

Zeitschrift: IABSE publications = Mémoires AIPC = IVBH Abhandlungen
Band: 3 (1935)

Artikel: Beitrag zur Lösung linearer Gleichungen
Autor: Efsen, Axel
DOI: <https://doi.org/10.5169/seals-4143>

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. [Siehe Rechtliche Hinweise.](#)

Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. [Voir Informations légales.](#)

Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. [See Legal notice.](#)

Download PDF: 17.05.2025

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>

BEITRAG ZUR LÖSUNG LINEARER GLEICHUNGEN

CONTRIBUTION À LA SOLUTION DES ÉQUATIONS LINÉAIRES

CONTRIBUTION TO THE SOLUTION OF LINEAR EQUATIONS

AXEL EFSEN, Dr. techn. Gentofte (Dänemark).

1. Clapeyron'sche Gleichungen.

2. 4 Gleichungen mit 4 Unbekannten, wobei die Glieder der sekundären Diagonalreihe in der Koeffizient-Matrix Null sind.

3. Sukzessive Approximation.

Die vorliegende Behandlung der drei oben gestellten Aufgaben kann auf die gleiche theoretische Ableitung zurückgeführt werden, die übrigens, soweit der Verfasser beurteilen kann, auch nutzbringend zur Lösung noch mehrerer besonderer Gleichungstypen angewandt werden kann. Diese weiteren Untersuchungen sind jedoch im gegenwärtigen Zeitpunkt noch nicht weit genug gediehen.

Die angegebenen Methoden sind namentlich zum Gebrauch bei der Lösung der Elastizitätsgleichungen gedacht, die bei der Behandlung von statisch unbestimmten Systemen entstehen.

Da jedoch keine Symmetrie zur Diagonalreihe der Koeffizient-Matrix verlangt wird, können sie in Wirklichkeit auch in anderen Fällen benützt werden.

Allgemeine Theorie.

Wir beginnen damit, einige Elemente der Matrix-Rechnung zu wiederholen:

Unter einer Matrix A_{km} (oder A) versteht man ein Zahlenschema mit k Kolonnen und m Zeilen, also:

$$A_{km} = \left\{ \begin{array}{ccccccc} a_{11} & a_{21} & a_{31} & \cdot & a_{k1} \\ a_{12} & a_{22} & a_{32} & \cdot & a_{k2} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} & \cdot & a_{k3} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{1m} & a_{2m} & a_{3m} & \cdot & a_{km} \end{array} \right\} \quad (1)$$

Wenn $k = m$ ist, ist die Matrix quadratisch, sie ist einkolonnig, wenn $k = 1$ ist. Ist $a_{11} = a_{22} = a_{33} \dots a_{kk} = 1$ und alle übrigen $a = 0$, so entsteht die Einheits-Matrix ($= E$). Hat man die Matrizen A_{km} und B_{nk} , wo also die Anzahl Kolonnen in $A =$ der Anzahl Zeilen in B ist, so spricht man von dem Produkt:

$$A_{km} \cdot B_{nk} = C_{nm} \quad (2)$$

wo C eine neue Matrix mit der gleichen Anzahl Kolonnen wie B und der gleichen Anzahl Zeilen wie A ist, und wo man die einzelnen Zahlen erhält, indem man die Zeile d in A linear mit der Kolonne g in B kombiniert (hierunter wird die Bildung des Ausdruckes $\sum a_{ed} \cdot b_{ge}$ verstanden, wo $e = 1, 2 \dots k$

Wir betrachten jetzt einen Satz linearer Gleichungen von der Form:

[illegible]

$$(E - A) \cdot X = J^{(1)} \quad (4_1)$$
$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_k \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad J^{(1)} = \begin{pmatrix} i_1 \\ \vdots \\ i_k \end{pmatrix}.$$
$$(E - A^2) \cdot X = J^{(1)} + A \cdot J^{(1)} = J^{(1)} + J^{(2)}. \quad (4_2)$$
$$(E - A^3) \cdot X = J^{(1)} + J^{(2)} + J^{(3)}. \quad (4_3)$$
$$(E - A^n) \cdot X = J^{(1)} + J^{(2)} \dots + J^{(n)} = \sum_1^n J. \quad (4_n)$$
$$\begin{Bmatrix} i_1^{(n)} \\ \vdots \\ i_k^{(n)} \end{Bmatrix} = J^{(n)} = A \cdot J^{(n-1)} = A \cdot \begin{Bmatrix} i_1^{(n-1)} \\ \vdots \\ i_k^{(n-1)} \end{Bmatrix}. \quad (5)$$
$$(E - A^n) \cdot X = (E + A + A^2 \dots + A^n) \cdot J^{(1)}, \quad (6)$$
$$(1 - a_{11}^{(n)}) \cdot x_1 - a_{21}^{(n)} \cdot x_2 \cdots - a_{k1}^{(n)} \cdot x_k = i_1 \left(1 + \sum_1^n a_{11} \right) + i_2 \cdot \sum_1^n a_{21} \cdots + i_k \cdot \sum_1^n a_{k1}$$

