

Zeitschrift: IABSE publications = Mémoires AIPC = IVBH Abhandlungen
Band: 5 (1937-1938)

Artikel: Calcul direct de la poutre Vierendeel par la méthode des systèmes équivalents
Autor: Marneffe, A. de
DOI: <https://doi.org/10.5169/seals-6161>

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. [Siehe Rechtliche Hinweise.](#)

Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. [Voir Informations légales.](#)

Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. [See Legal notice.](#)

Download PDF: 17.05.2025

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>

CALCUL DIRECT DE LA POUTRE VIERENDEEL PAR LA MÉTHODE DES SYSTÈMES ÉQUIVALENTS.

BERECHNUNG DES VIERENDEEL-TRÄGERS NACH DER METHODE DER GLEICHWERTIGEN SYSTEME.

THE DIRECT CALCULATION OF VIERENDEEL GIRDERS BY THE METHOD OF EQUIVALENT SYSTEMS.

A. DE MARNEFFE, Professeur à l'Université de Liège, Belgique.

Introduction.

Le calcul de la poutre Vierendeel habituelle de m panneaux se ramène à la solution d'un système de m équations étagées à m inconnues, chaque équation comprenant trois inconnues sauf les extrêmes qui n'en comportent que deux. Nous sommes parvenus à exprimer sous une forme relativement simple l'expression directe de chaque inconnue en fonction de la sollicitation extérieure de la poutre et de coefficients qui ne dépendent que des dimensions de celle-ci, qui peuvent donc se calculer directement et dont nous donnerons une interprétation concrète. C'est ce résultat que nous nous proposons d'exposer dans ce mémoire.

Cette solution est basée sur la méthode de calcul des constructions hyperstatiques utilisant l'ellipse centrale d'élasticité d'un élément élastique dont elle représente toutes les propriétés élastiques. Ne pouvant reprendre ici l'exposé de cette méthode nous sommes obligés de renvoyer le lecteur à notre ouvrage intitulé „Les constructions hyperstatiques“¹⁾ mais pour sa facilité nous reprendrons cependant les définitions des notations utilisées.

Soit ds la longueur d'un élément d'arc, de coordonnées courantes (ξ, η) , dont la section présente un moment d'inertie: i . Alors $d\sigma = \frac{ds}{Ei}$ est la masse élastique de cet élément d'arc.

On peut aussi envisager (fig. 1): la masse élastique totale de l'arc G_0G_1 : $\sigma = \int_0^s d\sigma$; son centre de gravité C_g , de coordonnées (x', y') obtenues par le calcul des moments du 1^{er} degré de ces masses; ainsi que leurs moments du 2^e degré, analogues à des moments et produits d'inertie, pris par rapport aux axes coordonnés OXY :

$$I_x = \int_0^s \eta^2 d\sigma \quad I_y = \int_0^s \xi^2 d\sigma \quad J_{x'y'} = \int_0^s \xi \eta d\sigma.$$

¹⁾ Bibliothèque scientifique belge: No. 31, 1937. G. Thône, éditeur à Liège, et Dunod, éditeur à Paris.

Les numéros indiqués dans le texte se réfèrent aux paragraphes et formules de cet ouvrage.

Ces valeurs définissent une ellipse dite ellipse d'élasticité de l'arc, et si les axes coordonnés sont les axes principaux $C_g xy$ de cette ellipse passant par C_g elle prend le nom d'ellipse centrale d'élasticité de l'arc.

Soit μ , ν , τ les moments de flexion, efforts normaux et efforts tranchants qui se produiraient sous l'action de charges extérieures dans les diverses sections G' du système isostatique de référence. Ce système est ici une poutre reposant librement sur deux appuis G_0 et G_1 .

Les valeurs définissant la réaction complémentaire hyperstatique de l'arc R_0 sont:

A = moment de cette réaction par rapport à l'origine des axes = $R_0 \cdot d$. B et C projections de cette réaction sur les axes OY et OX . Ces valeurs, inconnues hyperstatiques, sont données par les équations générales (no 23).

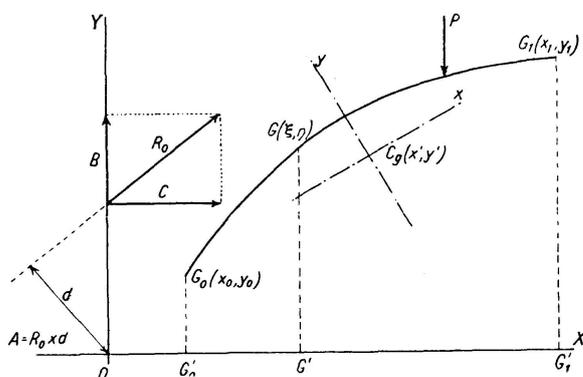


Fig. 1.

$$(23) \quad \left\{ \begin{array}{l} A\sigma + Bx'\sigma - Cy'\sigma = -\int \mu d\sigma + (\omega_1 - \omega_0) \\ Ax'\sigma + BI_y - CJ_{x'y} = -\int \mu \xi d\sigma - \int \nu \varrho^2 \frac{d\eta}{ds} d\sigma - \int \tau \varrho^2 \frac{d\xi}{ds} d\sigma \\ \quad + (v_0 - \omega_0 x_0) - (v_1 - \omega_1 x_1) \\ Ay'\sigma + BJ_{x'y} - CI_x = -\int \mu \eta d\sigma + \int \nu \varrho^2 \frac{d\xi}{ds} d\sigma - \int \tau \varrho^2 \frac{d\eta}{ds} d\sigma \\ \quad - (u_0 + \omega_0 y_0) + (u_1 + \omega_1 y_1). \end{array} \right.$$

En appelant u le déplacement horizontal de la section de l'arc indiquée par l'indice.

v son déplacement vertical,
 ω sa rotation.

Si l'on choisit comme axes coordonnés les axes principaux $C_g xy$ de l'ellipse centrale d'élasticité de l'arc, alors C_g et 0 se confondent et $x' = y' = 0$, $J_{x'y} = 0$, $I_{x'}$ et $I_{y'x}$ deviennent I_x et I_y et les premiers membres des équations (23) deviennent (24).

$$(24) \quad \left\{ \begin{array}{l} A\sigma = -\int \mu d\sigma + (\omega_1 - \omega_0) \\ BI_y = -\int \mu \xi d\sigma + (\text{etc.}) \\ -CI_x = -\int \mu \eta d\sigma + (\text{etc.}) \end{array} \right.$$

Lorsque plusieurs tronçons d'arc se font suite on peut les considérer comme ne formant qu'un seul arc dont on peut rechercher l'ellipse centrale d'élasticité par voie de sommation. C'est ce que nous appelons „combiner les arcs en série“.

Tous les systèmes ayant même ellipse centrale d'élasticité sont identiquement déformables et peuvent se substituer l'un à l'autre au point de vue des déplacements élastiques de leurs extrémités. Ce sont des systèmes dits „équivalents“.

De même deux points peuvent être réunis par plusieurs arcs élastiques. On peut substituer à tous ces arcs un arc unique ayant même ellipse centrale

d'élasticité que tous ensemble donc équivalent. La recherche de cette ellipse est ce que nous appelons „combiner les arcs en parallèle“.

Les formules nécessaires à ce sujet sont données aux numéros 47 à 51 et 70—71 de l'ouvrage précité.

1. Sollicitation d'un cadre trapézoïdal, panneau isolé d'une poutre Vierendeel de hauteur variable.

Soit $ab b' a'$ (fig. 2) un panneau trapézoïdal isolé de la poutre Vierendeel, tourné de 90° dans son plan, de hauteur $= \lambda$ et dont les longueurs des côtés parallèles aa' et bb' sont respectivement h_a et h_b .

Nous le rapportons au système d'axes $0 x' y'$ dirigés comme l'indique la figure 2, avec l'origine 0 en a .

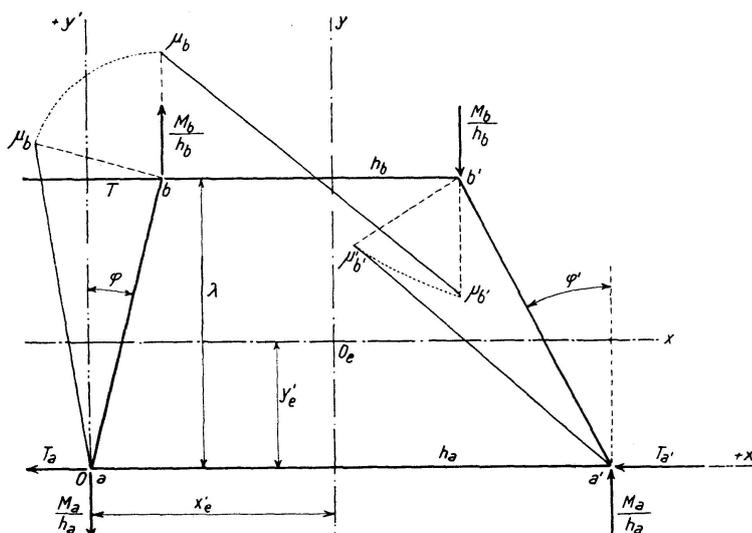


Fig. 2.

Soit φ et φ' les inclinaisons des côtés ab et $a'b'$ sur la direction $0 y'$, le signe des φ étant pris dans le sens trigonométrique. On a alors la relation: $h_a - h_b = -\lambda (\text{tg } \varphi - \text{tg } \varphi')$. Nous supposons ce cadre sollicité (voir aussi la figure 3):

1° par un moment de flexion M_b extérieur agissant au droit de bb' et se décomposant en un couple de forces $\pm \frac{M_b}{h_b}$ appliquées en b et b' ;

2° par une force T appliquée en b parallèlement à bb' . Nous adoptons comme système de référence celui dans lequel aa' est coupé en a et reposant en a et a' sur des appuis extérieurs, fixes dans le sens $0 y'$, mais élastiques dans le sens $0 x'$. Les réactions des appuis sont données par: $M_a = M_b + T \lambda$ soit selon $0 y'$:

$$\text{en } a: \quad -\frac{M_a}{h_a} = -\frac{M_b}{h_a} - \frac{T \lambda}{h_a} \quad \text{et en } a': \quad +\frac{M_a}{h_a}$$

et selon $0 x'$, T se partage entre a et a' soit en T_a et $T_{a'}$ en sorte que $T + T_a + T_{a'} = 0$.

C'est une hypothèse que nous pouvons prendre comme point de départ ou sollicitation de référence, nous choisirons plus loin T_a et $T_{a'}$, en vue de simplifier la solution.

Les sollicitations isostatiques des barres sont alors

$$(141) \left\{ \begin{array}{l} \text{barre } ab: \quad x' = -y' \operatorname{tg} \varphi \quad Y'_{ab} = -\frac{M_a}{h_a} \quad X'_{ab} = T_a \\ \quad \mu_{ab} = y' \left(\frac{M_a}{h_a} \operatorname{tg} \varphi - T_a \right) \\ \text{barre } a'b': \quad x' = h_a - y' \operatorname{tg} \varphi' \quad Y'_{a'b'} = \frac{+M_a}{h_a} \quad X'_{a'b'} = T_{a'} \\ \quad \mu_{a'b'} = -y' \left(\frac{M_a}{h_a} \operatorname{tg} \varphi' + T_{a'} \right) \\ \text{barre } bb': \quad v = -T_{a'} \quad \tau = -\frac{M_a}{h_a} + \frac{M_b}{h_b} \\ \quad \mu_{bb'} = \lambda \left(\frac{M_b}{h_b} \operatorname{tg} \varphi - T_a \right) - \left(\frac{M_a}{h_a} - \frac{M_b}{h_b} \right) x' \\ \text{barre } aa': \quad v = 0 \quad \tau = 0 \quad \mu_{aa'} = 0 \end{array} \right.$$

Les caractéristiques élastiques des barres sont:

$$(142) \left\{ \begin{array}{l|l|l|l|l|l|l} \text{barre} & \text{masse} & x' & y' & I_x & I_y & J_{xy} \\ \hline ab & \sigma_{ab} = \frac{\lambda'}{Ei_{ab} \cos \varphi} & -\frac{\lambda}{2} \operatorname{tg} \varphi & \frac{\lambda}{2} & I_{ab} = \frac{\sigma_{ab} \lambda^2}{4\nu_{ab}} & I_{ab} \operatorname{tg}^2 \varphi & -I_{ab} \operatorname{tg} \varphi \\ \hline a'b' & \sigma_{a'b'} = \frac{\lambda'}{Ei_{a'b'} \cos \varphi'} & \left(h_a - \frac{\lambda}{2} \operatorname{tg} \varphi' \right) & \frac{\lambda}{2} & I_{a'b'} = \frac{\sigma_{a'b'} \lambda^2}{4\nu_{a'b'}} & I_{a'b'} \operatorname{tg}^2 \varphi' & -I_{a'b'} \operatorname{tg} \varphi' \\ \hline bb' & \sigma_b = \frac{h_b'}{Ei_b} & \left(\frac{h_b}{2} - \lambda \operatorname{tg} \varphi \right) & \lambda & 0 & I_b = \frac{\sigma_b h_b^2}{4\nu_b} & 0 \\ \hline aa' & \sigma_a = \frac{h_a'}{Ei_a} & \frac{h_a}{2} & 0 & 0 & I_a = \frac{\sigma_a h_a^2}{4\nu_a} & 0 \end{array} \right.$$

Remarque: λ' , h_a' , h_b' sont les longueurs réduites en tenant compte de l'influence des goussets qui se fait sentir également dans le choix des valeurs des coefficients ν_a , ν_b , ν_{ab} (voir formule 38 et 39 ouvrage précité).

