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Mehr erfahren

Conditions d'utilisation
L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. En savoir plus

Terms of use
The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. Find out more

Download PDF: 23.07.2025

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, https://www.e-periodica.ch

DIE WIRKUNG DER GELENKREIBUNG BEI BOGENBRÜCKEN.

L'EFFET DU FROTTEMENT DANS LES ARTICULATIONS DES PONTS EN ARC.

THE EFFECT OF HINGE-FRICTION IN ARCH-BRIDGES.

Dr. Ing. ALFRED HAWRANEK, o. ö. Prof. der Deutschen Techn. Hochschule in Brünn. Č. S. R.

In Europa werden in letzter Zeit selbst für große Spannweiten von Bogenbrücken entweder Punkt-Lager mit zwei Kugelkalotten verwendet, oder zylindrische Wälzlager. Selbst der Entwurf „aus einem Guß" der Brückenbauanstalt Friedrich Krupp A. G., Alfredhütte, Rheinhausen für die Rheinbrücke Köln-Mülheim, einer Bogenbrücke von 333,2 m Stüztweite, wies Wälzlager auf. Andere Entwürfe des gleichen Wettbewerbes hatten jedoch Bolzenlager mit an den Zylinderflächen anliegenden Lagerschalen. Auch die Hell Gate-Brücke in New York mit 300 m Stützweite hat Wälzlager. Bei den in jüngster Zeit fertiggestellten Bogenbrücken Kill van Kull in New York und bei der Sydney Hafenbrücke mit Spannweiten von über 500 m sind hingegen ringsum berührende zylindrische Bolzenlager verwendet worden.

Es ist deshalb notwendig, die Frage der Reibung solcher Lager und die dadurch bedingten Nebenspannungen im Tragwerk zu untersuchen. Bei der Anwendung solcher Lager hat man bei bedeutenden Ausführungen besondere Sorgfalt walten lassen.

Beim Ausdrehen der Lagerschalen zeigen sich nämlich oft Auslösungen von Gußspannungen, welche selbst bei guter Arbeit ein nicht ganz sattes Anliegen der Schalen an den Bolzen verursachen und damit die Größe der rechnungsmäßigen Beanspruchungen ändern können, ohne daß es möglich ist, festzustellen, wie groß diese Änderungen sind.

Um dies zu umgehen, hat man die Lagerschalen für große Brücken aus einem viel größeren Stahlblock herausgearbeitet, der oft zweimal so groß war als die entsprechende Lagerschale, so daß man auf diese Weise eine weitere Auslösung der Gußspannungen verhinderte, weil der Kern des Blockes zur Verwendung kam.

Unter diesen Voraussetzungen ist die Anwendung solcher Bolzengelenke in Stahlgußbettung für große Spannweiten tunlich.

Die Bolzen erhalten dann kleinere Durchmesser als bei Wälzgelenken, erzeugen aber bei großen Brücken starke Reibungsmomente, weil die gleitende Reibung (Zapfenreibung) bei den Formänderungen des Bogens zur Wirkung kommt.

Beispielsweise errechnet sich für die Sydney-Hafenbrücke das Reibungsmoment für den größten Stützendruck von 19200 t und eine Reibungsziffer von 0,15 mit 529,92 tm (Bolzenlänge 417 cm, Durchmesser 36,8 cm, Reibungskraft 2880 t), also ein äußerst hoher Wert.

Und selbst bei einem Entwurf des Verfassers für eine zweigeschossige Bogenbrücke über den Dnjepr in Alexandrowsk mit 224 m Stützweite, wobei allerdings Wälzgelenke vorgesehen waren, rechnet sich für ein Bolzengelenk bei einem größten Stützendruck von 5032 t das Reibungsmoment mit 105 tm (Bolzenlänge 1,45 m, Durchmesser 27,8 cm, Reibungskraft 754,8 t).

Diese Reibungsmomente erzeugen bei statisch bestimmten wie statisch unbestimmten Bogenträgern sowohl bei der Belastung, wie auch bei der Wärmewirkung Zusatzspannungen. Außerdem treten sie auch bei der Montage auf.

Verfasser hat wiederholt bei Belastungsproben und bei oft tage- und nächtelangen Beobachtungen und Messungen von Bogenbrücken bei reiner Wärmewirkung die Erfahrung gemacht, daß die Lager auf einmal eine kleine Drehung erfahren, was plötzlichen Spannungswechsel und eigenartiges Klang-Geräusch des Tragwerkes zur Folge hat. Bei Beobachtung der Formänderung der Bogen bei reiner Wärmewirkung hat sich dies im Laufe des Tages vielfach wiederholt, auch in der Nacht, wo die Abkühlung eingetreten ist. Das gleiche zeigte sich in erhöhtem Maße, als an einem heißen Augusttag plötzlich ein Wolkenbruch mit Hagel niederging und eine starke Abkühlung des Tragwerkes eintrat. Diese Erscheinung hat sich auch bei Punktlagern gezeigt. Sie ist auf kleine Reckungen bei den Anschlüssen und Stößen des Tragwerkes selbst, aber vornehmlich auf die Lagerreibung zurückzuführen.

Bei den Wälzlagern oder Punktlagern tritt auch ein Bewegungswiderstand auf; er ist aber wesentlich kleiner und infolge dessen auch die im Tragwerke auftretenden Spannungen.

Praktisch sind die besprochenen Widerstände bei den Wälzlagern aber nicht von Bedeutung, weil die Wirkung auf die Zusatzbeanspruchungen im Tragwerk gewiß klein ist. Die Untersuchung des Tragwerkes in diesem Falle wäre übrigens ganz ähnlich durchzuführen wie bei jener der Wirkung von Bolzenlagern; es soll hier nicht weiter darauf eingegangen werden.

1. Reibungszahlen für Gelenkbolzenlager.

Für die Beurteilung der Größe der Zusatzspannungen infolge der Gelenkreibung ist die Kenntnis der Reibungszahlen maßgebend. Im folgenden sollen nur die Stahllager berücksichtigt werden.

Für Bolzenlager mit völlig umschließenden Lagerschalen kommt die gleitende Reibung in Frage.