Man denkt sich ein Punktsystem, das durch den Schnitt von k lotrechten Linien 1, 2, 3 ... k und n wagrechten Linien (1), (2), (3) ... (n) entsteht, und stellt sich die Punkte jeder wagrechten Linie mit den Punkten der Nachbarlinie auf alle möglichen Weisen verbunden vor. Diese Verbindungslinien sollen die Koeffizienten a darstellen derart, daß z. B. eine Linie, die einen

Punkt 2, (d) mit dem Punkt 3, $(d + 1)$ in der nachfolgenden wagrechten Linie $(d + 1)$ verbindet, a_{23} bedeutet. Ist einer der Koeffizienten Null, so zieht man die entsprechenden Linienstücke nicht. Für Gleichungen von Normalform sollen also alle lotrechten Linienstücke weggelassen werden. Man setzt darnach die Größen $i_1 \dots i_k$ auf die gleichbenannten Punkte der wagrechten Linie (1), multipliziert jede einzelne von ihnen mit den Linienstücken, die

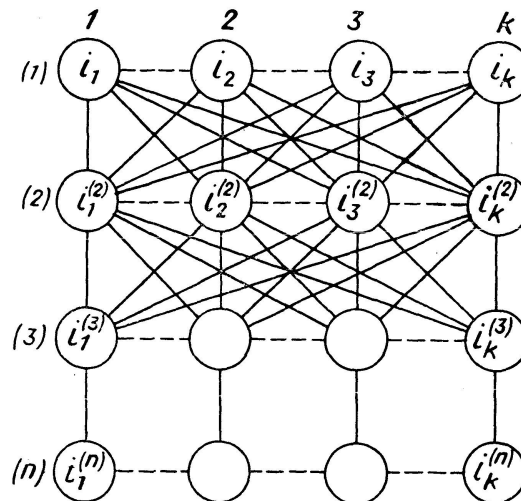


Fig. 1.

von dem Punkt ausgehen, auf den sie gesetzt sind, und führt das Resultat längs des entsprechenden Linienstückes zu den Punkten auf der wagrechten Linie (2). Man addiert alle in jedem einzelnen Punkt entstehenden Beiträge und hat damit die Größen $i_1^{(2)} \dots i_k^{(2)}$ gebildet und auf gleichbenannten Punkten der wagrechten Linie (2) angebracht.

Auf analoge Weise denkt man sich $J^{(3)}, J^{(4)} \dots J^{(n)}$ berechnet. Wenn $i_d = 1$ ist, alle übrigen $i = 0$, so findet man

$$a_{d1}^{(n)}, a_{d2}^{(n)} \dots a_{dk}^{(n)}$$

entsprechend als

$$i_{d1}^{(n+1)}, i_{d2}^{(n+1)} \dots i_{dk}^{(n+1)}.$$

Wir wollen jetzt die besonderen Fälle 1, 2 und 3 betrachten.

1. Lösung von Clapeyron'schen Gleichungen.

Bekanntlich kommen häufig in der Statik die sogenannten Clapeyron'schen Gleichungen vor (3 gliedrige Gleichungen), da die Behandlung statisch unbestimmter Konstruktionen sehr oft auf dieses Problem führt.

Zur Lösung dieser Gleichungen sind bereits mehrere Methoden angegeben, sowohl graphische (besonders von Culmann, Winkler, W. Ritter¹⁾, Claxton Fidler²⁾ als auch analytische (besonders von Lévy³⁾, Flamant, Müller-Breslau, Frandsen⁴⁾, Lewe⁵⁾).

¹⁾ W. RITTER: Der kontinuierliche Balken. Zürich, 1900.

²⁾ CLAXTON FIDLER: Minutes of Proceedings. Institution of Civil Engineers. London, 1883.

³⁾ LÉVY: Statique graphique. Paris, 1886.

⁴⁾ FRANDSEN: Ingeniøren, S. 633. Kopenhagen, 1912.

⁵⁾ LEWE: Die Berechnung durchlaufender Träger und mehrstieliger Rahmen nach der Methode des Zahlenrechtecks. Leipzig, 1916.

Die vorliegende Methode besteht darin, daß man für einen Satz Clapeyron'scher Gleichungen mit den Unbekannten $x_1, x_2, x_3, \dots, x_k$ auf einfache Weise zwei neue Sätze Clapeyron'scher Gleichungen anschreiben kann, wovon der eine die Unbekannten $x_1, x_3, x_5, \dots$ enthält und der andere $x_2, x_4, x_6, \dots$.