2. Déformations du portique isostatique ouvert.

Ces déformations sont données par les termes en μ , ν , τ des équations (23) mais nous pouvons d'abord négliger l'influence des termes en ν et τ vis à vis de celle des termes en μ . Dans ce cas il nous suffit de calculer $\int \mu d\sigma$, $\int \mu \eta d\sigma$ et $\int \mu \xi d\sigma$.

Le problème se simplifie aussi beaucoup si l'on adopte par raison de symétrie

$$\sigma_{ab} = \sigma_{a'b'} \text{ c'est-à-dire } i_{ab} \cos \varphi = i_{a'b'} \cos \varphi' \quad (143)$$

cela revient à adopter le même moment d'inertie réduit pour ab et $a'b'$. On a également la relation

$$h_a - h_b = -\lambda (\operatorname{tg} \varphi - \operatorname{tg} \varphi'). \quad (144)$$

Si nous appelons μ_b et $\mu_{b'}$, les valeurs de μ en b et b' , il vient: en envisageant les diagrammes triangulaires des μ (voir fig. 2):

$$\int \mu d\sigma = \sigma_{ab} \frac{\mu_b}{2} + \frac{\sigma_b \mu_b^2}{2(\mu_b - \mu_{b'})} - \frac{\sigma_b \mu_{b'}^2}{2(\mu_b - \mu_{b'})} + \sigma_{ab} \frac{\mu_{b'}}{2}.$$

On constate que si l'on pose $\mu_b = -\mu_{b'}$, il vient: $\int \mu d\sigma = 0$, à cause de la symétrie élastique de ab et $a'b'$, et aussi: $\int \mu \eta d\sigma = 0$. Nous pouvons donc nous imposer cette condition pour déterminer notre système de référence et en déduire les valeurs à attribuer à T_a et $T_{a'}$. Ceci se justifie par le fait que nous négligeons les déformations longitudinales des barres aa' et bb' .

La condition $\mu_b = -\mu_{b'}$, se traduit par:

$$\lambda \left(\frac{M_a}{h_a} \operatorname{tg} \varphi - T_a \right) = -\lambda \left(\frac{M_a}{h_a} \operatorname{tg} \varphi' + T_{a'} \right)$$

soit
$$\frac{M_a}{h_a} (\operatorname{tg} \varphi + \operatorname{tg} \varphi') = T_a - T_{a'} = T + 2T_a$$

d'où
$$T_a = -\frac{T}{2} + \frac{M_a}{2h_a} (\operatorname{tg} \varphi + \operatorname{tg} \varphi') \quad \text{et} \quad T_{a'} = -\frac{T}{2} - \frac{M_a}{2h_a} (\operatorname{tg} \varphi + \operatorname{tg} \varphi').$$

Dans ces conditions les sollicitations par flexion des diverses barres s'expriment en remplaçant T_a et $T_{a'}$, par leurs valeurs:

$$(145) \quad \left\{ \begin{array}{l} \mu_{ab} = \frac{1}{2} y' \left[T + \frac{M_a}{h_a} (\operatorname{tg} \varphi - \operatorname{tg} \varphi') \right] = \frac{1}{2} y' \left[\frac{M_a - M_b}{\lambda} - \frac{M_a (h_a - h_b)}{h_a \lambda} \right] = \\ \qquad \qquad \qquad \frac{y' h_b}{2\lambda} \left(\frac{M_a}{h_a} - \frac{M_b}{h_b} \right) \\ \mu_{a'b'} = \frac{1}{2} y' \left[T + \frac{M_a}{h_a} (\operatorname{tg} \varphi - \operatorname{tg} \varphi') \right] = \frac{y' h_b}{2\lambda} \left(\frac{M_a}{h_a} - \frac{M_b}{h_b} \right) \\ \mu_{bb'} = \frac{1}{2} [h_a - \lambda (\operatorname{tg} \varphi + \operatorname{tg} \varphi') - 2x'] \left(\frac{M_a}{h_a} - \frac{M_b}{h_b} \right) \end{array} \right.$$

Il restera à calculer $\int \mu \xi d\sigma$ pour ces diverses barres.

Dans cette expression ξ est l'abscisse des éléments $d\sigma$ prise par rapport à l'axe $0y'$ mais comme $\int \mu d\sigma = 0$ on peut le calculer par rapport à un axe parallèle à $0y'$, à une distance quelconque $= x_e$.

En effet soit $\xi = x' - x_e$ alors $\int \mu \xi d\sigma = \int \mu x' d\sigma - x_e \int \mu d\sigma = \int \mu x' d\sigma$

On obtiendra pour ab et $a'b'$ en conservant l'axe $0y'$:

$$\int_a^b \mu_{ab} x' d\sigma_{ab} = \left(\frac{M_a}{h_a} - \frac{M_b}{h_b} \right) \frac{h_b}{2\lambda} \int_a^b x' y' d\sigma_{ab}$$

Pour ab : $x' = -y' \operatorname{tg} \varphi \quad \int_a^b x' y' d\sigma = -\operatorname{tg} \varphi \int_0^\lambda y'^2 d\sigma = -\operatorname{tg} \varphi \frac{\sigma_{ab} \lambda^2}{4} \left(\frac{1 + \nu_{ab}}{\nu_{ab}} \right)$

Pour $a'b'$: $x' = h_a - y' \operatorname{tg} \varphi' \quad \int_{a'}^{b'} x' y' d\sigma = h_a \int_0^\lambda y' d\sigma - \operatorname{tg} \varphi' \int_0^\lambda y'^2 d\sigma =$

$$h_a \frac{\sigma_{ab} \lambda}{2} - \operatorname{tg} \varphi' \frac{\sigma_{ab} \lambda^2}{4} \left(\frac{1 + \nu_{ab}}{\nu_{ab}} \right)$$

Pour bb' :
$$\mu_b = -\mu_{b'} = \frac{h_b}{2} \left(\frac{M_a}{h_a} - \frac{M_b}{h_b} \right)$$

et ici pour simplifier on choisit l'axe par le milieu de bb' , il vient:

$$\mu_{bb'} = -\frac{2\mu_b}{h_b} \xi = -\xi \left(\frac{M_a}{h_a} - \frac{M_b}{h_b} \right) \text{ et } \int_b^{b'} \mu_{bb'} \xi d\sigma_b = -\left(\frac{M_a}{h_a} - \frac{M_b}{h_b} \right) \frac{\sigma_b h_b^2}{4\nu_b}$$

On obtiendra donc par sommation, pour un axe quelconque parallèle à $0y'$:

$$-v = \int \mu \xi d\sigma = \int_a^b \mu \xi d\sigma + \int_b^{b'} \mu \xi d\sigma - \int_{a'}^{b'} \mu \xi d\sigma$$

$$v = \left(\frac{M_a}{h_a} - \frac{M_b}{h_b} \right) \left[\frac{\sigma_b h_b^2}{4\nu_b} + \frac{\sigma_{ab} h_b}{8} \left(2h_a + \frac{1 + \nu_{ab}}{\nu_{ab}} \lambda (\operatorname{tg} \varphi - \operatorname{tg} \varphi') \right) \right]$$

Or $2h_a + \left(\frac{1 + \nu_{ab}}{\nu_{ab}} \right) \lambda (\operatorname{tg} \varphi - \operatorname{tg} \varphi') = 2h_a + \left(\frac{1 + \nu_{ab}}{\nu_{ab}} \right) (h_b - h_a) = h_a \frac{\nu_{ab} - 1}{\nu_{ab}} + h_b \frac{\nu_{ab} + 1}{\nu_{ab}}$

et en adoptant les notations suivantes:

$$2h'_b = h_a \left(\frac{\nu_{ab} - 1}{\nu_{ab}} \right) + h_b \left(\frac{\nu_{ab} + 1}{\nu_{ab}} \right) \quad 2h''_a = h_a \left(\frac{\nu_{ab} + 1}{\nu_{ab}} \right) + h_b \left(\frac{\nu_{ab} - 1}{\nu_{ab}} \right) \quad (146)$$

$$I'_{ab} = \frac{\sigma_{ab} h_b h'_b}{4} \quad I''_{ab} = \frac{\sigma_{ab} h_a h''_a}{4} \quad (147)$$

il vient

$$v = \left(\frac{M_a}{h_a} - \frac{M_b}{h_b} \right) \cdot (I_b + I'_{ab}) \quad (148)$$

3. Caractéristiques élastiques du cadre fermé.

Déterminons l'ellipse centrale d'élasticité du cadre complet $abb'a'$.

Sa masse élastique totale = $\sigma_e = \sigma_a + \sigma_b + 2\sigma_{ab}$ (149)

Son centre de gravité 0_e de coordonnées x'_e, y'_e par rapport à $0x'y'$

$$(150) \quad y'_e = \lambda \frac{\sigma_b + \sigma_{ab}}{\sigma_e} \quad x'_e = \frac{h_a}{2} - \frac{\lambda}{2} (\operatorname{tg} \varphi + \operatorname{tg} \varphi') \frac{\sigma_b + \sigma_{ab}}{\sigma_e} = \frac{1}{2} [h_a - y'_e (\operatorname{tg} \varphi + \operatorname{tg} \varphi')]$$

Nous prendrons ensuite ses moments du second degré par rapport à des axes orthogonaux $0_e xy$ passant par ce centre de gravité.

$$I_{xe} = 2I_{ab} + 2\sigma_{ab} \left(\frac{\lambda}{2} - y'_e \right)^2 + \sigma_b (\lambda - y'_e)^2 + \sigma_a y_e'^2$$