Nach FÖRSTERS Taschenbuch für Bauingenieure ist für Drücke bis etwa 100 kg/cm² bei Reibung von Stahl auf Stahl die Reibungszahl $\mu = 0{,}15$ und zwar für den trockenen Zustand der Lagerteile; für geschmierte Lager 0,12 bis 0,11. Diese Ziffern gelten als Reibungszahl der Ruhe, jene der Bewegung ist 0,09 bei einer Geschwindigkeit von $v = 3{,}0$ m/sec.; sie sinkt also etwas nach eingeleiteter Bewegung. Gewiß steigt aber die Reibungsziffer mit noch steigendem Druck. Darüber sind für Zapfenreibung soweit bekannt, keine Versuche vorliegend. Versuche [1]) haben für einen Stahlzapfen von 70 mm Durchmesser und einen Meter Länge in Stahlgußschalen nachstehende Reibungsziffern ergeben.

Zapfen	sehr gut geschmiert	$\mu = 0{,}08$—$0{,}087$
„	minder gut geschmiert	$\mu = 0{,}12$—$0{,}13$
„	vollständig trocken	$\mu = 0{,}17$—$0{,}18$.

[1]) Annales des ponts et chaussées 1899. 3. Trim. S. 107.

In Amerika wurde für bewegliche Brücken mit horizontalem Zapfen bei gut geschmierten Lagern eine Reibungsziffer $\mu = 0{,}12$ angenommen und $\mu = 0{,}18$ für den Beginn der Bewegung. Versuche [2]) haben gezeigt, daß die Reibungsziffer für die Bewegung 0,133 betrug.

Wir wollen im folgenden $\mu = 0{,}15$ beibehalten, weil dies gewiß dem späteren Zustand selbst eines anfänglich gut geschmierten Gelenkbolzens entsprechen dürfte. Übrigens wären Versuche über die Reibungszahlen mit Brückengelenken sehr erwünscht.

2. *Verhalten der Tragwerke.*

Bei der fortschreitenden Belastung einer Brücke werden die beiden Kämpferdrücke von Zwei- oder Dreigelenkbogen im allgemeinen nicht gleich sein. Es wird also die Lagerreibung nicht gleichzeitig überwunden. Auch für das Scheitelgelenk gilt dies. Wir haben es also bei beweglichen Lasten mit einer hintereinander folgenden Auslösung der Reibungsmomente im Allgemeinen zu tun. Bevor die Reibung in irgend einem Gelenke überwunden wird, wirkt das Tragwerk als eingespannter Bogen. Die Kämpfer- bezw. Scheiteldrücke gehen nicht durch den Bolzenmittelpunkt. Im weiteren Verlauf schaltet sich ein oder das andere Gelenk, dessen Reibung überwunden ist, ein, aber wieder nur vorübergehend, so daß mit dem ruckweisen Nachgeben der Gelenke sich auch plötzliche Spannungsänderungen im Tragwerke ergeben. Sie können zusätzlich, aber auch vermindernd sein.

Einfacher ist die Wärmewirkung zu untersuchen, da für eine gleichmäßige Wärmezu- oder Abnahme bei symmetrischen Bogen die Kämpfergelenke in gleicher Weise arbeiten.

Im allgemeinen sind die Drehungen in den Gelenken klein; man kann deshalb annehmen, daß die erforderliche Drehung bei jedem Ruck völlig in die neue Lage erfolgt, umsomehr, als der Reibungswiderstand der Bewegung kleiner ist, als jener der Ruhe. Es soll also für die erste Berechnung keine Bremsung bei der Drehung angenommen werden.

Zur Einleitung der Drehung ist nicht nur die Überwindung des Reibungsmomentes maßgebend, es ist die Arbeit des ganzen Tragwerkes zu berücksichtigen, die sich ergibt, wenn die Biegelinie des Tragwerkes aus einem Zustand (etwa eingespannter Bogen) in einen anderen (etwa Zweigelenkbogen) übergeht, da diese Biegelinien für einen Belastungs- oder Wärmezustand verschieden sind.

Bei der Ermittlung der Zusatzspannungen sei vorausgesetzt, daß das Tragwerk vor der zu untersuchenden hinzukommenden Belastung mit reibungslosen Gelenken, also ohne Vorspannung wirke.

Ferner wird angenommen, daß das Tragwerk symmetrisch sei.

I. Wärmewirkung.

Wir bezeichnen den Stützendruck, den Horizontalschub und den Kämpferdruck für eine symmetrische Belastung (Eigengewicht, bezw. Vollbelastung)

im eingespannten Bogen mit	mit	A, H, K,
„ Eingelenkbogen (Scheitelgelenk)	„	A_1, H_1, K_1,
„ Zweigelenkbogen	„	A_2, H_2, K_2,
„ Dreigelenkbogen	„	A_3, H_3, K_3.

Es soll eine gleichmäßige Wärmezu- bezw. Abnahme untersucht werden.

[2]) Engineering News Record 1929/II S. 343.

Der Horizontalschub für 1° Wärmezunahme sei für die verschiedenen Bogenarten mit H_t, H_{t1}, H_{t2}, H_{t3}, bezeichnet.

Im Nachfolgenden sollen die Einzelvorgänge im Bogen bei einer Wärmezunahme analysiert werden.

1. Zweigelenkbogen.

Der Halbmesser des Kämpfergelenkes sei r, der Kämpferdruck für eine gegebene symmetrische Belastung (Eigengewicht oder Vollast) K_2, die Reibungskraft dort $\mu.K_2$ und das Reibungsmoment $\mu.rK_2$.

Der Bogen wirkt vorerst bei der Wärmezunahme (oder Abnahme) als eingespannter Bogen (K, A, H) und erfährt bei einer Wärmezunahme von 1° C den Horizontalschub H_t im Abstand h von der Kämpfersehne. Es sei gleich bemerkt, daß dieses h nicht immer in der für sonst eingespannte Bogen üblichen Entfernung von etwa $^2/_3\, f$ von der Kämpfersehne angreift, weil die Bogenquerschnitte in Kämpfernähe für den gegebenen Zweigelenkbogen viel schwächer sind; es rückt also die Lage des elastischen Schwerpunktes, in dem der Horizontalschub für Wärmeänderungen angreift, etwas näher zur Kämpfersehne.