Ist k eine gerade Zahl, so erscheinen $\frac{1}{2}k$ Unbekannte in den zwei neuen Sätzen, ist k dagegen ungerade, so entsteht im ersten Satz eine mehr als im zweiten. Die neuen Clapeyron'schen Gleichungssätze können darnach auf entsprechende Weise aufgeteilt werden. Auf diese Weise fährt man fort und erhält zuletzt Gleichungen mit nur einer Unbekannten. Man braucht jedoch nicht länger als bis zu Gleichungen mit 2 und 3 Unbekannten zu gehen, da dann die Determinantenmethode (und ähnliche) leicht zum Ziele führt. Außerdem wird man einsehen, daß man sich nicht für alle entstehenden Untersysteme von Gleichungen zu interessieren braucht, sondern sich damit begnügen kann, andauernd eines zu isolieren, das entweder eine der zwei ersten oder der zwei letzten Unbekannten (x_1, x_2, x_{k-1}, x_k) enthält. Hat man nämlich eine hiervon gefunden, so kann man durch Einsetzen in die Ausgangsgleichungen alle anderen finden. Dieses Verfahren wird wohl in der Regel vorzuziehen sein.

Die Komplement-Matrix für einen Satz Clapeyron'scher Gleichungen von Normalform ist:

$$A = \begin{array}{|c|c|c|c|c|c|} \hline \circ & \bullet & & & & \\ \hline \bullet & \circ & \bullet & & & \\ \hline & \bullet & \circ & \bullet & & \\ \hline & & \bullet & \circ & \bullet & \\ \hline & & & \bullet & \circ & \bullet \\ \hline & & & & \bullet & \circ \\ \hline \end{array}$$

und hat demnach das Diagramm:

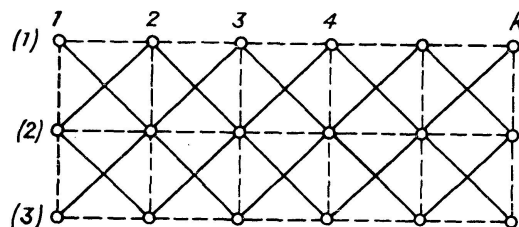


Fig. 2.

Die Gleichungen 2. Ordnung haben dann das Diagramm:

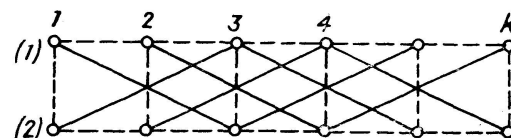


Fig. 3

dem eine Komplement-Matrix entspricht:

$$A^2 = \begin{array}{|c|c|c|c|c|c|} \hline \circ & & \bullet & & & \\ \hline & \bullet & & \bullet & & \\ \hline \bullet & & \circ & & \bullet & \\ \hline & \circ & & \bullet & & \bullet \\ \hline & & \bullet & & \bullet & \\ \hline & & & \bullet & & \bullet \\ \hline \end{array}$$

Man hat damit zwei verschiedene Sätze Clapeyron'scher Gleichungen erhalten, die jedoch nicht Normalform besitzen.

Ausgedrückt durch die Koeffizienten und Impulse der Ausgangsgleichungen wird für die neuen Gleichungen:

$$A^2 = \begin{vmatrix} a_{12} \cdot a_{21} & a_{32} \cdot a_{21} & & & \\ & a_{12} \cdot a_{21} & a_{43} \cdot a_{32} & & \\ & a_{23} \cdot a_{32} & & & \\ a_{12} \cdot a_{23} & a_{23} \cdot a_{32} & a_{54} \cdot a_{43} & & \\ & a_{34} \cdot a_{43} & & & \\ & a_{23} \cdot a_{34} & a_{34} \cdot a_{43} & a_{65} \cdot a_{54} & \\ & & a_{45} \cdot a_{54} & & \\ & & a_{34} \cdot a_{45} & a_{45} \cdot a_{54} & \\ & & & a_{56} \cdot a_{65} & \\ & & & a_{45} \cdot a_{56} & a_{56} \cdot a_{65} \end{vmatrix} \quad J^{(2)} = \begin{vmatrix} i_1 & + i_2 \cdot a_{21} \\ i_2 + i_1 \cdot a_{12} + i_3 \cdot a_{32} \\ i_3 + i_2 \cdot a_{23} + i_4 \cdot a_{43} \\ i_4 + i_3 \cdot a_{34} + i_5 \cdot a_{54} \\ i_5 + i_4 \cdot a_{45} + i_6 \cdot a_{65} \\ i_6 + i_5 \cdot a_{56} \end{vmatrix} \quad (7)$$

Das Anschreiben von (7) kann ganz mechanisch geschehen, wie (8) zeigt:

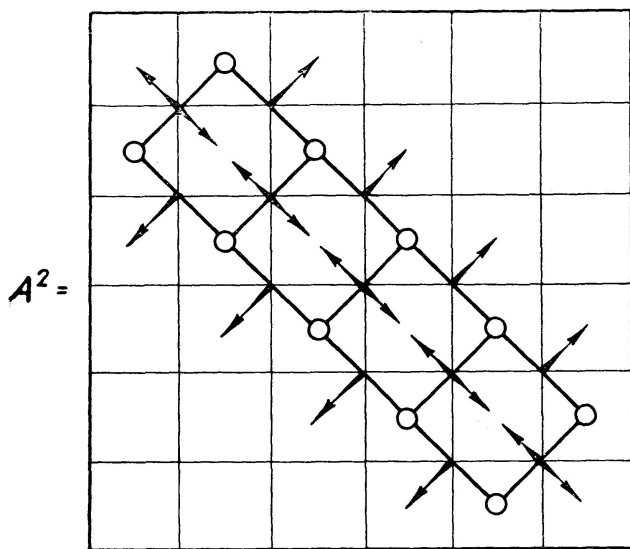


Fig. 4.