Or $\lambda - y'_e = \lambda \frac{\sigma_a + \sigma_{ab}}{\sigma_e} \quad \frac{\lambda}{2} - y'_e = \frac{\lambda}{2} \frac{\sigma_a - \sigma_b}{\sigma_e}$

$$I_{xe} = 2I_{ab} + \frac{\lambda^2}{2\sigma_e^2} [\sigma_{ab} (\sigma_a - \sigma_b)^2 + 2\sigma_b (\sigma_a + \sigma_{ab})^2 + 2\sigma_a (\sigma_b + \sigma_{ab})^2]$$

et simplifiant:

$$I_{xe} = 2I_{ab} + \frac{\lambda^2}{2\sigma_e} [\sigma_a (\sigma_b + \sigma_{ab}) + \sigma_b (\sigma_a + \sigma_{ab})] \quad (151)$$

$$-J_{xye} = I_{ab} \operatorname{tg} \varphi + I_{ab} \operatorname{tg} \varphi' + \sigma_{ab} \left(\frac{\lambda}{2} - y'_e \right) \left(x'_e + \frac{\lambda}{2} \operatorname{tg} \varphi \right) - \sigma_{ab} \left(\frac{\lambda}{2} - y'_e \right) \left(h_a - \frac{\lambda}{2} \operatorname{tg} \varphi' - x'_e \right)$$

$$- \sigma_b \frac{\lambda - y'_e}{2} [h_a - \lambda (\operatorname{tg} \varphi + \operatorname{tg} \varphi') - x'_e] + \sigma_a \frac{y_e'^2}{2} (\operatorname{tg} \varphi + \operatorname{tg} \varphi')$$

et il vient

$$\boxed{J_{xye} = -I_{xe} \cdot \frac{1}{2} (\operatorname{tg} \varphi + \operatorname{tg} \varphi')} \quad (152)$$

$$\begin{aligned} I_{ye} &= I_{ab} (\operatorname{tg}^2 \varphi + \operatorname{tg}^2 \varphi') + I_a + I_b + \sigma_{ab} \left[\left(x'_e + \frac{\lambda}{2} \operatorname{tg} \varphi \right)^2 + \left(h_a - \frac{\lambda}{2} \operatorname{tg} \varphi' - x'_e \right)^2 \right] \\ &\quad + \sigma_b \left(\frac{h_b}{2} - x'_e - \lambda \operatorname{tg} \varphi \right)^2 + \sigma_a \left(\frac{h_a}{2} - x'_e \right)^2 \\ &= I_{ab} (\operatorname{tg}^2 \varphi + \operatorname{tg}^2 \varphi') + I_a + I_b + \frac{\sigma_{ab}}{2} \left[h_a h_b - y'_e (\lambda - y'_e) (\operatorname{tg} \varphi + \operatorname{tg} \varphi')^2 + \frac{\lambda^2}{2} (\operatorname{tg}^2 \varphi + \operatorname{tg}^2 \varphi') \right] \\ &\quad + \left[\sigma_b \frac{(\lambda - y'_e)^2}{4} + \sigma_a \frac{y'_e{}^2}{4} \right] (\operatorname{tg} \varphi + \operatorname{tg} \varphi')^2 \end{aligned}$$

et après transformation et simplifications :

$$\boxed{I_{ye} = I_a + I_b + I_{ab} (1 + \nu_{ab}) (\operatorname{tg}^2 \varphi + \operatorname{tg}^2 \varphi') + \frac{\sigma_{ab} h_a h_b}{2} + \frac{\lambda^2}{4 \sigma_e} (\sigma_a \sigma_b - \sigma_{ab}^2) (\operatorname{tg} \varphi + \operatorname{tg} \varphi')^2} \quad (153)$$

Calculons encore l'expression suivante qui se justifiera dans la suite :

$$\begin{aligned} I_{re} &= I_{ye} - \frac{J_{xye}^2}{I_{xe}} = I_{ye} - I_{xe} \cdot \frac{1}{4} (\operatorname{tg} \varphi + \operatorname{tg} \varphi')^2 \\ I_{re} &= I_a + I_b + \frac{\sigma_{ab} h_a h_b}{2} + I_{ab} \frac{(1 + \nu_{ab})}{2} (\operatorname{tg} \varphi - \operatorname{tg} \varphi')^2 \\ I_{re} &= I_a + I_b + \frac{\sigma_{ab}}{8} \left[(h_a + h_b)^2 + \frac{(h_a - h_b)^2}{\nu_{ab}} \right] \end{aligned}$$

Or :

$$(h_a + h_b)^2 + \frac{(h_a - h_b)^2}{\nu_{ab}} = 2 h_a h_a'' + 2 h_b h_b'$$

$$\boxed{I_{re} = I_a + I_b + I_{ab}' + I_{ab}'' = I_{ye} - \frac{J_{xye}^2}{I_{xe}}} \quad (154)$$

4. Réactions complémentaires de fermeture du cadre.

Pour pouvoir refermer le cadre sollicité et ouvert en a il faut appliquer sur les lèvres de l'ouverture des forces égales et de signes contraires et les composantes agissant sur a , extrémité de ab , sont A, B, C , si on les exprime par rapport aux axes $0_e xy$, fig. 2. Elles se déduisent des formules (23) qui deviennent ici :

$$(155) \left\{ \begin{array}{l} A \sigma_e = - \int \mu d \sigma = 0 \\ B I_{ye} - C J_{xye} = - \int \mu \xi d \sigma = v \\ B J_{xye} - C I_{xe} = - \int \mu \eta d \sigma = 0 \end{array} \right\} \text{ donc } \begin{array}{l} A = 0 \\ C = B \frac{J_{xye}}{I_{xe}} = - \frac{B}{2} (\operatorname{tg} \varphi + \operatorname{tg} \varphi') \end{array} \quad (156)$$

et alors

$$B \left[I_{ye} - \frac{J_{xye}^2}{I_{xe}} \right] = B I_{re} = v \quad \text{donc} \quad (157) \quad \boxed{B = \frac{v}{I_{re}}} \quad \text{et} \quad \boxed{C = - \frac{v}{2 I_{re}} \operatorname{tg} \varphi + \operatorname{tg} \varphi'}$$

avec (148) on obtient finalement:

$$(158) \quad B = \left(\frac{M_a}{h_a} - \frac{M_b}{h_b} \right) \cdot \frac{I_b + I'_{ab}}{I_a + I_b + I'_{ab} + I''_{ab}} = \gamma' \left(\frac{M_a}{h_a} - \frac{M_b}{h_b} \right) \quad \text{si on pose } \gamma' = \frac{I_b + I'_{ab}}{I_{re}}$$

5. Sollicitations totales des barres du cadre fermé.

On les obtient en ajoutant les effets des réactions complémentaires aux sollicitations isostatiques (141) et (145)

$$\begin{aligned} X &= X' + C = X' - \frac{B}{2} (\operatorname{tg} \varphi + \operatorname{tg} \varphi') \\ Y &= Y' + B \\ M &= \mu + Bx - Cy = \mu + B \left[x' + \frac{y'}{2} (\operatorname{tg} \varphi + \operatorname{tg} \varphi') - \frac{h_a}{2} \right] \end{aligned} \quad (159)$$

Soit pour chaque barre après simplifications:

$$\text{Barre } ab \quad Y_{ab} = Y'_{ab} + B = - \frac{M_a}{h_a} (1 - \gamma') - \frac{M_b}{h_b} \gamma' \quad (160)$$

$$X_{ab} = X'_{ab} - \frac{B}{2} (\operatorname{tg} \varphi + \operatorname{tg} \varphi') = - \frac{T}{2} - Y_{ab} \cdot \frac{1}{2} (\operatorname{tg} \varphi + \operatorname{tg} \varphi') \quad (161)$$

$$M_{ab} = \frac{1}{2\lambda} \left(\frac{M_a}{h_a} - \frac{M_b}{h_b} \right) [-\gamma' (\lambda - y') h_a + (1 - \gamma') y' h_b] \quad (162)$$

On voit que M_{ab} s'annule pour une section donnée par y'_0 tel que

$$\frac{y'_0}{\lambda - y'_0} = \frac{h_a \gamma'}{h_b (1 - \gamma')}$$

$$\text{Barre } a'b' \quad Y_{a'b'} = -Y_{ab} \quad X_{a'b'} = -\frac{T}{2} + Y_{ab} \cdot \frac{1}{2} (\operatorname{tg} \varphi + \operatorname{tg} \varphi') \quad (161)$$

$$M_{a'b'} = M_{ab}$$

Donc en résumé, si l'on fait une coupe complète dans le cadre parallèlement à $0x'$ et si on suppose enlevé ce qui est au-dessous, les sollicitations dans les membrures coupées sont les suivantes:

Les moments de flexion sont égaux et de même signe: $M_{ab} = M_{a'b'}$ (162).

Les composantes des efforts selon $0y$ sont égales et de signes contraires (160).

Les composantes transversales selon $0x$ sont inégales mais leur somme équilibre l'effort total T car on vérifie par (161) et (161') que $X_{ab} + X_{a'b'} = T$.

Notamment aux extrémités des barres on obtient:

$$\left. \begin{aligned} \text{en } b \quad y' = \lambda \quad M_b &= + \frac{(1 - \gamma')}{2} h_b \left(\frac{M_a}{h_a} - \frac{M_b}{h_b} \right) \\ \text{en } a \quad y' = 0 \quad M_a &= - \gamma' \frac{h_a}{2} \left(\frac{M_a}{h_a} - \frac{M_b}{h_b} \right) \end{aligned} \right\} \quad (163)$$

6. Montant fictif équivalent à un cadre.

Supposons qu'au cadre $abb'a'$ soit accolé un autre cadre analogue dont la barre aa' constituerait un élément commun. On peut considérer que le

1^{er} cadre constitue un montant fictif du second et on peut se proposer de calculer les caractéristiques élastiques c'est-à-dire les caractéristiques de l'ellipse centrale d'élasticité du système équivalent au portique $abb'a'$ et à la barre aa' disposés en parallèle entre les deux points aa' .

On peut donc à cet effet utiliser les formules établies dans l'ouvrage précité pour la combinaison des arcs en parallèle (47) et (51).

Nous conservons les axes $0x'y'$ et soit σ'_{ae} , x'_{ae} , y'_{ae} , I'_{xae} , I'_{yae} , J'_{xae} les caractéristiques de ce système équivalent.

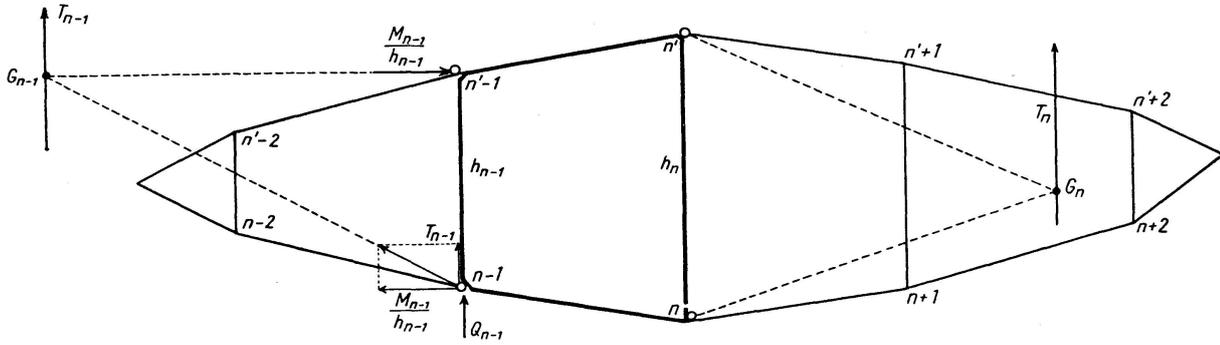


Fig. 3.

Comme on suppose que aa' est indéformable longitudinalement on obtient de suite $y'_{ae} = 0$ $I'_{xae} = 0$ donc $J'_{xae} = 0$ et il reste à calculer I'_{yae} que nous pouvons écrire simplement I'_{ae} par la formule *)

$$(164) \quad \frac{1}{I'_{ae}} = \frac{1}{I'_{ra}} + \frac{1}{I_a} \quad \text{avec} \quad I'_{ra} = I'_{ya} - \frac{J'_{xya}^2}{I'_{xa}}$$

I'_{ra} se rapporte uniquement au portique $abb'a'$ dont il convient de calculer les caractéristiques élastiques en posant simplement $\sigma_i = 0$ dans les valeurs établies pour le cadre (149 à 154)

$$(165) \quad \left\{ \begin{array}{l} \sigma'_a = \sigma_b + 2\sigma_{ab} \quad y'_a = \lambda \frac{\sigma_b + \sigma_{ab}}{\sigma'_a} \quad x'_a = \frac{h_a}{2} - \frac{y'_a}{2} (\text{tg } \varphi + \text{tg } \varphi') \\ I'_{ra} = I_b + I'_{ab} + I''_{ab} \end{array} \right.$$

On obtient donc alors

$$(166) \quad \boxed{I'_{ae} = \frac{I_a \cdot I'_{ra}}{I_a + I'_{ra}} = \frac{I_a(I_b + I'_{ab} + I''_{ab})}{I_a + I_b + I'_{ab} + I''_{ab}}}$$

On obtient aussi facilement $x'_{ae} = \frac{h_a}{2}$ par symétrie élastique. On peut se dispenser de calculer σ'_{ae} qui ne nous sera pas nécessaire dans la suite.