Für eine Wärmezunahme von t° C wird das Kämpfermoment

$$M_K = t \cdot H_t \cdot h \qquad 1)$$

und das Reibungsmoment im Kämpfer

$$M_{rK} = \mu \cdot [(H + t \cdot H_t)^2 + A^2]^{\frac{1}{2}} \cdot r \qquad 2)$$

Um die Temperatur t zu erhalten, die erforderlich ist, um das Reibungsmoment zu überwinden, muß

$$M_K = M_{rK} \text{ sein, oder}$$

$$t^2 \cdot h^2 \cdot H_t^2 = \mu^2 r^2 [(H + t \cdot H_t)^2 + A^2]$$

oder

$$t^2 - \frac{2 H \mu^2 r^2}{H_t \cdot (h^2 - \mu^2 r^2)} \cdot t = \frac{\mu^2 r^2 K^2}{H_t^2 (h^2 - \mu^2 r^2)}$$

setzt man

$$\frac{h^2}{\mu^2 \cdot r^2} = c \qquad 3)$$

und dividiert Zähler und Nenner des zweiten und dritten Gliedes durch $\mu^2 r^2$, so wird

$$t^2 - \frac{2 H}{H_t \cdot (c - 1)} \cdot t = \frac{K^2}{H_t^2 (c - 1)} \qquad 4)$$

woraus das t gerechnet werden kann.

Für große Bogen ist der Zuwachs des Horizontalschubes bei Wärmewirkung gegenüber jenem der Belastung gering, es kann das Reibungsmoment

$M_{rK} \doteq \mu \cdot r \cdot K$ gesetzt werden, so daß einfacher

$$t = \frac{\mu \cdot K \cdot r}{H_t \cdot h} \qquad 5)$$

Nach der Wärmezunahme um t° erfolgt also die erste Bewegung im Gelenk, der Horizontalschub H_t ändert sich in H_{t2} und greift im Kämpfer an. Auch der Kämpferdruck ist infolge des hinzutretenden H_{t2} größer geworden. Deshalb wird die bis zum nächsten Ruck im Gelenk neuerlich hinzukommende Wärmezunahme

$$t_2 > t.$$

Die für den ersten Ruck erforderliche Wärmezunahme t wird für eine vollbelastete Brücke größer als für die unbelastete.

Die ungünstigste Beanspruchung des Bogens im Scheitel ist entweder

$$M_s = t \cdot H_t (f - h) \text{ oder} \qquad 6)$$

$$M'_s = t \cdot H_{t_2} \cdot f \qquad 7)$$

Ausgewertete Beispiele für flache und steile Bogen haben gezeigt, daß $M_s > M'_s$, weil der Horizontalschub für den eingespannten Zustand (H) drei bis sechs mal so groß ist als im Zweigelenkbogen (H_2) und $h < {}^2/_3 f$. Deshalb ist für das Scheitelzusatzmoment infolge Gelenkreibung bei der Wärmezunahme der Zustand des eingespannten Bogens maßgebend.

Dieses Zusatzmoment kommt zu dem Moment ungünstigsten Falls hinzu, das sich aus der Berechnung des Zweigelenkbogens für die gesamte zu berücksichtigende Wärmezunahme ($T = +35\,^0$ C) ergibt, und zwar sowohl im Scheitel, als auch in den anderen Bogenpunkten. Bei einer Wärmeabnahme vermindern sich die Hauptwärmemomente um den gleichen Betrag. Die Zahl n der einzelnen ruckweisen Bewegungen in den Gelenken ergibt sich näherungsweise aus

$$n = \frac{T}{t} \qquad 8)$$

Das größte Moment im Scheitel wird einschließlich der Gelenkreibungswirkung

$$\max M = (T - t) \cdot H_{t_2} + M_s \qquad 8a)$$

2. *Dreigelenkbogen.*

Die Gelenkbolzenhalbmesser sind im Kämpfer r, im Scheitel r_1. Für die gegebene symmetrische Belastung des Dreigelenkbogens bezeichnet H_3 den Horizontalschub, K_3 den Kämpferdruck und A_3 den Stützendruck, dann ist

die Reibungskraft	im Kämpfer	μK_3,	im Scheitel	μH_3
das Reibungsmoment	„ „	$\mu r K_3$,	„ „	$\mu r_1 H_3$

gewöhnlich wird $\mu r_1 H_3 < \mu r K_3$ oder $r_1 H_3 < r K_3$, deshalb wird die Reibung im Scheitelgelenk bei einer Wärmeänderung früher überwunden sein als im Kämpfergelenk. Vom Beginne der Wärmewirkung an wirkt der Dreigelenkbogen als eingespannter Bogen. Ist für den eingespannten Bogen H_t der Horizontalschub infolge einer Wärmeänderung um $1\,^0$ C und greift dieser im Abstande h von der Kämpfersehne an, so ist für eine Wärmezunahme um $t\,^0$ C, das Scheitelmoment

$$M_s = t \cdot H_t (f - h) \quad \text{und das Reibungsmoment im Scheitel} \qquad 9)$$

$$M_{rs} = \mu (H_3 + t \cdot H_t) r_1 \qquad 10)$$

Die Reibungswirkung wird durch die Wärmewirkung gerade überwunden, wenn $M_s = M_{rs}$, woraus sich die hierzu erforderliche Wärmezunahme t mit

$$t = \frac{\mu \cdot H_3 \cdot r_1}{H_t [(f - h) - \mu r_1]} \qquad 11)$$

ergibt.

Ist die erforderliche Drehung im Scheitel vollzogen, so verwandelt sich der Bogen zunächst in einen Eingelenkbogen, ändert den Horizontalschub der Wärme in H_{t_1} (für $1\,^0$ C), der nun im Scheitel angreift. Diese Änderung

hält solange an, als sich die Wärme nicht steigert. In diesem Augenblick ist das Wärmemoment im Kämpfer

$$M_{K_1} = t \cdot H_{t_1} \cdot f \qquad 12)$$

das Reibungsmoment im Kämpfer ist

$$M_{rK} = \mu r K_1' \qquad 13)$$

wobei

$$K_1' = [A_3^2 + (H_3 + t \cdot H_{t_1})^2]^{\frac{1}{2}} \qquad 14)$$

Ist nun $M_{K1} > M_{rK}$, so tritt die Drehung im Kämpfergelenk ein. Ist $M_{K1} < M_{rK}$, so arbeitet der Bogen bei weiterer Wärmezunahme wieder als eingespannter Bogen. Es wiederholt sich der Vorgang der Drehung des Scheitelgelenkes eventuell mehrere male (n-mal) bei weiter zunehmender Wärme bis

$$n \cdot M_{K_1} > M_{rK}$$

wird und nun auch das Kämpfergelenk nachgibt.

Wenn man vorerst von der mittlerweile eingetretenen Zunahme der Kämpferreaktion und damit des Reibungsmomentes bei zunehmender Wärmeänderung absieht, so läßt sich die Zahl n der Bewegungen im Scheitelgelenk, die hintereinander auftreten, bevor sich das Kämpfergelenk rührt, näherungsweise angeben. Man erhält

$$n = \frac{M_{rK}}{M_{K_1}} \qquad 15)$$

und die erforderliche Temperaturzunahme hierzu mit $n \cdot t$.