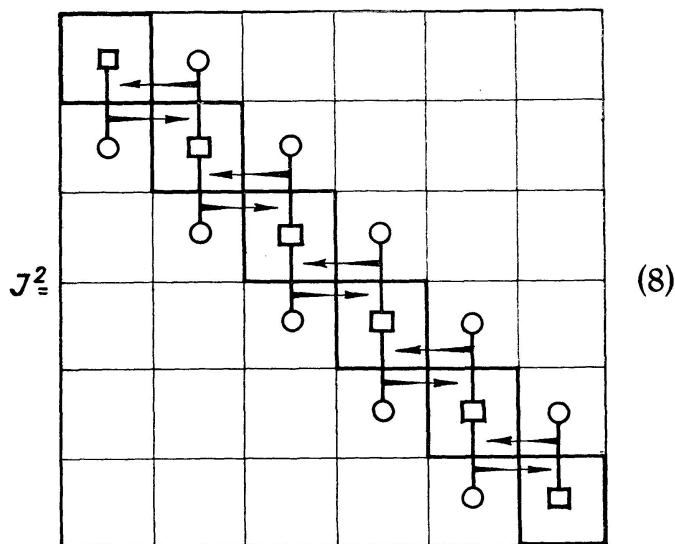


Fig. 5.

Darin bedeutet $\circ$ und $\square$ a bzw. i . Sind zwei solcher Größen durch einen Streich verbunden, von dem ein Pfeil ausgeht, so bedeutet dies, man soll sie miteinander multiplizieren und das Resultat in die Rubrik schreiben, die die Pfeilspitze anweist.

Man addiere nun innerhalb der einzelnen Rubrik die „Pfeilspitzen“-Werte und die $\square$ -Werte und hat damit (7) angeschrieben.

Beispiel:

Wir betrachten die Gleichungen (mit der Lösung $x_1 = 3$, $x_2 = 2$, $x_3 = 5$, $x_4 = 4$, $x_5 = 1$):

$$\begin{vmatrix} 1 & -0,6 & & & \\ -0,3 & 1 & -0,2 & & \\ & -0,7 & 1 & -0,4 & \\ & & -0,8 & 1 & -0,5 \\ & & & -0,1 & 1 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1,8 \\ 0,1 \\ 2,0 \\ -0,5 \\ 0,6 \end{vmatrix}$$

und erhalten damit:

$$A = \begin{vmatrix} & & 0,6 & & \\ 0,3 & & & 0,2 & \\ & 0,7 & & 0,4 & \\ & & 0,8 & & 0,5 \\ & & & 0,1 & \end{vmatrix}$$

Schema (8) wird dann:

$$A^2 = \begin{vmatrix} 0,3 \cdot 0,6 & 0,6 \cdot 0,2 & & & \\ & 0,3 \cdot 0,6 & & 0,2 \cdot 0,4 & \\ 0,3 \cdot 0,7 & 0,7 \cdot 0,2 & & & \\ & 0,7 \cdot 0,8 & & 0,8 \cdot 0,4 & \\ & & 0,8 \cdot 0,1 & 0,1 \cdot 0,5 & \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0,18 & 0,12 & & & \\ & 0,32 & & 0,08 & \\ 0,21 & 0,46 & & 0,20 & \\ & 0,56 & & 0,37 & \\ & & 0,08 & 0,05 & \end{vmatrix}$$

$$J^{(2)} = \begin{vmatrix} 1,8 + 0,6 \cdot 0,1 & & & & \\ 0,1 + 0,3 \cdot 1,8 & & & & \\ & 2,0 + 0,7 \cdot 0,1 & & & \\ -0,5 + 0,8 \cdot 2,0 & & & & \\ & 0,6 - 0,1 \cdot 0,5 & & & \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1,86 & & & & \\ 1,04 & & & & \\ & 1,87 & & & \\ & & 1,40 & & \\ & & & 0,55 & \end{vmatrix}$$

Dies führt zu folgenden neuen Gleichungen:

$$\begin{vmatrix} 1-0,18 & -0,12 \\ -0,21 & 1-0,46 & -0,20 \\ & -0,08 & 1-0,05 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} x_1 \\ x_3 \\ x_5 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1,86 \\ 1,87 \\ 0,55 \end{vmatrix} \quad \begin{vmatrix} 1-0,32 & -0,08 \\ -0,56 & 1-0,37 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} x_2 \\ x_4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1,04 \\ 1,40 \end{vmatrix}$$

2. Lösung von 4 Gleichungen, wobei die Glieder der sekundären Diagonalreihe der Koeffizient-Matrix Null sind.

Durch Elimination kann ein beliebiger Satz Gleichungen jederzeit auf eine solche Form gebracht werden, daß die sekundäre Diagonalreihe Null ist. Wir nehmen weiterhin an, daß die Gleichungen auf Normalform gebracht sind. Die Komplement-Matrix und ihr entsprechendes Diagramm sind dann:

$$A = \begin{vmatrix} \circ & \bullet & \bullet & \\ \bullet & \circ & & \bullet \\ \bullet & & \circ & \bullet \\ & \bullet & \bullet & \circ \end{vmatrix}$$

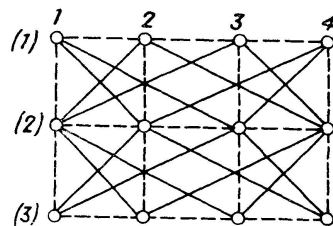


Fig. 6.