*) Les formules (47) et (51) permettent d'écrire lorsque

$$\left. \begin{array}{l} y'_{ae} = 0 \quad bf - ce = 0 \\ J'_{xae} = 0 \quad bc - af = 0 \end{array} \right\} \quad \text{alors} \quad \Delta = d(ae - b^2)$$

D'autre part $I_{xa} = 0$ donne $\frac{1}{d} = 0$

et alors

$$\sigma'_{ae} = \frac{e}{ae - b^2} \quad x'_{ae} = -\frac{b}{e} \quad I'_{yae} = \frac{a}{ae - b^3} - \frac{e \cdot \frac{b^2}{e^2}}{ae - b^2} = \frac{1}{e}$$

donc
$$e = \frac{1}{I'_{yae}} = \frac{1}{I'_{ra}} + \frac{1}{I_a}$$

7. Cadre équivalent à un panneau d'une poutre Vierendeel.

Soit fig. 4 une poutre Vierendeel constituée par une série de cadres trapézoïdaux accolés et soit le cadre n compris entre les montants numérotés $(n-1)$ et n que nous reproduisons (fig. 3). Soit T_{n-1} la résultante des forces extérieures appliquées à gauche du montant $(n-1)$, soit Q_{n-1} la force extérieure appliquée en $(n-1)$ et soit T_n la résultante des forces extérieures appliquées à droite de $(n-1)$. On a $T_n = T_{n-1} + Q_{n-1}$. Sur la ligne d'action de T_{n-1} prenons un point G_{n-1} que nous relions aux noeuds $(n-1)$ et $(n'-1)$ par deux barres indéformables articulées à leurs extrémités. Ces barres apporteront en ces noeuds des forces dont les composantes horizontales seront égales et de signes contraires, soit $\pm \frac{M_{n-1}}{h_{n-1}}$, et dont les composantes verticales égaleront ensemble T_{n-1} . A celles-ci s'ajoutera la force extérieure Q_{n-1} appliquée directement en $(n-1)$. Si on néglige les déformations longitudinales des montants il n'est pas nécessaire de déterminer chacune des composantes verticales appliquées en

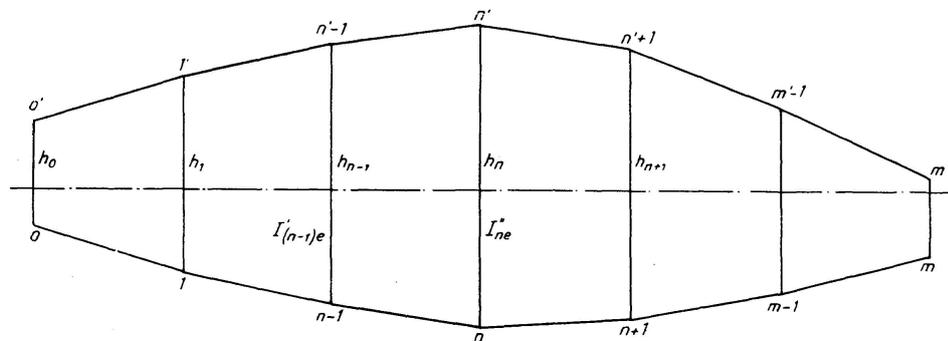


Fig. 4.

$(n-1)$ et $(n'-1)$ et on peut supposer la résultante totale T_n appliquée en $(n-1)$. Cela revient à choisir le point G_{n-1} au niveau de $(n'-1)$. Nous pouvons de même relier un point G_n de la ligne d'action de T_n aux noeuds n et n' par des barres indéformables et articulées à leurs extrémités. Nous pouvons aussi choisir G_n au niveau qui nous convient le mieux pour simplifier nos calculs tant que le cadre n est supposé ouvert en n . Ce cadre n sera alors sollicité exactement comme le cadre type $abb'a'$ représenté fig. 2 tourné de 90° , avec cette différence que le montant $(n-1)$ n'est pas constitué par une barre unique mais par tout le tronçon de poutre de 0 à $(n-1)$ qui se trouve à gauche et le montant n est constitué par tout le tronçon de poutre de n à m se trouvant à droite. Nous devons donc remplacer ces tronçons par des montants fictifs équivalents et présentant les mêmes caractéristiques élastiques que ceux-ci. La sollicitation interne du panneau n sera alors donnée par les formules (146) à (166) ci-dessus établies pour le cadre $abb'a'$ en remplaçant les indices a par n et b par $(n-1)$. Il vient en utilisant les formules (165—166) et en appelant $I'_{(n-1)e}$ le moment d'inertie élastique du montant fictif équivalent à toute la partie gauche de 0 à $(n-1)$, I''_{ne} celui d'équivalent à toute la partie droite de n à m et écrivant I'_n au lieu de I'_{rn} :

$$I'_n = I'_{(n-1)e} + I'_{(n-1)n} + I''_{(n-1)n} \quad (167) \quad I''_{n+1} = I''_{(n+1)e} + I''_{n(n+1)} + I'_{n(n+1)}$$

$$I''_{ne} = \frac{I_n \cdot I'_n}{I_n + I'_n} \quad \text{avec} \quad I'_{oe} = I_o \quad (168) \quad I''_{ne} = \frac{I_n \cdot I''_{n+1}}{I_n + I''_{n+1}} \quad \text{avec} \quad I''_{me} = I_m$$

et pour le cadre équivalent complet:

$$I_{nt} = I'_{(n-1)e} + I'_{(n-1)n} + I''_{(n-1)n} + I''_{ne} \quad (169)$$

avec les conventions suivantes déduites des formules (146 et 147)

$$I'_{(n-1)n} = \frac{\sigma_{(n-1)n} h_{n-1} h'_{n-1}}{4} \quad (170) \quad I''_{(n-1)n} = \frac{\sigma_{(n-1)n} h_n h''_n}{4}$$

$$\text{avec} \quad 2h'_{n-1} = h_{n-1} \left(1 + \frac{1}{\nu_{(n-1)n}}\right) + h_n \left(1 - \frac{1}{\nu_{(n-1)n}}\right) \quad (171)$$

$$2h''_n = h_n \left(1 + \frac{1}{\nu_{(n-1)n}}\right) + h_{n-1} \left(1 - \frac{1}{\nu_{(n-1)n}}\right)$$

Alors la réaction complémentaire due à la sollicitation s'exerçant dans le cadre équivalent est donnée par l'application de (158)

$$(172) \quad B_n = \frac{v'_n}{I_{nt}} = \left(\frac{M_n}{h_n} - \frac{M_{n-1}}{h_{n-1}}\right) \cdot \frac{I'_{(n-1)e} + I'_{(n-1)n}}{I_{nt}} \quad C_n = -B_n \cdot \frac{1}{2}(\text{tg } \varphi_n + \text{tg } \varphi'_n)$$

Si nous appelons N'_n la composante horizontale, c'est-à-dire parallèle à l'axe de la poutre, de l'effort longitudinal dans les membrures $(n-1)n$.

$$\text{On a} \quad N'_n = B_n - \frac{M_n}{h_n} \quad \text{ou bien} \quad N'_n I_{nt} = v'_n - \frac{M_n}{h_n} I_{nt}$$

$$\text{donc} \quad -N'_n I_{nt} = \frac{M_{n-1}}{h_{n-1}} (I'_{(n-1)e} + I'_{(n-1)n}) + \frac{M_n}{h_n} (I''_{ne} + I''_{(n-1)n}) \quad (173)$$

8. Influence de la déformation d'un panneau sur le panneau voisin.

Comme en réalité la résultante T_{n-1} exerce son action aux noeuds $(n-1)$ et $(n'-1)$, non par les barres articulées mais par les panneaux précédents de la poutre il en résulte que ces panneaux $(n-1)$, $(n-2)$ se déforment et cela influencera la déformation du panneau n . Il faudra donc tenir compte de cette influence due à la suppression des barres G_{n-1} .

Plaçons-nous d'abord dans le panneau 1. L'effort sollicitant le montant 11' est B_1 et C_1 , avec $I_{y1} = I_1$ et $J_{xy1} = 0$. Il vient pour l'expression de v'_{21} , déplacement horizontal de 1' par rapport à 1, dû à la sollicitation interne du panneau 1:

$$v'_{21} = B_1 I_1 \quad \text{or} \quad B_1 = \frac{v'_1}{I_1 + I'_1} \quad \text{d'où} \quad v'_{21} = v'_1 \cdot \frac{I_1}{I_1 + I'_1} = v'_1 \cdot \frac{I_{1e}}{I'_1} \quad (174)$$

Ce déplacement v'_{21} viendra s'ajouter au v'_2 dû à la sollicitation du second panneau. Il en serait ainsi successivement de panneau en panneau. Appelons donc v'_{ni} le déplacement v' apporté dans le panneau n par la sollicitation interne du panneau i seul, et soit alors v'_{nn} le déplacement v' dans le panneau n dû à sa propre sollicitation (148).

Les v' exerçant successivement leurs effets d'un panneau à l'autre on aura successivement:

$$\frac{v'_{21}}{v'_{11}} = \frac{I'_{1e}}{I'_1} \quad \frac{v'_{31}}{v'_{11}} = \frac{I'_{1e}}{I'_1} \cdot \frac{I'_{2e}}{I'_2} = \text{etc. soit } \boxed{\frac{v'_{ni}}{v'_{ii}} = \frac{I'_{ie}}{I'_i} \cdot \frac{I'_{(i+1)e}}{I'_{i+1}} \dots \frac{I'_{(n-1)e}}{I'_{n-1}}} \quad (175)$$

et de droite à gauche, en utilisant alors les indices "

$$\frac{v''_{(m-1)m}}{v''_{mm}} = \frac{I''_{(m-1)e}}{I''_m} \quad \frac{v''_{(m-2)m}}{v''_{mm}} = \frac{I''_{(m-1)e}}{I''_m} \cdot \frac{I''_{(m-2)e}}{I''_{m-1}}$$

$$\boxed{\frac{v''_{ni}}{v''_{ii}} = \frac{I''_{ne}}{I''_{n+1}} \cdot \frac{I''_{(n+1)e}}{I''_{n+2}} \dots \frac{I''_{(i-1)e}}{I''_i}} \quad (175)$$

avec

$$\boxed{v'_{ii} = \left(\frac{M_i}{h_i} - \frac{M_{i-1}}{h_{i-1}} \right) \left(I'_{(i-1)e} + I'_{(i-1)i} \right)} \quad (176) \quad \boxed{v''_{ii} = \left(\frac{M_{i-1}}{h_{i-1}} - \frac{M_i}{h_i} \right) \left(I''_{ie} + I''_{(i-1)i} \right)}$$

Pour obtenir le déplacement total v_{ni} dans le panneau n il faudra donc faire la sommation des déplacements v'_{ni} et v''_{ni} dus aux déformations de tous les autres panneaux de part et d'autre, en écrivant v'_{ni} si $i < n$ et v''_{ni} si $i > n$

$$\boxed{v_{ni} = \sum_{i=1}^{i=n-1} v'_{ni} + v'_{nn} + \sum_{i=m}^{i=n+1} v''_{ni}} \quad (177)$$

On en déduira alors $B_{nt} = \frac{v_{nt}}{I_{nt}}$ et $-N_n = \frac{M_n}{h_n} - \frac{v_{nt}}{I_{nt}}$

$$-N_n I_{nt} = \frac{M_{n-1}}{h_{n-1}} \left(I'_{(n-1)e} + I'_{(n-1)n} \right) + \frac{M_n}{h_n} \left(I''_{ne} + I''_{(n-1)n} \right) - \sum_1^{n-1} v'_{ni} - \sum_m^{n+1} v''_{ni} \quad (178)$$