Dieses Kriterium der Drehung der Kämpfergelenke für die Wärmezunahme von $n \cdot t^0$ reicht aber nicht allein aus. Es kommt noch das Kämpfermoment des eingespannten Bogens M_k knapp vor der Drehung des Scheitelgelenkes in Frage.

$$M_K = t \cdot H_t \cdot h \qquad 16)$$

Solange $M_k < M_{rk}$, tritt die Drehung im Kämpfer nicht ein. Erst wenn $n_1 \cdot M_k = M_{rk}$, oder n_1 mal ein Ruck im Scheitelgelenk erfolgt

$$n_1 = \frac{M_{rk}}{M_k} \qquad 17)$$

n_1 ist gegenüber n maßgebend, wenn $n_1 <$ als n und die nötige Wärmezunahme beträgt $n_1 \cdot t$.

II. Bewegliche Lasten.

1. Fortschreitende stetige Lasten p.

Um das Verhalten der Kämpfergelenke am Zweigelenkbogen bei fortschreitender stetiger Belastung p, die etwa von links auf die Brücke auffährt, und nach und nach die Brücke voll belastet, zu verfolgen, ist nachstehender Weg möglich. Voraussetzung ist wieder, daß der Bogen, bevor die stetige Last auf die Brücke auffährt, für das Eigengewicht als Zweigelenkbogen wirkt, der Kämpferdruck sei hierbei K_g. Für die hinzukommende Last p wirkt das Tragwerk anfänglich als eingespannter Bogen mit den bezüglichen Kämpfermomenten M_A bezw. M_B und den Kämpferdrücken K_A, K_B, diese stetige Last sei hierbei bis zur Abszisse x vorgefahren. K_A und K_B lassen sich aus den Einflußlinien für H und A bezw. B durch Ermittlung der bezüglichen Flächen rechnen, ebenso M_A und M_B aus der Einflußlinie für das Kämpfermoment. Diese Werte können als Ordinaten zur Abszisse x aufgetra-

gen werden, bis zu welcher die Last vorgefahren ist und geben Summen-Einflußlinien. Die auf diese Weise entstandenen M_A bezw. M_B-Linien lassen sich heranziehen, um die Abszissen x_1 bezw. x'_1 zu finden, denen eine jeweilige Gelenkverdrehung entspricht. Die M_A-Linie ist von der Abszissenachse

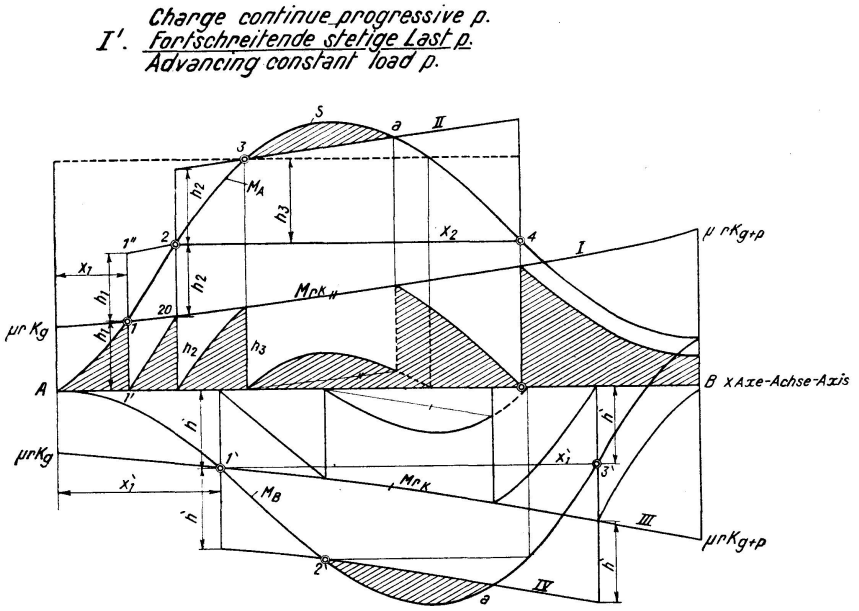

Fig. 1.

nach oben, die M_B-Linie nach unten aufgetragen (Abb. 1). Eine Gelenkdrehung erfolgt, wenn entweder $M_{rk} = M_A$, oder $M_{rk} = M_B$ das Reibungsmoment M_{rk} überwunden ist. Das Reibungsmoment ist

$$M_{rk} = \mu r [(A_g + A_p)^2 + (H_g + H_p)^2]^{\frac{1}{2}} = \mu r K_{(g+p)};$$

es läßt sich gleichfalls für verschiedene x berechnen und die Summenkurve (M_{rk}) auftragen. Für die erste Gelenkdrehung ist die M_A- bezw. M_B-Linie mit der M_{rk}-Linie zum Schnitt zu bringen, in Punkt 1 (Abb. 1); die zugehörige Abszisse x_1 gibt die Stelle an, bis zu welcher die Last vorgefahren sein muß, um die erste Drehung des Gelenkes in A zu bewirken.

Infolge der Gelenkdrehung sinkt das Moment M_A auf Null (gekennzeichnet durch den Abfall von Punkt 1 nach 1'), bei weiterem Vorfahren der Last p entstehen wieder Momente M_A, deren Größen gefunden werden können, wenn man das Stück 1 s 4 der M_A-Linie lotrecht um das Maß h_1 nach abwärts verschiebt, sodaß diese Kurve im Punkte 1' beginnt. Diese neu gezeichnete Kurve (M_A') ist wieder mit der M_{rk}-Linie im Punkte 2_0 zum Schnitt zu bringen, dessen x eine Lastbegrenzung anzeigt, der die zweite Gelenkdrehung in A entspricht.

Besser ist es jedoch, nicht die M_A'-Linie, sondern eine neue M_{rk}-Kurve zu zeichnen, und sie mit der ersten M_A-Linie zum Schnitt zu bringen. Diese M'_{rk}-Kurve geht (Abb. 1) durch den Punkt 1", der von 1 den Abstand h_1 hat, läuft mit dieser parallel (1" 2) und schneidet die M_A-Linie im Punkte 2, dem die zweite Drehung des Gelenkes in A entspricht. (Diese Konstruktion erweist sich bei großen Brücken als zweckmäßiger, weil die M_{rk}-Linien nahezu Gerade werden.)

In gleicher Weise ist im Abstande h_2 von 2 aus eine neue M_{rk}-Linie (II) parallel zu I zu ziehen, in 3 mit der M_A-Linie zum Schnitt zu bringen.