Für den Gleichungssatz 2. Ordnung erhält man dann:

$$A^2 = \begin{vmatrix} a_{12} \cdot a_{21} & & & & a_{42} \cdot a_{21} \\ a_{13} \cdot a_{31} & & & & a_{43} \cdot a_{31} \\ & a_{21} \cdot a_{12} & a_{31} \cdot a_{12} & & \\ & a_{24} \cdot a_{42} & a_{34} \cdot a_{42} & & \\ & a_{21} \cdot a_{13} & a_{31} \cdot a_{13} & & \\ & a_{24} \cdot a_{43} & a_{34} \cdot a_{43} & & \\ a_{12} \cdot a_{24} & & & & a_{42} \cdot a_{24} \\ a_{13} \cdot a_{34} & & & & a_{43} \cdot a_{34} \end{vmatrix}, \quad J^{(2)} = \begin{vmatrix} i_1 + i_2 \cdot a_{21} + i_3 \cdot a_{31} \\ i_2 + i_1 \cdot a_{12} + i_4 \cdot a_{42} \\ i_3 + i_1 \cdot a_{13} + i_4 \cdot a_{43} \\ i_4 + i_2 \cdot a_{24} + i_3 \cdot a_{34} \end{vmatrix} \quad (9)$$

Damit hat man die Aufgabe darauf zurückgeführt, zwei Sätze Gleichungen mit je zwei Unbekannten zu lösen.

Ähnlich wie bei der Behandlung der Clapeyron'schen Gleichungen kann man (9) ganz mechanisch nach der Weisung von (10) anschreiben.

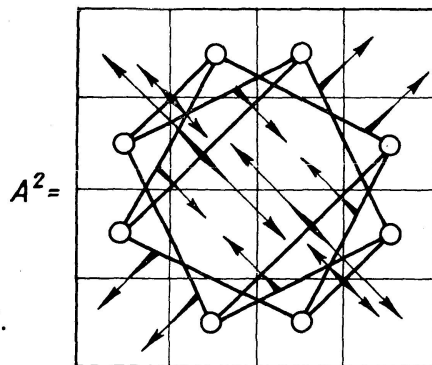


Fig. 7.

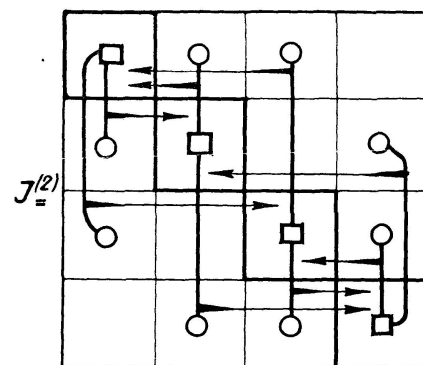


Fig. 8.

Beispiel:

Wir betrachten die Gleichungen (mit der Lösung: $x_1 = 1$, $x_2 = 2$, $x_3 = 3$, $x_4 = 4$):

$$\begin{vmatrix} 1 & -2 & -1 \\ -3 & 1 & -5 \\ -4 & & 1 & -1 \\ & -3 & -2 & 1 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -6 \\ -21 \\ -5 \\ -8 \end{vmatrix} \quad \text{das heißt: } A = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 5 \\ 4 & 1 \\ 3 & 2 \end{vmatrix}$$

Schema (10) ist:

$$A^2 = \begin{vmatrix} 4 & & & & 1 \\ & 6 & & & 10 \\ & & 6 & 10 & \\ & & 15 & 3 & \\ & & 3 & 4 & \\ & 8 & & 2 & \\ 9 & 8 & & 2 & 15 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 10 & & & & 11 \\ & 21 & 13 & & \\ & 11 & 6 & & \\ & & & & 17 \\ 17 & & & & 17 \end{vmatrix} \quad J^{(2)} = \begin{vmatrix} -6 - 21 \cdot 2 - 5 \cdot 1 \\ -21 - 6 \cdot 3 - 8 \cdot 5 \\ -5 - 6 \cdot 4 - 8 \cdot 1 \\ -8 - 21 \cdot 3 - 5 \cdot 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -53 \\ -79 \\ -37 \\ -81 \end{vmatrix}$$