9. Sollicitation totale d'un panneau.

On peut simplifier l'expression de N_n . Pour cela examinons la somme des termes relatifs à trois panneaux consécutifs. Soit d'abord les panneaux $(n-1)$, n et $(n+1)$, la part de N_n y relatif est donnée par

$$-v'_{n(n-1)} + \frac{M_n}{h_n} I_{nt} - v'_{nn} - v''_{n(n+1)} \quad \text{qui développé donne:}$$

$$-\left(\frac{M_{n-1}}{h_{n-1}} - \frac{M_{n-2}}{h_{n-2}} \right) \left(I'_{(n-2)e} + I'_{(n-2)(n-1)} \right) \cdot \frac{I'_{(n-1)e}}{I'_{n-1}} + \frac{M_{n-1}}{h_{n-1}} \left(I'_{(n-1)e} + I'_{(n-1)n} \right)$$

$$+ \frac{M_n}{h_n} \left(I''_{ne} + I''_{(n-1)n} \right) - \left(\frac{M_n}{h_n} - \frac{M_{n+1}}{h_{n+1}} \right) \left(I''_{(n+1)e} + I''_{n(n+1)} \right) \cdot \frac{I''_{ne}}{I''_{n+1}}$$

et en groupant les termes de même $\frac{M}{h}$, il vient:

$$\left[+ \frac{M_{n-2}}{h_{n-2}} \left(I'_{(n-2)e} + I'_{(n-2)(n-1)} \right) \cdot \frac{I'_{(n-1)e}}{I'_{n-1}} + \frac{M_{n-1}}{h_{n-1}} \left[\frac{I'_{(n-1)e}}{I'_{n-1}} \left(I'_{n-1} - I'_{(n-2)e} - I'_{(n-2)(n-1)} \right) + I'_{(n-1)n} \right] \right.$$

$$\left. + \frac{M_n}{h_n} \left[I'_{(n-1)n} + \frac{I''_{ne}}{I''_{n+1}} \left(-I''_{(n+1)e} - I''_{n(n+1)} + I''_{n+1} \right) \right] + \frac{M_{n+1}}{h_{n+1}} \left(I''_{(n+1)e} + I''_{n(n+1)} \right) \cdot \frac{I''_{ne}}{I''_{n+1}} \right]$$

Or d'après (167) $I'_{n-1} - I'_{(n-2)e} - I'_{(n-2)(n-1)} = I''_{(n-2)(n-1)}$
 et $I''_{n+1} - I''_{(n+1)e} - I''_{n(n+1)} = I'_{n(n+1)}$

et alors il vient:

$$\left\{ \begin{aligned} & + \frac{M_{n-2}}{h_{n-2}} \cdot I'_{(n-2)e} \cdot \frac{I'_{(n-1)e}}{I'_{n-1}} + \left(\frac{M_{n-2}}{h_{n-2}} I'_{(n-2)(n-1)} + \frac{M_{n-1}}{h_{n-1}} \cdot I''_{(n-2)(n-1)} \right) \cdot \frac{I'_{(n-1)e}}{I'_{n-1}} \\ & \qquad \qquad \qquad + \left(\frac{M_{n-1}}{h_{n-1}} I'_{(n-1)n} + \frac{M_n}{h_n} I''_{(n-1)n} \right) \\ & + \left(\frac{M_n}{h_n} I'_{n(n+1)} + \frac{M_{n+1}}{h_{n+1}} I''_{n(n+1)} \right) \frac{I''_{ne}}{I''_{n+1}} + \frac{M_{n+1}}{h_{n+1}} I''_{n(n+1)} \cdot \frac{I''_{ne}}{I''_{n+1}} \end{aligned} \right.$$

et en adoptant la notation

$$v_n = \frac{M_{n+1}}{h_{n-1}} I'_{(n-1)n} + \frac{M_n}{h_n} I''_{(n-1)n} \quad (179)$$

on obtient:

$$\frac{M_{n-2}}{h_{n-2}} \cdot I'_{(n-2)e} \frac{I'_{(n-1)e}}{I'_{n-1}} + v_{n-1} \cdot \frac{I'_{(n-1)e}}{I'_{n-1}} + v_n + v_{n+1} \frac{I''_{ne}}{I''_{n+1}} + \frac{M_{n+1}}{h_{n+1}} I''_{n(n+1)e} \frac{I''_{ne}}{I''_{n+1}}$$

Si nous envisageons à présent deux termes consécutifs tel que v'_{ni} et $v'_{n(i+1)}$

$$\begin{aligned} -v'_{ni} &= - \left(\frac{M_i}{h_i} - \frac{M_{i-1}}{h_{i-1}} \right) \left(I'_{(i-1)e} + I'_{(i-1)i} \right) \cdot \frac{I'_{ie}}{I'_i} \cdot \frac{I'_{(i+1)e}}{I'_{(i+1)}} \dots \frac{I'_{(n-1)e}}{I'_{n-1}} \\ -v'_{n(i+1)} &= - \left(\frac{M_{i+1}}{h_{i+1}} - \frac{M_i}{h_i} \right) \left(I'_{ie} + I'_{i(i+1)} \right) \cdot \frac{I'_{(i+1)e}}{I'_{(i+1)}} \dots \frac{I'_{(n-1)e}}{I'_{n-1}} \end{aligned}$$

Les expressions (167) donnent encore

$$I'_{(i-1)e} + I'_{(i-1)i} = I'_i - I''_{(i-1)i} \quad \text{et} \quad I'_{ie} + I'_{i(i+1)} = I'_{i+1} - I''_{i(i+1)}$$

On peut donc remplacer ces termes l'un par l'autre et en adoptant celui dont l'expression comporte le même indice que le $\frac{M}{h}$ qu'il multiplie, il vient en additionnant les deux termes:

$$\left[+ \frac{M_{i-1}}{h_{i-1}} \left(I'_{(i-1)e} + I'_{(i-1)i} \right) \frac{I'_{ie}}{I'_i} + \frac{M_i}{h_i} \left(I'_{ie} + I'_{i(i+1)} - I'_{ie} + I''_{(i-1)i} \cdot \frac{I'_{ie}}{I'_i} \right) - \frac{M_{i+1}}{h_{i+1}} \left(I'_{i+1} - I''_{i(i+1)} \right) \right] \frac{I'_{(i+1)e}}{I'_{i+1}} \dots \frac{I'_{(n-1)e}}{I'_{n-1}}$$

et enfin

$$\left[+ \frac{M_{i-1}}{h_{i-1}} I'_{(i-1)e} \cdot \frac{I'_{ie}}{I'_i} + \left(\frac{M_{i-1}}{h_{i-1}} I'_{(i-1)i} + \frac{M_i}{h_i} I''_{(i-1)i} \right) \frac{I'_{ie}}{I'_i} + \left(\frac{M_i}{h_i} I'_{i(i+1)} + \frac{M_{i+1}}{h_{i+1}} I''_{i(i+1)} \right) - \frac{M_{i+1}}{h_{i+1}} I'_{i+1} \right] \frac{I'_{(i+1)e}}{I'_{i+1}} \dots \frac{I'_{(n-1)e}}{I'_{n-1}}$$

et en adoptant la notation v_i définie ci-dessus (179)

$$\left[\frac{M_{i-1}}{h_{i-1}} I'_{(i-1)e} \cdot \frac{I'_{ie}}{I'_i} + v_i \cdot \frac{I'_{ie}}{I'_i} + v_{i+1} - \frac{M_{i+1}}{h_{i+1}} I'_{i+1} \right] \frac{I'_{(i+1)e}}{I'_{(i+1)}} \dots \frac{I'_{(n-1)e}}{I'_{n-1}}$$

Dans la sommation totale il ne demeure que les termes v_i et on obtiendra donc:

$$(180) \left\{ \begin{aligned} -N_n I_{nt} &= v_1 \frac{I'_{1e}}{I'_1} \dots \frac{I'_{(n-1)e}}{I'_{n-1}} + v_2 \frac{I'_{2e}}{I'_2} \dots \frac{I'_{(n-1)e}}{I'_{n-1}} + \dots + v_{n-1} \frac{I'_{(n-1)e}}{I'_{n-1}} \\ &+ v_n + v_{n+1} \frac{I''_{ne}}{I''_{n+1}} + \dots + v_{m-1} \frac{I''_{ne}}{I''_{n+1}} \dots \frac{I''_{(m-2)e}}{I''_{m-1}} + v_m \frac{I''_{ne}}{I''_{n+1}} \dots \frac{I''_{(m-1)e}}{I''_m} \end{aligned} \right.$$

Ce qui peut s'écrire sous la forme simplifiée :

$$(181) \quad -N_n I_{nt} = \sum_{i=1}^{i=n-1} v_i \cdot \frac{v'_{ni}}{v'_{ii}} + v_n + \sum_{i=n+1}^{i=m} v_i \frac{v''_{ni}}{v''_{ii}} \quad \left. \begin{array}{l} \text{si } i < n \\ \text{si } i > n \end{array} \right\} \begin{array}{l} \text{on prend } \left\{ \begin{array}{l} v' \\ v'' \end{array} \right. \end{array}$$

Telle est la formule qui donnera pour chaque panneau n la composante horizontale de l'effort N_n dans les membrures. On constate qu'elle comporte un terme par panneau et le principal est v_n . Les autres termes vont rapidement en décroissant au fur et à mesure que i s'écarte de n de part et d'autre. En pratique pour $i = n \pm 3$ ils deviennent négligeables.

10. Sollicitation des divers éléments d'un panneau.

La connaissance de l'effort N_n permet d'obtenir rapidement les sollicitations des divers éléments d'un panneau. Les composantes horizontales des efforts internes dans les membrures sont donc égales à N_n et de signes contraires pour chacune, soit $+N_n$ dans $(n-1)n'$ et $-N_n$ dans $(n-1)n$.

Les composantes verticales sont alors données par :

$$(182) \quad \text{ou } \left. \begin{array}{l} T_{n'} \\ T_n \end{array} \right\} = \frac{M_n - M_{n-1}}{2\lambda_n} \mp \frac{N_n}{2} (\text{tg } \varphi + \text{tg } \varphi') = \frac{M_n - M_{n-1}}{2\lambda_n} \mp N_n \left(\text{tg } \varphi + \frac{h_n - h_{n-1}}{2\lambda_n} \right)$$

Les moments de flexion sont égaux dans les sections verticales correspondantes des deux membrures et comme ils varient linéairement il suffit de les connaître aux noeuds. Dans chaque panneau nous devons donc calculer les deux moments : $M_{(n-1)n}$ et $M_{n(n-1)}$.

La formule (159) nous donnera :

$$\text{au noeud } n: \quad x' = 0 \quad y' = 0 \quad \mu = 0 \quad M_{n(n-1)} = -B_n \frac{h_n}{2} = -\frac{N_n h_n}{2} - \frac{M_n}{2}$$

$$\text{au noeud } (n-1): \quad x' = -\lambda \text{tg } \varphi \quad y' = \lambda \quad \mu = \frac{h_{n-1}}{2} \left(\frac{M_n}{h_n} - \frac{M_{n-1}}{h_{n-1}} \right) \quad \text{et}$$

$$M_{(n-1)n} = \frac{h_{n-1}}{2} \left(\frac{M_n}{h_n} - \frac{M_{n-1}}{h_{n-1}} \right) - \frac{h_{n-1}}{2} \left(N_n + \frac{M_n}{h_n} \right) = -\frac{1}{2} (M_{n-1} + N_n h_{n-1})$$

$$\text{On a donc } \boxed{M_{n(n-1)} = -\frac{1}{2} (M_n + N_n h_n) \quad | \quad M_{n(n+1)} = -\frac{1}{2} (M_n + N_{n+1} h_n)} \quad (183)$$

On en déduit le moment de flexion à l'encastrement des montants

$$m_n = M_{n(n+1)} - M_{n(n-1)} = \boxed{\frac{h_n}{2} (N_n - N_{n+1}) = m_n} \quad (184)$$

Le moment est $(+m_n)$ à la tête du montant et $(-m_n)$ au pied.

11. Procédé pratique de calcul : tableaux.

On procèdera par tableaux qui comporteront autant de colonnes verticales que de montants ou de panneaux. Les panneaux portent les numéros de leur montant de droite. On inscrira sur chaque ligne du tableau les valeurs calculées des expressions figurant dans la colonne marginale.

Le tableau I donnera les caractéristiques élastiques de la poutre. Le tableau II donnera les rapports des déformabilités $\frac{v''_{ni}}{v''_{ii}}$ et $\frac{v'_{ni}}{v'_{ii}}$ qui se calculent d'après les formules (175) en multipliant les rapports entre eux.

Ces deux premiers tableaux sont indépendants de la mise en charge de la poutre.

Pour chaque mise en charge alors envisagée pour la poutre entière il faut établir deux autres tableaux: III et IV.

Le tableau III est la suite du tableau I: mise en charge et sollicitations. Le tableau IV correspond au tableau II où l'on introduit les v_n , selon les diagonales et les multipliant ensuite par les rapports correspondants se trouvant sur la même ligne du tableau II. Nous donnons ci-dessous un modèle de ces divers tableaux.