Da die über 3 bis a gelegene, schraffierte Kuppe der Kurve kleinere Ordinaten aufweist als die Ordinate h_3, so erfolgt weiter keine Gelenkdrehung, auch nicht in a. Da der Ast der M_A-Linie nun absteigend ist, erfolgt die neuerliche Gelenkdrehung, wenn die Last bis zum Punkt 4 vorgeschritten ist, der in der Waagerechten durch 2 gelegen ist. Beim weiteren Fortschreiten der Last erfolgt keine Drehung des Gelenkes in A mehr, weil der Abfall der M_A-Linie in dem Schlußbereich kleiner ist, als der betreffende M_{rk}-Wert. Die Drehung des Gelenkes erfolgt also bei fortschreitender Last in den Punkten 1, 2, 3, 4, die durch Doppelkreise gekennzeichnet sind.

In der Abb. 1 ist nun der Momentenverlauf infolge der Gelenkreibung durch eine sägeartige Linie $A, 1, 1', 2_0$ gegeben; die Spitzen liegen in der M_{rk}-Linie, deren Ordinatenwerte nicht überschritten werden.

In ganz analoger Weise ist die Untersuchung für das rechte Gelenk in B mit Hilfe der M_B-Linie durchzuführen. Hier ergibt sich eine Drehung des Gelenkes in den Punkten 1', 2', 3'.

2. *Wandernde Einzellast.*

In ganz ähnlicher Weise wie unter 1.) dargelegt, läßt sich die Wirkung einer wandernden Einzellast auf die Gelenkreibung an Zweigelenkbogen er-

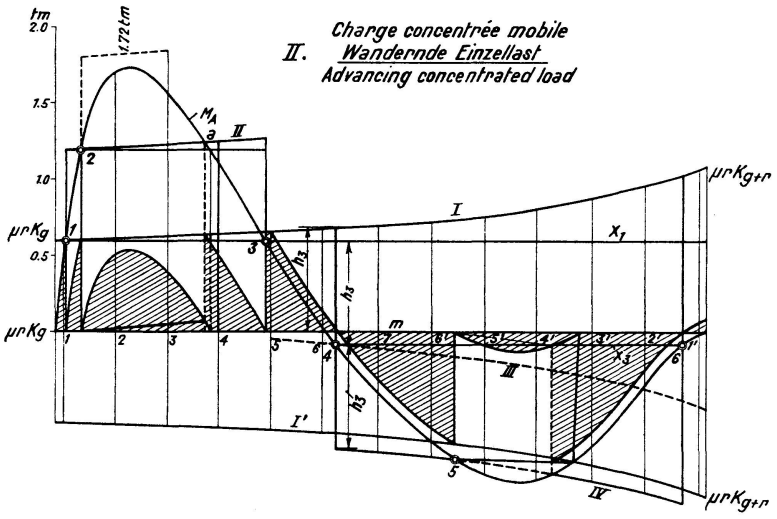

Fig. 2.

mitteln. Anstelle der Summenlinie für M_A tritt die Einflußlinie für das Kämpfermoment des eingespannten Bogens. In Abb. 2 ist diese Einflußlinie (M_A) eingetragen. Man zeichnet die M_{rk}-Linie nach aufwärts I und abwärts I' auf, und zeichnet die Parallele II, erhält die Schnittpunkte 1 und 2, für welche Gelenkdrehungen in A stattfinden, und a, dem keine Gelenkdrehung entspricht. Der Punkt 3 liegt in der Horizontalen durch 1 (X_1-Achse), an welche die Ordinaten der M_{rk}-Linie nach abwärts aufgetragen werden (III), die den Punkt 4 ergibt; dann zieht man eine Parallele hierzu im Abstande h_3 (IV), erhält den Punkt 5. Punkt 6 liegt wieder in der Waagerechten durch 4.

Die Gelenkdrehungen in A erfolgen also, wenn die Last in den Punkten 1, 2 bis 6 steht. Die bezüglichen Momentenwerte für die Kämpferstelle A gibt die sägeartige Linie (ihre Flächen sind schraffiert).

Für die Drehungen im Kämpfergelenk B ist von links beginnend mit der Einflußlinie M_B zu verfahren.

Diese hier gegebene Darstellung ist ganz allgemein gehalten; sie vereinfacht sich wesentlich, weil die M_{rk}-Linie, namentlich für große Brücken, nahezu gerade sind, wie die folgenden Beispiele zeigen. Es darf aber nicht vergessen werden, daß die sägeartige Kurve keine Einflußlinie ist, weil die M_{rk}-Linien abhängig sind vom Verhältnis von g zu p.

III. Beispiele.

Um die Größenordnung der Momente in Bogenträgern infolge der Gelenkreibung gegenüber jenen infolge der Belastungen zu kennen, sollen zwei Beispiele angeführt werden und zwar ein Bogen *(A)* mit kleiner Spannweite und großem Pfeil, und einer *(B)* mit großer Spannweite und kleinem Pfeil. In beiden Fällen handelt es sich um vollwandige Bogen. Dabei wurden die Tragwerke sowohl als Dreigelenk-, Zweigelenk-, Eingelenkbogen, wie als eingespannter Bogen genau gerechnet und sowohl eine Ausführung in St. 37 wie in St. 52 berücksichtigt.

Bei der Berechnung der Zweigelenkbogen als eingespannte Tragwerke wurden die an den Gelenkstellen vorhandenen kleinen Trägheitsmomente der Bogenquerschnitte berücksichtigt.

A. Wärmewirkung.

1. Zweigelenkbogen.

a) Der Zweigelenkbogen hat die Form jenes der Draubrücke in Marburg, wurde aber für vorliegende Zwecke umgerechnet.

$l = 42$ m, $f = 10{,}28$ m, $f/l = 0{,}244$, $r = 10$ cm, Eigengewicht $g = 4{,}93$ t/m, zufällige Last $p = 7{,}298$ t/m für St. 37 (für St. 52: $g' = 3{,}70$ t/m, $p' = 13{,}15$ t/m).

Für 1° C ist $H_t = 0{,}297$ t, $H_{t2} = 0{,}106$ t, $h = 4{,}27$ m.

α) Vollbelastung St. 37. $K_2 = 369{,}4$ t.

Die bezüglichen Auswertungen finden sich in der anschließenden Tabelle 1, in welcher die Ergebnisse der Formeln 1, 2, 5, 6, 7, 8 angegeben sind.