Hieraus die zwei neuen Gleichungssätze:

$$\begin{aligned} (1-10) \cdot x_1 - 11 \cdot x_4 &= -53 & (1-21) \cdot x_2 - 13 \cdot x_3 &= -79 \\ -17 \cdot x_1 + (1-17) \cdot x_4 &= -81 & -11 \cdot x_2 + (1-6) \cdot x_3 &= -37 \end{aligned}$$

3. Lösung durch sukzessive Approximation.

Falls A^n gegen Null konvergiert, wenn n gegen ∞ konvergiert, kann man X durch sukzessive Approximation finden. Man hat in diesem Falle:

$$X = J^{(1)} + J^{(2)} + \dots = \sum_1^{\infty} J^{(n)}. \quad (11)$$

Man berechnet also nach und nach mit Hilfe von (5) die Größen $J^{(2)}$, $J^{(3)}$... und setzt damit fort, bis sie genügend klein geworden sind. Darnach findet man X aus (11), wobei man in der Summation nur die berechnete endliche Anzahl Glieder aufführt. Praktischen Wert hat ein solches Verfahren selbstverständlich nur dann, wenn die Reihe J rasch gegen Null konvergiert. Man kann übrigens diese Konvergenz beschleunigen, indem man von den Ausgangsgleichungen (4_1) einen neuen Satz von höherer Ordnung (4_n) ableitet und diese als Ausgangsgleichungen benützt. Ein besonderes Interesse hat diese letzte Art bei der Lösung aller Gleichungssätze, die entstehen, wenn man setzt:

$$J^{(1)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \quad J^{(2)} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \dots \quad J^{(n)} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}. \quad (12)$$

Hier nämlich entstehen bei der Behandlung der Ausgangsgleichungen unmittelbar die neuen Koeffizienten und Impulse, die in (4_n) eingesetzt werden sollen.

Wie aus dem Diagramm, Abb. 1, hervorgeht, findet man x_d als Summe aller auf der lotrechten Linie d entstehenden i .

Beispiel:

Zur Veranschaulichung der Methode sei ein Beispiel durchgerechnet. Zwecks einfacher Zahlenrechnung wählen wir folgenden Gleichungssatz (mit der Lösung $x_1 = 3$, $x_2 = 1$, $x_3 = 4$):

$$\begin{aligned} x_1 - 0,20 x_2 - 0,10 x_3 &= 2,4 = i_1, \\ -0,30 x_1 + x_2 - 0,15 x_3 &= -0,5 = i_2, \\ -0,05 x_1 - 0,25 x_2 + x_3 &= 3,6 = i_3. \end{aligned}$$

Die Berechnung wird praktischerweise in ein Schema gesetzt:

	1	2	3	
I	0	0,20	0,10	} = A
II	0,30	0	0,15	
III	0,05	0,25	0	
(1)	$i_1 = 2,4$	$i_2 = -0,5$	$i_3 = 3,6$	
(2)	$i_1^{(2)} = 0,26$	$i_2^{(2)} = 1,26$	$i_3^{(2)} = -0,005$	
(3)	$i_1^{(3)} = 0,2515$	$i_2^{(3)} = 0,07725$	$i_3^{(3)} = 0,328$	
(4)	0,04825	0,12465	0,03189	
	0,02812	0,01926	0,03358	
	0,00721	0,01347	0,00622	
	0,00332	0,00310	0,00373	
	0,00099	0,00156	0,00094	
	0,00043	0,00044	0,00043	
	0,00013	0,00019	0,00013	
	0,00005	0,00006	0,00006	
	0,00002	0,00003	0,00002	
	0,00001	0,00001	0,00001	
	$x_1 = 3,00003$	$x_2 = 1,00002$	$x_3 = 4,00001$	

$i_1^{(2)}, i_2^{(2)}, i_3^{(2)}$ (= Zeile (2)) ist durch sukzessives Kombinieren der Zeile (3) linear mit den Zeilen I, II, III entstanden, Zeile (3) dadurch, daß man Zeile (2) auf analoge Weise behandelt usw.

Will man den Gleichungssatz 2. Ordnung benutzen, so erhält man:

$$\begin{aligned} a_{11}^{(2)} &= 0,3 \cdot 0,2 + 0,05 \cdot 0,1 = 0,065, & a_{21}^{(2)} &= 0,25 \cdot 0,1 = 0,025, \\ a_{12}^{(2)} &= 0,05 \cdot 0,15 = 0,0075, & a_{22}^{(2)} &= 0,2 \cdot 0,3 + 0,25 \cdot 0,15 = 0,0975, \\ a_{13}^{(2)} &= 0,3 \cdot 0,25 = 0,075, & a_{23}^{(2)} &= 0,2 \cdot 0,05 = 0,01, \end{aligned}$$

$$a_{31}^{(2)} = 0,15 \cdot 0,2 = 0,03$$

$$a_{32}^{(2)} = 0,1 \cdot 0,3 = 0,03$$

$$a_{33}^{(2)} = 0,1 \cdot 0,05 + 0,15 \cdot 0,25 = 0,0425$$

$$i_1 + i_1^{(2)} = 2,4 - 0,2 \cdot 0,5 + 0,1 \cdot 3,6 = 2,660$$

$$i_2 + i_2^{(2)} = -0,5 + 0,3 \cdot 2,4 + 0,15 \cdot 3,6 = 0,760$$

$$i_3 + i_3^{(2)} = 3,6 + 0,05 \cdot 2,4 - 0,25 \cdot 0,5 = 3,595$$

Man hat somit:

$$A^2 = \begin{vmatrix} 0,0650 & 0,0250 & 0,0300 \\ 0,0075 & 0,0975 & 0,0300 \\ 0,0750 & 0,0100 & 0,0425 \end{vmatrix} \quad J^{(2)} = \begin{vmatrix} 2,660 \\ 0,760 \\ 3,595 \end{vmatrix}$$