12. Influence d'une différence de température entre les membrures.

En tenant compte d'une différence de température $= \theta$, le coefficient de dilatation étant κ , on obtient pour l'expression des déplacements:

$$\begin{aligned} v &= - \int \mu \xi d\sigma + \theta \kappa (y_1 - y_0) \\ u &= - \int \mu \eta d\sigma - \theta \kappa (x_1 - x_0) \end{aligned}$$

Si nous faisons maintenant abstraction de la charge, c'est-à-dire posant $\mu = 0$, il ne restera que les termes en θ .

Supposons qu'il s'établisse entre les membrures une différence de température $\theta = \theta_{ab} - \theta_{a'b'}$ et que les montants prennent une température moyenne, la température étant donc supposée symétriquement distribuée selon un axe parallèle aux montants.

Pour le cadre type complet $ab b'a'a$ il vient: $x_1 = x_0$ et $u = 0$ mais v ne s'annule pas car pour ab on a $\theta_{ab}\kappa(\lambda - 0)$ et pour $a'b'$ il vient $\theta_{a'b'}\kappa(0 - \lambda)$. Pour aa' et bb' : $y_1 - y_0 = 0$.

Il reste donc $v = \theta_{ab}\kappa\lambda + \theta_{a'b'}\kappa(-\lambda) = \kappa\theta\lambda$.

Ce terme est indépendant de h et sera le même pour tous les panneaux d'une poutre si les membrures sont chacune à la même température sur toute leur longueur, c'est-à-dire: $\theta = C^{\text{te}}$. Il suffit donc de remplacer dans l'expression de B_n, v'_n par $\kappa\theta\lambda$. Cependant si dans le calcul des caractéristiques élastiques on a supposé $E = 1$, c'est-à-dire si l'on a supposé que partout le terme $\frac{1}{E}$ a été mis en évidence, il faudra en tenir compte en le rétablissant et il faudra écrire

$$B_{n\theta} = \frac{E\kappa\theta\lambda}{I_{nt}} = N_{n\theta} \quad \text{car} \quad B_{n\theta} = N_{n\theta}$$

et la formule générale (178) deviendra en posant $E\kappa\theta\lambda = v_{n\theta}$

$$N_{n\theta} I_{nt} = \sum_{i=1}^{i=n-1} v_{i\theta} \cdot \frac{v'_{ni}}{v'_{ii}} + v_{n\theta} + \sum_{i=n+1}^{i=m} v_{i\theta} \cdot \frac{v''_{ni}}{v''_{ii}} \quad (185)$$

et si λ est le même partout ainsi que θ alors $v_{n\theta} = C^{\text{te}}$ et peut se mettre en

Tableau I. *Caractéristiques élastiques.*

n	0	1	n	m
h_n				
$h_n \cdot \frac{\nu_{(n-1)n} + 1}{\nu_{(n-1)n}}$				
$h_n \cdot \frac{\nu_{(n-1)n} - 1}{\nu_{(n-1)n}}$				
$h'_n = h_n \frac{\nu+1}{2\nu} + h_{n+1} \frac{\nu-1}{2\nu}$				
$h''_n = h_n \frac{\nu+1}{2\nu} + h_{n-1} \frac{\nu-1}{2\nu}$				
$\sigma_n = \frac{1}{i_n} (h_n - \alpha e)$				
$\sigma_{(n-1)n} = \frac{(\lambda - \alpha e)}{i_{(n-1)n} \cos \varphi}$				
$I_n = \frac{\sigma_n h_n^2}{4 \nu_n}$				
$I'_{(n-1)n} = \sigma_{(n-1)n} \frac{h_{n-1} h'_{n-1}}{4}$				
$I''_{n(n-1)} = \sigma_{(n-1)n} \frac{h_n h''_n}{4}$				
$I'_2 = I'_{(n-1)n} + I'_{(n-1)n} + I''_{n(n-1)}$				
$\frac{I'_{ne}}{I'_n} = \frac{I_n}{I_n + I'_n}$				
$I'_{ne} = \frac{I_n \cdot I'_n}{I_n + I'_n}$	I_0			
$I''_n = I''_{ne} + I''_{n(n-1)} + I'_{(n-1)n}$				
$\frac{I''_{ne}}{I''_{n+1}} = \frac{I_n}{I_n + I''_{n+1}}$				
$I''_{ne} = \frac{I_n \cdot I''_{n+1}}{I_n + I''_{n+1}}$				
$I_{nt} = I'_n + I''_{ne} = I'_{n-1e} + I''_n$				

Tableau III. *Mise en charge et sollicitations.*

n	0	1	n	m
M_n				
$\frac{M_n}{h_n}$				
$\frac{M_{n-1}}{h_{n-1}} I'_{(n-1)n}$				
$\frac{M_n}{h_n} I''_{n(n-1)}$				
$v_n = \frac{M_{n-1}}{h_{n-1}} I'_{(n-1)n} + \frac{M_n}{h_n} I''_{n(n-1)}$				
$\sum v_i \frac{\nu_{ni}}{\nu_{ii}}$ (voir tableau IV)				
$N_n = \frac{\sum v_i \frac{\nu_{ni}}{\nu_{ii}}}{I_{nt}}$				
$N_n h_n$				
$N_n h_{n-1}$				
$m_n = \frac{h_n}{2} (N_n - N_{n+1})$				
$M_n \frac{\nu_{(n-1)n} + 1}{\nu_{(n-1)n}}$				
$M_n \frac{\nu_{(n-1)n} - 1}{\nu_{(n-1)n}}$				
$\frac{\sigma_{(n-1)n}}{8} \left(M_n \frac{\nu+1}{\nu} + M_{n-1} \frac{\nu-1}{\nu} \right)$				
$\frac{\sigma_{(n-1)n}}{8} \left(M_n \frac{\nu-1}{\nu} + M_{n-1} \frac{\nu+1}{\nu} \right)$				
$N_n I'_{(n-1)n}$				
$N_n I''_{n(n-1)}$				
$\Delta_n \delta$ (form. 210)				

Tableau II. *Rapports des déformabilités.*

	$n = 1$	2	3	4	n	m
$i = 1$	1	$\frac{I'_{1e}}{I_1}$	$\frac{I'_{1e}}{I_1} \cdot \frac{I'_{2e}}{I_2}$		$\frac{v'_{ni}}{v'_{ii}}$	
$i = 2$	$\frac{I''_{1e}}{I_2}$	1	$\frac{I'_{2e}}{I_2}$		pour $i < n$	
3	$\frac{I'_{1e}}{I_2} \cdot \frac{I''_{2e}}{I_3}$	$\frac{I'_{2e}}{I_3}$	1	$\frac{I'_{3e}}{I_3}$		
4			$\frac{I'_{3e}}{I_4}$	1		
i	$\frac{v''_{ni}}{v''_{ii}}$	pour $i > n$			1	
m						1
$\sum \frac{v_{ni}}{v_{ii}}$	—	—	—	—	—	—

Tableau IV. *Rapports des déformations.*

	$n = 1$	2	3	4	n	m
$i = 1$	v_1	$v_1 \cdot \frac{I'_{1e}}{I_1}$	$v_1 \cdot \dots$		$v_i \cdot \frac{v'_{ni}}{v'_{ii}}$	
$i = 2$	$v_2 \cdot \frac{I''_{1e}}{I_2}$	v_2	$v_2 \cdot \frac{I'_{2e}}{I_2}$	$v_2 \cdot \dots$	pour $i < n$	
3	$v_3 \cdot \dots$	$v_3 \cdot \frac{I''_{2e}}{I_3}$	v_3	$v_3 \cdot \frac{I'_{3e}}{I_3}$		
4				v_4		
i	$v_1 \cdot \frac{v''_{ni}}{v''_{ii}}$	pour $i > n$			v_n	
m						v_m
$\sum v_i \frac{v_{ni}}{v_{ii}}$	—	—	—	—	—	—

évidence, il vient:

$$N_{n\theta} = \frac{E\lambda\theta\lambda}{I_{nt}} \left[\sum_{i=1}^{i=n-1} \frac{v'_{ni}}{v_{ii}} + 1 + \sum_{i=n+1}^{i=m} \frac{v''_{ni}}{v_{ii}} \right] \quad (186)$$

et le terme [] se calcule par sommation des colonnes du tableau II.

13. Comparaison avec la méthode de calcul de Frandsen dite: par ouverture des mailles.

La solution obtenue par cette méthode est pour le panneau n^*):

$$\frac{h_n^3}{Ei_n} (X_n - X_{n+1}) - \frac{h_{n-1}^3}{Ei_{n-1}} \cdot (X_{n-1} - X_n) = \frac{3\lambda}{Ei_{nr}} (h_{n-1} + h_n) (M_N - h'_n X_n) \quad (187)$$

Avec nos notations et conventions nous pouvons poser:

$$\frac{h_n}{Ei_n} = \sigma_n \quad \frac{\lambda}{Ei_{nr}} = \sigma_{(n-1)n} \quad X_n = -N_n \quad \text{de plus ici } \nu = 3 \quad \text{donc } I_n = \frac{\sigma_n h_n^2}{12}$$

h'_n est ici la hauteur du panneau au droit du centre géométrique et est donc: donné par

$$y_c = \frac{\lambda}{3} \cdot \frac{h_n + 2h_{n-1}}{h_n + h_{n-1}} \quad \text{et alors} \quad h'_n = \frac{2h_n^2 + 2h_n h_{n-1} + 2h_{n-1}^2}{3(h_n + h_{n-1})}$$

De même M_N est le moment extérieur au droit de ce même centre et s'exprime par:

$$M_N = M_n \cdot \frac{2h_n + h_{n-1}}{3(h_n + h_{n-1})} + M_{n-1} \frac{h_n + 2h_{n-1}}{3(h_n + h_{n-1})}$$

Et alors:

$$3(h_n + h_{n-1})(M_N - h'_n X_n) = M_n(2h_n + h_{n-1}) + M_{n-1}(h_n + 2h_{n-1}) + 2N_n(h_n^2 + h_n h_{n-1} + h_{n-1}^2)$$

L'équation (187) peut donc s'écrire successivement:

$$\begin{aligned} -\sigma_n h_n^2 (N_n - N_{n+1}) + \sigma_{n-1} h_{n-1}^2 (N_{n-1} - N_n) &= \sigma_{(n-1)n} [M_n(2h_n + h_{n-1}) + \\ &M_{n-1}(h_n + 2h_{n-1}) + 2N_n(h_n^2 + h_n h_{n-1} + h_{n-1}^2)] \\ \sigma_n h_n^2 N_{n+1} - N_n [\sigma_n h_n^2 + \sigma_{n-1} h_{n-1}^2 + 2\sigma_{(n-1)n}(h_n^2 + h_n h_{n-1} + h_{n-1}^2)] + N_{n-1} \sigma_{n-1} h_{n-1}^2 &= \\ = \sigma_{(n-1)n} [M_n(2h_n + h_{n-1}) + M_{n-1}(h_n + 2h_{n-1})] \\ I_n N_{n+1} - N_n \left[I_n + I_{n-1} + \sigma_{(n-1)n} \frac{h_n(2h_n + h_{n-1})}{12} + \sigma_{(n-1)n} \frac{h_{n-1}(h_n + 2h_{n-1})}{12} \right] + N_{n-1} I_{n-1} &= \\ = \frac{M_n}{h_n} \sigma_{(n-1)n} \frac{h_n(2h_n + h_{n-1})}{12} + \frac{M_{n-1}}{h_{n-1}} \sigma_{(n-1)n} \frac{h_{n-1}(h_n + 2h_{n-1})}{12} \end{aligned}$$

Or en posant $\nu = 3$ dans nos conventions (170 et 171) nous obtenons

$$\begin{aligned} h''_n &= \frac{2h_n + h_{n-1}}{3} & h'_{n-1} &= \frac{h_n + 2h_{n-1}}{3} & I'_{(n-1)n} &= \frac{\sigma_{(n-1)n} h_{n-1} h'_{n-1}}{4} \\ I''_{n(n-1)} &= \frac{\sigma_{(n-1)n} h_n h_n}{4} \end{aligned}$$

*) K. KRISO. Stabilité des poutres Vierendeel, Paris, Béranger.

et finalement:

$$(188) \quad N_{n+1}I_n - N_n(I_n + I_{n-1} + I'_{(n-1)n} + I''_{n(n-1)}) + N_{n-1}I_{n-1} = \frac{M_n}{h_n} I''_{n(n-1)} + \frac{M_{n-1}}{h_{n-1}} I'_{(n-1)n} = v_n.$$