Gesamtmoment im Scheitel für 35° C $= M_{sch} = 3{,}5 \cdot 0{,}1065 \cdot 10{,}28 =$ 38,22 tm ohne Gelenkreibung. In Wirklichkeit

$$(35 - 4{,}36) \cdot 0{,}1065 \cdot 10{,}28 + 7{,}79 = 32{,}63 + 7{,}79 = 40{,}42 \text{ tm} = 1{,}055 \cdot 38{,}2,$$

der Mehrwert beträgt <u>5,5 %</u>.

β) Vollbelastung St. 52. $K_2 = 507{,}8$ t.

Gesamtmoment im Scheitel in Wirklichkeit:

$$(35 - 6{,}02) \cdot 0{,}1065 \cdot 10{,}28 + 10{,}76 = 31{,}6 + 10{,}76 = 42{,}36 \text{ tm} = 1{,}107 \cdot 38{,}22,$$

Mehrwert <u>10,7 %</u>.

b) Der Zweigelenkbogen des Entwurfes des Verfassers für die zweigeschossige Brücke über den alten Dnjepr in Alexandrowsk (Sowjet-Rußland).

$l = 224$ m, $f = 29{,}46$ m, $f/l = 0{,}132$, $h = 19{,}65$ m, $r = 13{,}9$ cm, $g = 10{,}125$ t/m,
für 1° C $H_t = 3{,}37$ t, $H_{t2} = 0{,}628$ t.

α) Vollbelastung St. 52. $K_2 = 5032$ t.

Gesamtmomente im Scheitel ohne Gelenkreibung bei 35° C $M_{sch} =$ $35 \cdot 0{,}6285 \cdot 29{,}46 = 648$ tm, in Wirklichkeit

$$M = (35-1{,}588) \cdot 0{,}6285 \cdot 29{,}46 + 52{,}5 = 619{,}5 + 52{,}5 = 672{,}0 = 1{,}038\ M_{sch},$$

Mehrwert 3,8 %.

β) Vollbelastung für $r = 20$ cm.

Gesamtmoment im Scheitel ohne Gelenkreibung $M_{sch} = 648$ tm, in Wirklichkeit

$$M = (35-2{,}28) \cdot 0{,}6285 \cdot 29{,}46 + 75{,}5 = 605{,}5 + 75{,}5 = 681{,}0 = 1{,}052\ M_{sch},$$

Mehrwert 5,2 %.

Tabelle 1.
Zweigelenkbogen; Wärmewirkung bei Vollbelastung.

Formel		Brücke $l = 42$ m, $f = 10{,}28$ m		Dnjepr-Brücke $l = 224$ m, $f = 29{,}46$ m	
		St. 37	St. 52	$r = 13{,}9$ cm St. 52	$r = 20$ cm St. 52
Nr.	K	369,4 t	507,8 t	5032 t	5032 t
1	M_K	1,27 t (tm)	1,27 t	66,21 t	66,21 t
2	M_{rK}	5,54 tm	7,612 tm	105 tm	150,96 tm
5	t	4,36°	6,02°	1,588°	2,28°
6	M_s	7,79 tm	10,76 tm	52,5 tm	75,5 tm
7	M'_s	4,77 tm	6,58 tm	29,4 tm	42,24 tm
8	n	8	5,31	22	15,3

2. *Dreigelenkbogen.*

Bogen mit einer Spannweite $l = 42$ m, $r = 10$ cm, $r_1 = 7$ cm.

Ausführung in St. 52

$$H_t = 0{,}297 \text{ t}, \quad H_{t1} = 0{,}065 \text{ t}, \quad H_{t2} = 0{,}106 \text{ t}.$$

Die bezüglichen Werte finden sich in Tabelle 2.

Tabelle 2 (Dreigelenkbogen).

Formel	9	M_s	1,788 t
	10	M_{rs}	3,67 t
	11	t	2,056°
	12	M_{K_1}	1,388 tm
	13	M_{rK}	7,57 t
	15	n	5,46
	16	M_K	2,62 tm
	17	n_1	2,89
		n_{1t}	5,94°

Die hier erfolgten ziffermäßigen Ermittlungen lassen sich für die Wärmewirkung graphisch auftragen. In den Abb. 3, 4 ist dies erfolgt, und zwar in Abb. 3 für den Zweigelenkbogen, in Abb. 4 für den Dreigelenkbogen. Als Abszissen sind die Temperaturzunahmen in Celsiusgraden aufgetragen, als Ordinaten die Scheitelmomente. Die vom Ursprung des Koordinatensystems ausgehende geneigte Gerade gibt die Scheitelmomente im Zweigelenkbogen ohne Reibungsdruck der Gelenke, die steilere bestimmt die bezüglichen Momente einschließlich der Reibungswirkung. Jedem Sägezahn entspricht eine Gelenkdrehung. In der Abb. 3 sind nicht nur

die Wirkungen für das Eigengewicht der Brücke, sondern auch jene für die Vollbelastung und diese bei Ausführung in St. 37 und St. 52 eingetragen.

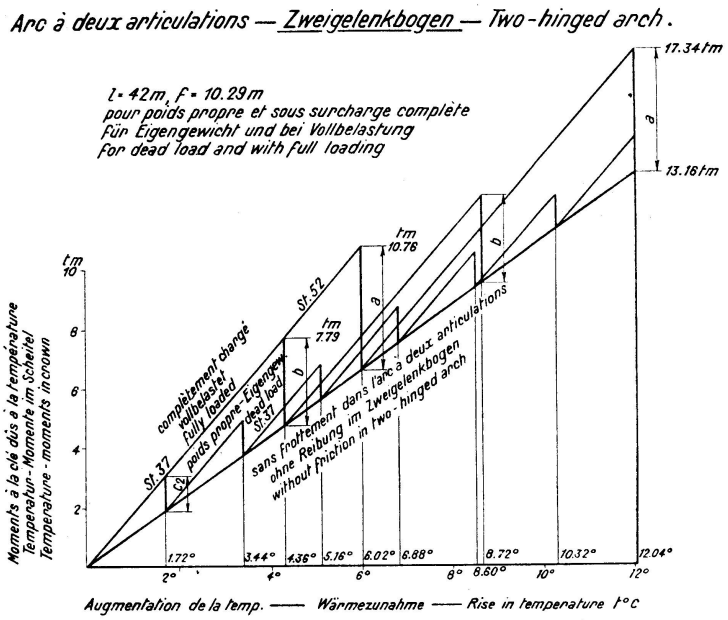

Fig. 3.