Daraus ergibt sich das Berechnungsschema:

$$\text{Neues } A = \begin{cases} 0,0650 & 0,0250 & 0,0300 \\ 0,0075 & 0,0975 & 0,0300 \\ 0,0750 & 0,0100 & 0,0425 \end{cases}$$

$$\text{Neues } i = \begin{cases} 2,660 & 0,760 & 3,595 \\ 0,29975 & 0,20190 & 0,35989 \\ 0,03533 & 0,03273 & 0,03980 \\ 0,00431 & 0,00465 & 0,00467 \\ 0,00054 & 0,00063 & 0,00057 \\ 0,00007 & 0,00008 & 0,00007 \\ 0,00001 & 0,00001 & 0,00001 \end{cases}$$

$$x_1 = 3,00001 \quad x_2 = 1,00000 \quad x_3 = 4,00001$$

Will man gleichzeitig alle Gleichungssätze (12) lösen, so kann man die Berechnung nach nachfolgendem Schema durchführen, wo man zuerst die Ausgangsgleichungen benutzt hat und darnach zu den Gleichungen 4. Ordnung übergegangen ist.

$$\begin{array}{ccc} & \begin{matrix} 0 & 0,20 & 0,10 \\ 0,30 & 0 & 0,15 \\ 0,05 & 0,25 & 0 \end{matrix} & \\ \hline 1,07400 & \begin{cases} 1 \\ 0 \\ 0,0650 \\ 0,00900 \end{cases} & 0,33825 & \begin{cases} 0 \\ 0,30 \\ 0,0075 \\ 0,03075 \end{cases} & 0,13013 & \begin{cases} 0 \\ 0,05 \\ 0,0750 \\ 0,00513 \end{cases} \\ a_{11}^{(4)} = 0,00666 & a_{12}^{(4)} = 0,00347 & a_{13}^{(4)} = 0,00814 & \\ \hline \text{Neues } a_{11} & = 0,00666 & & 0,00436 & & 0,00398 \\ \text{„ } a_{12} & = 0,00347 & & 0,01000 & & 0,00443 \\ \text{„ } a_{13} & = 0,00814 & & 0,00328 & & 0,00436 \end{array}$$

	1,07400	0,33825	0,13013
	0,00915	0,00769	0,01042
	0,00014	0,00015	0,00015
$x_1 =$	1,08329	$x_2 =$	0,34609
	0	0,20	0,10
	0,30	0	0,15
	0,05	0,25	0
0,24550	$\begin{cases} 0 \\ 0,20 \\ 0,0250 \\ 0,02050 \end{cases}$	1,10650	$\begin{cases} 1 \\ 0 \\ 0,0975 \\ 0,00900 \end{cases}$
$a_{21}^{(4)} =$	0,00436	$a_{22}^{(4)} =$	0,01000
	0,00666	Neues $a_{21} =$	0,00436
	0,00347	„ $a_{22} =$	0,01000
	0,00814	„ $a_{23} =$	0,00328
	0,24550	1,10650	0,28563
	0,00760	0,01318	0,00687
	0,00014	0,00019	0,00014
$x_1 =$	0,25324	$x_2 =$	1,11987
	0	0,20	0,10
	0,30	0	0,15
	0,05	0,25	0
0,14025	$\begin{cases} 0 \\ 0,10 \\ 0,0300 \\ 0,01025 \end{cases}$	0,19538	$\begin{cases} 0 \\ 0,15 \\ 0,0300 \\ 0,01538 \end{cases}$
$a_{31}^{(4)} =$	0,00398	$a_{32}^{(4)} =$	0,00443
	0,00666	0,00436	Neues $a_{31} =$
	0,00347	0,01000	„ $a_{32} =$
	0,00814	0,00328	„ $a_{33} =$
	0,14025	0,19538	1,05150
	0,00597	0,00710	0,00637
	0,00010	0,00012	0,00010
$x_1 =$	0,14632	$x_2 =$	0,20260
		$x_3 =$	1,05797

Wie schon gesagt, kann diese Methode nur unter der Bedingung ein Resultat ergeben, daß A^n oder, was dasselbe ist, $J^{(n)}$ gegen Null konvergiert, wenn n gegen ∞ konvergiert, und für die praktische Brauchbarkeit muß man noch dazu fordern, daß dies sehr rasch erfolgt.

Nun findet man indessen in der Statik oft Gleichungen, die diese Eigenschaft erfüllen. Hier kann also die Methode angewandt werden.