Ecrivons
$$I_{na} = I_n + I'_{(n-1)n} + I''_{n(n-1)} + I_{n-1}$$

et nous référant aux formules de récurrence no. (167) à (169) nous en déduirons les relations suivantes qui nous seront utiles:

$$(189) \quad I_{na} - \frac{I_{n-1}^2}{I_{n-1} + I'_{n-1}} = I_n + I'_{(n-1)n} + I''_{n(n-1)} + \frac{I_{n-1}I'_{n-1}}{I_{n-1} + I'_{n-1}} = I_n + I'_{(n-1)n} + I''_{n(n-1)} + I'_{(n-1)e} = I_n + I'_n = \frac{I_n I'_n}{I'_{ne}}$$

De même:

$$I_{na} - \frac{I_n^2}{I_n + I''_{n-1}} = I_{n-1} + I''_n = \frac{I_{n-1}I''_n}{I''_{(n-1)e}} \quad \text{et} \quad I'_n + I_n - \frac{I_n^2}{I_n + I''_{n+1}} = I'_n + I''_{ne} = I_{nt} \quad (190)$$

Alors l'équation type de cette méthode s'écrit:

$$\boxed{I_{n-1} N_{n-1} - I_{na} N_n + I_n N_{n+1} = v_n} \quad (191)$$

Le système d'équations étagées à résoudre est donc le suivant:

$$\begin{aligned} -I_{1a} N_1 + I_1 N_2 &= v_1 \\ I_1 N_1 - I_{2a} N_2 + I_2 N_3 &= v_2 \\ I_2 N_2 - I_{3a} N_3 + I_3 N_4 &= v_3 \\ \dots & \\ I_{m-2} N_{m-2} - I_{(m-1)a} N_{m-1} + I_{m-1} N_m &= v_{m-1} \\ I_{m-1} N_{m-1} - I_{ma} N_m &= v_m \end{aligned}$$

lequel peut aussi s'écrire sous la forme:

$$\begin{aligned} -N_1 + \frac{I_1}{I_{1a}} N_2 &= \frac{v_1}{I_{1a}} \\ N_1 - \frac{I_{2a}}{I_1} N_2 + \frac{I_2}{I_1} N_3 &= \frac{v_2}{I_1} \\ \dots & \\ \frac{I_{m-2}}{I_{m-1}} N_{m-2} - \frac{I_{(m-1)a}}{I_{m-1}} N_{m-1} + N_m &= \frac{v_{m-1}}{I_{m-1}} \\ \frac{I_{m-1}}{I_{ma}} N_{m-1} - N_m &= \frac{v_m}{I_{ma}} \end{aligned}$$

Eliminant successivement les N en commençant par N_1 , il vient en additionnant les deux premières équations:

$$-\frac{1}{I_1} \left(I_{2a} - \frac{I_1^2}{I_{1a}} \right) N_2 + \frac{I_2}{I_1} N_3 = \frac{v_1}{I_{1a}} + \frac{v_2}{I_1}$$

or ici $I'_1 = I_0 + I'_{01} + I''_{10}$ $I_{1a} = I'_1 + I_1$ donc:

$$-(I_2 + I'_2) N_2 + I_2 N_3 = v_1 \frac{I'_{1e}}{I'_1} + v_2 \quad \text{ou bien:}$$

$$-N_2 + \frac{I_2}{I_2 + I'_2} N_3 = v_1 \frac{I'_{1e}}{I'_1(I_2 + I'_2)} + \frac{v_2}{I_2 + I'_2}$$

et additionnant alors la 3^{me} équation étagée on a :

$$-\frac{1}{I_2} \left(I_{3a} - \frac{I_2^2}{I_2 + I'_2} \right) N_3 + \frac{I_3}{I_2} N_4 = v_1 \frac{I'_{1e}}{I'_1(I_2 + I'_2)} + v_2 \frac{1}{I_2 + I'_2} + \frac{v_3}{I_2}$$

qui se transforme en :

$$-(I_3 + I'_3) N_3 + I_3 N_4 = v_1 \cdot \frac{I'_{1e}}{I'_1} \cdot \frac{I'_{2e}}{I'_2} + v_2 \frac{I'_{2e}}{I'_2} + v_3$$

Ainsi en opérant successivement on obtiendrait pour le panneau n :

$$(192) \quad - (I_n + I'_n) N_n + I_n N_{n+1} = v_1 \frac{I'_{1e}}{I'_1} \cdot \frac{I'_{2e}}{I'_2} \dots \frac{I'_{(n-1)e}}{I'_{n-1}} \\ + v_2 \frac{I'_{2e}}{I'_2} \dots \frac{I'_{(n-1)e}}{I'_{n-1}} + \dots + v_{n-1} \frac{I'_{(n-1)e}}{I'_{n-1}} + v_n = A'_n$$

En procédant de même en commençant par m on obtiendra pour le panneau $(n + 1)$ une seconde équation analogue soit donc un groupe de deux équations à deux inconnues à résoudre :

$$(193) \quad \begin{cases} - (I_n + I'_n) N_n + I_n N_{n+1} = A'_n \\ + I_n N_n - (I_n + I'_{n+1}) N_{n+1} = A''_{n+1} \end{cases}$$

et la solution donne

$$-N_n = \frac{\frac{A'_n}{I_n} + \frac{A''_{n+1}}{I_n + I'_{n+1}}}{\frac{I_n + I'_n}{I_n} - \frac{I_n}{I_n + I'_{n+1}}} = \frac{A'_n + A''_{n+1} \cdot \frac{I''_{ne}}{I''_{n+1}}}{I_{nt}}$$

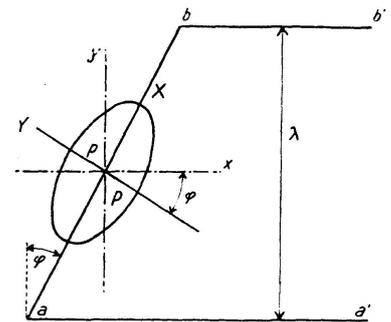


Fig. 5.

et l'on retrouve l'équation générale (180) sous la forme :

$$(194) \quad -N_n I_{nt} = A'_n + A''_{n+1} \cdot \frac{I''_{ne}}{I''_{n+1}} \quad \text{qui après développement de } A'_n \text{ et } A''_{n+1}$$

est la même. Les deux méthodes sont donc identiques et se vérifient l'une par l'autre. Celle basée sur les systèmes équivalents a cependant l'avantage de donner une solution directe s'écrivant au moyen de coefficients ayant une signification concrète, et en outre elle permet de tenir compte dans les calculs de l'influence des goussets par les valeurs choisies pour les σ et les ν .

14. Influence des déformations longitudinales des membrures.

L'ellipse élastique des tronçons de membrures ne se réduit plus alors à une droite et il faut envisager ses deux axes principaux qui seront donnés par (voir fig. 5)

$$I_X = \sigma \varrho^2 \quad I_Y = \frac{\sigma l^2}{4\nu} = \frac{\sigma \lambda^2}{4\nu \cos^2 \varphi} \quad \text{avec} \quad \varrho^2 = \frac{i}{s} \quad l = \frac{\lambda}{\cos \varphi}$$

Par rapport aux axes orthogonaux Oxy , d'angle φ sur OXY on obtient :

$$I_x = I_X \sin^2 \varphi + I_Y \cos^2 \varphi = \frac{\sigma \lambda^2}{4 \nu} + \sigma \varrho^2 \sin^2 \varphi$$

$$I_y = I_X \cos^2 \varphi + I_Y \sin^2 \varphi = \frac{\sigma \lambda^2}{4 \nu} \operatorname{tg}^2 \varphi + \sigma \varrho^2 \cos^2 \varphi$$

$$J_{xy} = (I_X - I_Y) \sin \varphi \cos \varphi = -\frac{\sigma \lambda^2}{4 \nu} \operatorname{tg} \varphi + \sigma \varrho^2 \sin \varphi \cos \varphi$$

Comme pratiquement φ est assez petit, il en sera de même de $\sin \varphi$ et le terme $\varrho \sin \varphi$ sera tout à fait négligeable devant λ . Nous pourrions alors ne conserver pour les caractéristiques élastiques d'une membrure ab que les valeurs suivantes :

$$I_{ab} = \frac{\sigma_{ab} \lambda^2}{4 \nu} \quad I_{yab} = I_{ab} \operatorname{tg}^2 \varphi + \sigma_{ab} \varrho_{ab} \cos^2 \varphi \quad J_{xy} = -I_{ab} \operatorname{tg} \varphi$$

et il n'y aura de correction quelque peu sensible à apporter que sur la valeur de I_{yab} (142) par l'addition du terme $\sigma_{ab} \varrho_{ab} \cos^2 \varphi$ et de même pour $I_{y'a'b'}$ par $\sigma_{a'b'} \varrho_{a'b'} \cos^2 \varphi'$.

Les caractéristiques élastiques du cadre fermé (149) à (154) ne seront modifiées que par l'addition à I_{ye} (153) et I_{re} (154) du terme correctif suivant que nous appellerons I'''_{ab}

$$I'''_{ab} = \sigma_{ab} (\varrho_{ab}^2 \cos^2 \varphi + \varrho_{a'b'}^2 \cos^2 \varphi') \quad (195)$$

Alors ce terme s'ajoutant partout à I'_{ab} et I''_{ab} il viendra :

$$I_{re} = I_a + I_b + I'_{ab} + I''_{ab} + I'''_{ab} \quad (196)$$

expression dont on se servira dans toutes les formules de récurrence (167) à (169). Cependant le déplacement ν (148) devra aussi être corrigé par l'addition du terme contenant la déformation longitudinale.

$$\nu = - \int \mu \xi d\sigma - \int \nu \frac{d\eta}{ds} \varrho^2 d\sigma$$

Ce terme correctif se calcule aisément :

$$\begin{aligned} \int \nu \frac{d\eta}{ds} \varrho^2 d\sigma &= \int_a^b \frac{-M_a}{h_a} \cdot \frac{1}{\cos \varphi} \cdot \cos \varphi \cdot \varrho_{ab}^2 d\sigma_{ab} \\ &+ \int_{a'}^{b'} \frac{M_a}{h_a} \frac{1}{\cos \varphi} \cdot \cos \varphi \varrho_{a'b'}^2 (-d\sigma_{a'b'}) = \frac{-M_a}{h_a} \sigma_{ab} (\varrho_{ab}^2 + \varrho_{a'b'}^2) \end{aligned}$$

Par conséquent l'expression (148) de ν deviendra

$$\nu = \left(\frac{M_a}{h_a} - \frac{M_b}{h_b} \right) (I_b + I'_{ab}) + \frac{M_a}{h_a} \sigma_{ab} (\varrho_{ab}^2 + \varrho_{a'b'}^2) \quad (197)$$

Nous pouvons obtenir l'expression corrigée de $B = \frac{\nu}{I_{re}}$

$$B = \frac{\left(\frac{M_a}{h_a} - \frac{M_b}{h_b} \right) (I_b + I'_{ab}) + \frac{M_a}{h_a} \sigma_{ab} (\varrho_{ab}^2 + \varrho_{a'b'}^2)}{I_a + I_b + I'_{ab} + I''_{ab} + I'''_{ab}} \quad (198)$$

Il vient alors pour (173)

$$N'_n I_{nt} = v'_n - \frac{M_n}{h_n} I_{nt} = \left(\frac{M_n}{h_n} + \frac{M_{n-1}}{h_{n-1}} \right) (I_{n+1} + I'_{(n-1)n}) \\ + \frac{M_n}{h_n} [\sigma_{(n-1)n} (\varrho_{(n-1)n}^2 + \varrho_{(n'-1)n'}^2) - I_{nt}]$$

$$\text{Or } I_{nt} - \sigma_{(n-1)n} (\varrho_{(n-1)n}^2 + \varrho_{(n'-1)n'}^2) = I'_{(n-1)e} + I'_{(n-1)n} + I''_{(n-1)} + I''_e \\ + (\sigma_{(n-1)n} [\varrho_{(n-1)n}^2 (\cos^2 \varphi - 1) + \varrho_{(n'-1)n'}^2 (\cos^2 \varphi' - 1)])$$

et les termes correctifs en ϱ se ramènent à

$$- \sigma_{(n-1)n} (\varrho_{(n-1)n}^2 \sin^2 \varphi + \varrho_{(n'-1)n'}^2 \sin^2 \varphi')$$

qui sont de l'ordre de grandeur et ceux que nous avons négligés ci-dessus.