Man sieht daraus die häufigere Gelenkdrehung für das Eigengewicht (alle 1,72 ° C), jene für die Vollast bei St. 37 (alle 4,36 ° C) und bei St. 52 alle 6,02 ° C. Die bezüglichen Mehrwerte der Scheitelmomente betragen in den drei Fällen 1,19 tm, 2,97 tm, bezw. 4,19 tm. Die Ausführung in St. 52 ist also wesentlich empfindlicher.

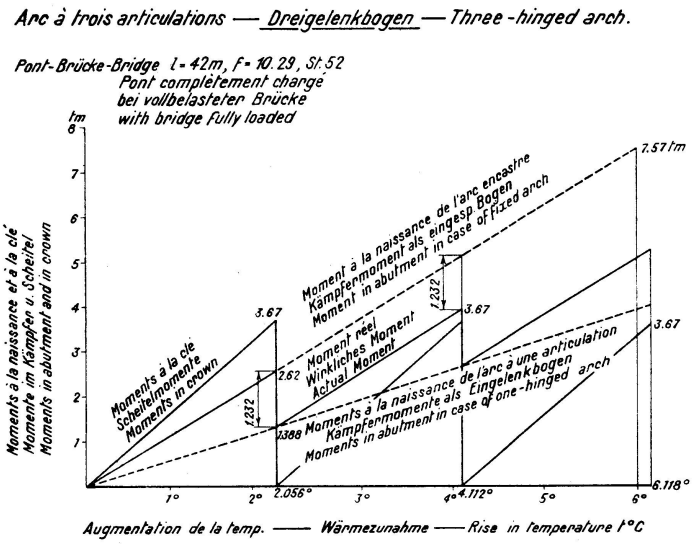

Fig. 4.

In den ausgeführten Beispielen ist auch der maximale Zuwachs der Scheitelmomente infolge der Gelenkreibung in % angeführt, der beispielsweise bei einer kleinen Brücke $l = 42$ m, St. 52, 10,7 % beträgt.

Schließlich ist auch für einen Dreigelenkbogen in Abb. 4 der Verlauf der Wärmemomente infolge der Gelenkreibung sowohl im Kämpfer wie

im Scheitel eingetragen, der nach den vorhergehenden ohne weiteres verständlich ist. Die Sägelinien gelten für einen Bogen von 42 m Stützweite bei Vollbelastung und Ausführung in St. 52.

Bezeichnend ist, daß mit jeder Drehung des Scheitelgelenkes auch ein Abfall in den Momenten an den Kämpferstellen eintritt, der sich auf der Linie für die Kämpfermomente des Eingelenkbogens aufbaut.

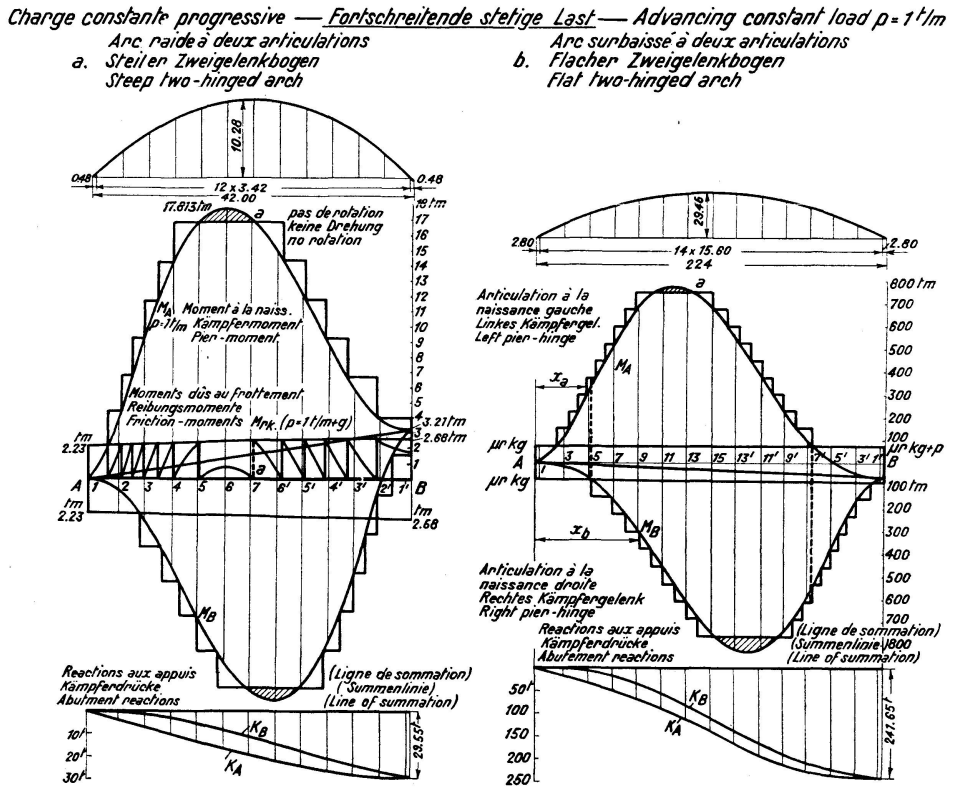

Fig. 5. Fig. 6.

B. Bewegte Lasten.

Um die Einfachheit der Konstruktion für eine fortschreitende stetige Last zu zeigen, ist sie in den Abb. 5, 6 für eine kleine und für eine große Brücke vorgeführt, wobei $p = 1$ t/m angenommen worden ist. Für die Dnjeprbrücke, die zweigeschossig ist, beträgt die zufällige Last der Straße 1,65 t/m. Hier ist mit 1 t/m gerechnet. Es erfolgen 19 Gelenkdrehungen in A und B. Außerdem ist noch in den Abb. 5, 6 der Verlauf der K_A- und K_B-Linie verzeichnet.

Aus den Abbildungen 5 und 6 ist die Phasenverschiebung der einzelnen Gelenkdrehungen in A und B zu ersehen.

Bei der Ermittlung der Wirkung einer wandernden Last hat noch eine neue Darstellung einer Einflußlinie (K_A-Linie) für den Kämpferdruck gute Dienste geleistet (Abb. 7), die nicht mit Parallelkoordinaten, sondern mit Polarkoordinaten arbeitet. Der Anfangspunkt des Strahlenbüschels liegt im Kämpfer O. Auf den Strahlen sind die Kämpferdrücke für eine wandernde Einzellast $P = 1$ von O aus als Strecken aufgetragen worden. Die Endpunkte dieser Strecken liegen auf einer Kurve (K_A-Linie). Für eine parabolische Bogenachse ist auch diese Kurve eine Parabel, deren Achse parallel zur Kämpfersehne liegt und zwar im Abstande 0,5. Auf dem von O ausgehenden lotrechten Strahl ist $A = 1$ abgeschnitten.