In Wirklichkeit ist die Methode — mehr oder weniger bewußt — bereits auf einem sehr wichtigen Gebiet der Statik angewandt worden, näm-

lich bei den sogenannten „Festpunktmethoden“⁶⁾, die bei der Behandlung steifer Rahmen mit unbeweglicher Knotenpunktsfigur in Vorschlag gebracht sind. Die „Momentenableitung“, die hier stattfindet, ist in Wirklichkeit eine Lösung der Elastizitätsgleichungen nach vorliegender Methode, wobei Momentenzahl und Momentenverteilungszahl als Koeffizienten in der Komplement-Matrix auftreten, während die primären Momente die Impulse der Ausgangsgleichungen sind.

Zusammenfassung.

Aus einem Satz linearer Gleichungen in der Matrix-Form geschrieben:

$$(E - A)X = J^{(1)}, \quad (4_1)$$

können die neuen Gleichungssätze (4_n) und (6) abgeleitet werden, die u. a. für folgende drei Aufgaben verwendet werden:

1. Lösung von Clapeyron'schen Gleichungen.

Es wird gezeigt, wie man mit Hilfe der Gleichung (4₂) für einen Satz von Clapeyron'schen Gleichungen mit den Unbekannten $x_1, x_2, x_3 \dots x_k$ auf einfache Weise zwei neue Sätze von Clapeyron'schen Gleichungen anschreiben kann, wovon der eine Satz die Unbekannten $x_1, x_3, x_5 \dots$ und der andere Satz die Unbekannten $x_2, x_4, x_6 \dots$ enthält.

2. Lösung eines Systems von 4 Gleichungen mit 4 Unbekannten.

Auch hier werden die Gleichungen mit Hilfe des Ausdruckes (4₂) in zwei Sätze geteilt, wovon der eine Satz die Unbekannten x_1 und x_4 und der andere Satz die Unbekannten x_2 und x_3 enthält.

3. Lösung von linearen Gleichungen durch sukzessive Approximation.

Mit Hilfe der Formel (6) kann durch Summation einer Reihe von sukzessive ausgerechneten Größen für gewisse Gleichungen eine Lösung gefunden werden.

Dieses Verfahren ist identisch mit den „Festpunktmethoden“, die in der Statik bei Behandlung der Rahmenkonstruktionen so oft angewendet werden.

Résumé.

A partir d'un système d'équations linéaires écrites sous la forme matricielle:

$$(E - A)X = J^{(1)} \quad (4_1)$$

on peut établir les systèmes nouveaux des équations (4_n) et (6) qui peuvent, en particulier servir aux fins suivantes:

1. Résolution des équations de Clapeyron.

L'auteur montre comment, à l'aide de l'équation (4₂), et pour un système d'équations de Clapeyron comportant les inconnues $x_1, x_2, x_3 \dots x_k$ on peut

⁶⁾ Es wird besonders hingewiesen auf:

SUTER: Die Methode der Festpunkte. Berlin, 1923.

CROSS: Analysis of continuous frames by distributing fixed-end Moments. Proc. Am. C. E. 1930, Seite 919.

EFSEN: Die Methode der primären Momente. Kopenhagen, 1931.

obtenir d'une manière simple deux nouveaux systèmes d'équations de Clapeyron, dont l'un contient les inconnues $x_1, x_3, x_5 \dots$ et l'autre les inconnues $x_2, x_4, x_6 \dots$.

2. Résolution d'un système de 4 équations à 4 inconnues.

A l'aide de l'expression (4₂), ces équations sont ici encore divisées en deux systèmes dont l'un contient les inconnues x_1 et x_4 et l'autre les inconnues x_2 et x_3 .

3. Résolution d'équations linéaires par approximations successives.

Par sommation d'une série de valeurs successives, on peut à l'aide de la formule (6) trouver la solution de certaines équations.

Ce procédé est identique à la méthode des points fixes, qui est si fréquemment employée en statique pour l'étude des cadres.

Summary.

From a set of linear equations written in the typical form:

$$(E - A)X = J^{(1)}, \quad (4_1)$$

the new sets of equations (4_n) and (6) are derived, which are adopted for the following three problems, as well as for others.

1. Solution of Clapeyron's equations.

It is shown how, by means of the equation (4₂), two new sets of Clapeyron's equations in a simple manner can be substituted for a set of Clapeyron's equations with the unknowns $x_1, x_2, x_3, \dots, x_k$, one of the new sets containing the unknowns $x_1, x_3, x_5, \dots$ and the other set the unknowns $x_2, x_4, x_6 \dots$.

2. Solution of a system of 4 equations with 4 unknowns.

Here also the equations are divided into two sets by means of the expression (4₂), one of the new sets containing the unknowns x_1 and x_4 , and the other set the unknowns x_2 and x_3 .

3. Solution of linear equations by successive approximation.

With the help of formula (6), a solution can be found for certain equations by summation of a series of successively calculated quantities.

This method is identical with the „fixed point methods“ which are so often adopted in statics when dealing with frames.