Die Neigungswinkel der Strahlen sind aus den bekannten Schnittpunkten der jeweiligen Einzellast mit der Kämpferdruck-Schnittlinie bestimmbar. Der

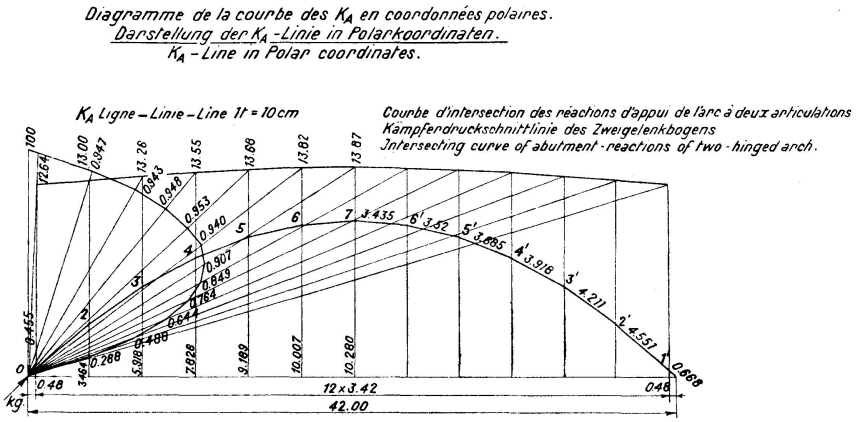

Fig. 7.

im Kämpfer O eingetragene Kämpferdruck K_g für das Eigengewicht kann mit jedem Kämpferdruck K_p, der daran anschließt, zusammengesetzt werden, um das Reibungsmoment berechnen zu können.

Auf andere, zweckmäßige Anwendungen solcher Einflußbüschel soll noch an anderer Stelle zurückgekommen werden.

Zusammenfassung.

In der vorliegenden Arbeit wurde das Verhalten der Gelenke von Zweigelenk- und Dreigelenkbogenbrücken bei reiner Wärmewirkung, bei fortschreitender stetiger Last und bei wandernder Einzellast geklärt, ein Verfahren angegeben, um die erforderliche Wärmezunahme in Celsius zu ermitteln, die zu einer Gelenkdrehung führt. Ebenso wurden für die wandernden Lasten die Orte angegeben, welche Gelenkdrehungen entsprechen.

Kleine Bogenbrücken mit Gelenken wirken als eingespannte Bogen noch bei größeren Wärmezu- oder Abnahmen als größere Brücken, und die ziffernmäßigen Auswertungen haben ergeben, daß der Einfluß der Gelenkreibung bei großen Brücken keine wesentliche Rolle spielt und damit auch die Zusatzmomente von geringerer Bedeutung gegenüber den anderen Momentenwerten sind. Ähnliches ist auch von den bewegten Lasten zu sagen. Die Gelenke drehen sich, wie man sich aus Abb. 1, 2, 5, 6 überzeugen kann, wenn die bewegten Lasten nur eine verhältnismäßig kurze Strecke auf der Brücke zurückgelegt haben.

Diese Untersuchungen werden besonders dann herangezogen werden, sobald die Lagenänderungen der Bogen in den Brückenenden oder im Scheitelgelenk mit Libellen oder sonst gemessen werden und diese Messungen ausgewertet werden sollen. Besonders im Zusammenhange mit anderen Messungen am selben Objekt wird der Gesamtzustand eines Tragwerkes für irgend eine Belastung besser zur Übereinstimmung gebracht werden können. Außerdem geben die ruckartigen Bewegungen Anlaß zu Schwingungen des Tragwerkes.

Résumé.

Dans l'étude qui précède, l'auteur étudie la manière dont se comportent les articulations, dans les ponts à deux et à trois articulations, sous les influences thermiques pures, sous l'influence d'une charge continue croissante

et sous l'influence d'une charge localisée en différents points; il indique une méthode permettant de déterminer l'augmentation de température nécessaire pour produire un mouvement angulaire donné dans l'articulation. Il indique de même les emplacements des charges isolées qui correspondent à certaines déformations des articulations.

Les petits ponts en arc avec articulations se comportent encore comme des arcs encastrés pour des augmentations ou des diminutions de température plus fortes que celles qui correspondent aux ponts plus importants et les déterminations effectuées ont montré que l'influence du frottement aux articulations n'intervient pas dans des proportions sensibles dans les grands ponts; par suite, les moments additionnels sont d'importance faible par rapport aux autres moments à considérer. Il en est de même en ce qui concerne les charges mobiles. Les articulations accusent en effet un déplacement angulaire même lorsque les charges n'ont été déplacées sur le pont que d'une quantité relativement faible, ce qu'on peut déduire des figures 1, 2, 5, 6.

Ces recherches prendront toute leur valeur lorsque l'on aura mesuré, soit au moyen de niveaux, soit de toute autre manière, les modifications dans les conditions aux appuis ou au sommet et que ces mesures auront été interprétées. D'autres mesures doivent également permettre de mieux se rendre compte, en toute certitude, du comportement global d'une charpente sous l'influence d'une charge quelconque. Il est d'ailleurs de fait que les charges induisent des mouvements oscillatoires dans la charpente.

Summary.

In this paper the behaviour of the hinges of two-hinged and three-hinged arched bridges under the effect of heat alone, under increasing stationary load and under a single rolling load is explained, and a method is given for determining the necessary heating in degrees centigrade to induce turning in the hinges. Likewise the spots are given where rolling loads cause turning of the hinges.

Small hinged arched bridges still continue to act as fixed-end arches at greater increases or reductions of temperature than large bridges, and numerical calculations have shown that the influence of hinge friction plays no inportant part in large bridges, and consequently also the additional moments are of less importance in comparison with the other moments. Conditions are similar in the case of rolling loads. The hinges turn, as can be seen from figs. 1, 2, 5 and 6, when the rolling load has passed over a comparatively short distance on the bridge.

These investigations will be made use of particularly when the changes in position of the structure at the hinges of the arch at the end of the bridge or at the crown have to be measured with spirit levels or otherwise, and the results of these measurements have to be used in calculations. It is especially in connection with other measurements made on the same structure that all conditions in a supporting structure can be brought into better aggrement for any load. In addition, the jerky movements give rise to vibrations in the structure.