Dans le cas de membrures parallèles c'est-à-dire si $\varphi = \varphi' = 0$ ces termes s'éliminent complètement.

On voit donc que la correction due aux déformations longitudinales des membrures peut être négligée dans les termes qui dépendent de la mise en charge. Elle ne peut avoir quelques valeurs que dans les calculs des caractéristiques élastiques des systèmes équivalents en adoptant les expressions (196) au lieu de (154) c'est-à-dire en tenant compte du terme correctif (195) qui dans le panneau n s'exprime par

$$I'''_{(n-1)n} = \sigma_{(n-1)n} (\varrho_{(n-1)n}^2 \cos^2 \varphi + \varrho_{(n'-1)n'}^2 \cos^2 \varphi') = \frac{\lambda'}{E} \left(\frac{\cos \varphi}{s_{(n-1)n}} + \frac{\cos \varphi'}{s'_{(n-1)n}} \right) \quad (199)$$

où $s_{(n-1)n}$ et $s'_{(n-1)n}$ sont les sections des membrures.

15. Influence d'une différence de valeurs entre les masses élastiques des membrures: $\sigma_{ab} \neq \sigma_{a'b'}$.

Dans ce cas la condition qui annulerait $\int \mu d\sigma$ n'annulerait plus $\int \mu \eta d\sigma$ comme au § 2, à cause de la dissymétrie élastique et par conséquent on obtiendra alors un déplacement u différent de zéro. Les réactions complémentaires de fermeture du cadre établies au § 4 seraient données aussi par les équations (155) mais modifiées en ajoutant u .

$$\begin{aligned} A \sigma_e = \int \mu d\sigma = 0 \\ B I_{ye} - C J_e = - \int \mu \xi d\sigma = v \\ B J_e - C I_{xe} = - \int \mu \eta d\sigma = u \end{aligned} \quad \text{donc} \quad \left\{ \begin{aligned} A &= 0 \\ B &= \frac{v I_{xe} - u J_e}{I_{xe} I_{ye} - J_e^2} \\ C &= \frac{-u I_{ye} + v J_e}{I_{xe} I_{ye} - J_e^2} \end{aligned} \right. \quad (200)$$

On constate que C n'est plus relié à B par un simple coefficient géométrique (156).

Il reste par conséquent à déterminer séparément dans tous les panneaux les valeurs inconnues de B et C et cela double les inconnues. De plus il faut procéder au calcul des formules de récurrence de I_{xe} et J_e en plus de celle de I_{ye} .

Cette question est donc très complexe et, n'ayant qu'un intérêt pratique réduit, ne sera qu'indiquée ici pour ne pas allonger ce mémoire; nous nous réservons d'y revenir ultérieurement.

16. Déformations de la poutre Vierendeel.

La poutre étant composée d'éléments droits dont nous connaissons maintenant les sollicitations, on peut en exprimer facilement les déformations en utilisant les formules connues (no. 85) qui dans le cas d'éléments symétriques telle qu'une poutre ab , sans charge intermédiaire, deviennent:

$$(201) \quad \left. \begin{aligned} -\omega_a &= -\delta + \frac{\sigma}{4} \left(m_a \frac{\nu+1}{\nu} + m_b \frac{\nu-1}{\nu} \right) \\ \omega_b &= +\delta + \frac{\sigma}{4} \left(m_a \frac{\nu-1}{\nu} + m_b \frac{\nu+1}{\nu} \right) \end{aligned} \right\} \text{ou bien} \quad \left\{ \begin{aligned} \omega_b &= \omega_a + \frac{\sigma}{2} (m_a + m_b) \\ \delta &= \frac{\omega_a + \omega_b}{2} + \frac{\sigma}{4\nu} (m_a - m_b) \end{aligned} \right.$$

avec ω = rotation de noeud a ou b δ = inclinaison de l'axe de la barre
 m = moment de flexion aux extrémités a ou b .

Nous pouvons appliquer ces équations à chacune des barres du cadre trapézoïdal $abb'a'$ fig. 2, en admettant l'égalité des ω aux extrémités communes.

Barre aa' , les indices a et b deviennent a et a' , par symétrie il vient:

$$\left. \begin{aligned} m_a &= -m_{a'} & \omega_a &= \omega_{a'} & \delta_a &= \omega_a + \frac{\sigma_a m_a}{2\nu_a} \\ \text{Barre } bb', \text{ de même:} & & & & & \\ m_b &= -m_{b'} & \omega_b &= \omega_{b'} & \delta_b &= \omega_b + \frac{\sigma_b m_b}{2\nu_b} \end{aligned} \right\} \quad (202)$$

Barre ab

Les moments aux extrémités sont différents soit m_{ab} et m_{ba}

$$(203) \quad \omega_b = \omega_a + \frac{\sigma_{ab}}{2} (m_{ab} + m_{ba}) \quad \delta_{ab} = \omega_a + \frac{\sigma_{ab}}{4} (m_{ab} + m_{ba}) + \frac{\sigma_{ab}}{4\nu_{ab}} (m_{ab} - m_{ba}) \quad (204)$$

Barre $a'b'$: par symétrie élastique avec ab on a:

$$\omega'_a = \omega_a \quad \omega'_b = \omega_b \quad \delta_{ab} = \delta_{a'b'} \quad m_{ab} = m_{a'b'} \quad m_{ba} = m_{b'a'}$$

Si nous exprimons que la somme des projections ν des déplacements des noeuds sur l'axe 0_y , doit être nulle pour le cadre entier, on obtiendra:

$$-\delta_{ab} \lambda \operatorname{tg} \varphi + \delta_b h_b + \delta_{b'a'} \lambda \operatorname{tg} \varphi' - \delta_a h_a = 0 \quad \text{ou bien} \quad \delta_{ab} = \frac{\delta_a h_a - \delta_b h_b}{h_a - h_b} \quad (205)$$

Si l'on égale les deux valeurs (204) et (205) de δ_{ab} on obtient une équation qui, en utilisant les équations d'équilibre des moments aux noeuds, reproduit l'équation de Frandsen (188), base de la solution du calcul de la poutre.

Appliquons à présent ces formules à un panneau quelconque de la poutre en remplaçant les indices a et b par n et $(n-1)$ et en donnant aux moments d'extrémités les valeurs obtenues pour $M_{n(n-1)}$, $M_{(n-1)n}$, m_n et exprimées par (183) et (184).

Il vient alors:

$$\left. \begin{aligned} \delta_n &= \omega_n + \frac{\sigma_n m_n}{2\nu_n} & \omega_n &= \omega_{n-1} - \frac{\sigma_{(n-1)n}}{2} (M_{n(n-1)} + M_{(n-1)n}) \\ \delta_{(n-1)n} &= \omega_n + \frac{\sigma_{(n-1)n}}{4} (M_{n(n-1)} + M_{(n-1)n}) + \frac{\sigma_{(n-1)n}}{4\nu_{(n-1)n}} (M_{n(n-1)} - M_{(n-1)n}) \end{aligned} \right\} \quad (206)$$

Dans le panneau suivant exprimons $\delta_{n(n+1)}$ sous la forme :

$$\delta_{n(n+1)} = \omega_n - \frac{\sigma_{n(n+1)}}{4} (M_{(n+1)n} + M_{n(n+1)}) + \frac{\sigma_{n(n+1)}}{4\nu_{n(n+1)}} (M_{(n+1)n} - M_{n(n+1)})$$

Du panneau n au panneau $(n+1)$ il y a donc une variation de rotation des noeuds et d'inclinaison des barres donnée par :

$$(207) \quad \left\{ \begin{array}{l} \Delta \omega_n = \omega_n - \omega_{n-1} = -\frac{\sigma_{(n-1)n}}{2} (M_{n(n-1)} + M_{(n-1)n}) \\ \Delta \delta_n = \Delta \omega_n + \frac{\sigma_n m_n}{2\nu_n} - \frac{\sigma_{n-1} m_{n-1}}{2\nu_{n-1}} = \delta_n - \delta_{n-1} \\ \Delta_n \delta = \delta_{n(n+1)} - \delta_{(n-1)n} = -\frac{\sigma_{(n-1)n}}{4} \left(M_{n(n-1)} \frac{\nu_{(n-1)n} + 1}{\nu_{(n-1)n}} + M_{(n-1)n} \frac{\nu_{(n-1)n} - 1}{\nu_{(n-1)n}} \right) \\ \quad - \frac{\sigma_{n(n+1)}}{4} \left(M_{(n+1)n} \frac{\nu_{(n+1)n} - 1}{\nu_{(n+1)n}} + M_{n(n+1)} \frac{\nu_{(n+1)n} + 1}{\nu_{(n+1)n}} \right) \end{array} \right.$$

On peut considérer ce $\Delta_n \delta$ comme jouant le même rôle que les $\Delta \omega$ dans une poutre prismatique et appliquer alors à une des membrures de la poutre les formules de Navier-Bresse (7) qui deviennent ici avec

$$Md\sigma \sim \Delta_n \delta \quad \nu_0 = 0 \quad x_0 = 0 \quad x = i\lambda$$

au noeud i :

$$\Omega_i = \Omega_0 + \sum_0^i \Delta_n \delta$$

$$V_i = i\lambda \Omega_0 + \lambda \sum_0^i (i-n) \Delta_n \delta$$

A l'extrémité m on obtiendra, tenant compte que $V_0 = V_m = 0$

$$\Omega_m = \Omega_0 + \sum_0^m \Delta_n \delta$$

$$V_m = m\lambda \Omega_0 + \lambda \sum_0^m (m-n) \Delta_n \delta = 0 \quad \text{d'où}$$

$\Omega_m = + \frac{1}{m} \sum_0^m n \Delta_n \delta$
$\Omega_0 = - \frac{\sum_0^m (m-n) \Delta_n \delta}{m}$

(208)

et alors les équations des déformées de la membrure deviennent :

$$\left. \begin{array}{l} \Omega_i = \sum_0^i \Delta_n \delta - \frac{1}{m} \sum_0^m (m-n) \Delta_n \delta \\ V_i = -\lambda \frac{i}{m} \sum_0^m (m-n) \Delta_n \delta + \lambda \sum_0^i (i-n) \Delta_n \delta \end{array} \right\} \quad (209)$$

De la connaissance des Ω_i en chaque noeud on peut déduire par (205) les inclinaisons δ_i des montants correspondants. Dans le cas où la poutre est de hauteur constante ces inclinaisons δ_i des montants sont toutes les mêmes.

Il suffit donc de calculer les diverses valeurs de $\Delta_n \delta$ et de les considérer comme des masses élastiques concentrées au centre de rotation soit au noeud n de la membrure.

Remplaçant dans (207) les M par leurs valeurs no. (183) et (184) on obtient :

$$\begin{aligned} \Delta_n \delta = & \frac{\sigma_{(n-1)n}}{8} \left(M_n \frac{\nu+1}{\nu} + M_{n-1} \frac{\nu-1}{\nu} \right) + \frac{\sigma_{n(n+1)}}{8} \left(M_n \frac{\nu+1}{\nu} + M_{n+1} \frac{\nu-1}{\nu} \right) \\ & + \frac{\sigma_{(n-1)n}}{8} N_n \left(h_n \frac{\nu+1}{\nu} + h_{n-1} \frac{\nu-1}{\nu} \right) + \frac{\sigma_{n(n+1)}}{8} N_{n+1} \left(h_n \frac{\nu+1}{\nu} + h_{n+1} \frac{\nu-1}{\nu} \right) \end{aligned}$$

ce qui devient avec (170) et (171)

$$(210) \quad \Delta_n \delta = \frac{\sigma_{(n-1)n}}{8} \left(M_n \frac{\nu+1}{\nu} + M_{n-1} \frac{\nu-1}{\nu} \right) + \frac{\sigma_{n(n+1)}}{8} \left(M_n \frac{\nu+1}{\nu} + M_{n+1} \frac{\nu-1}{\nu} \right) \\ + N_n I''_{(n-1)n} + N_{n+1} I'_{n(n+1)}.$$

Cette expression peut aussi s'ajouter à la fin du tableau III si l'on désire déterminer la déformée de la poutre.

La détermination des déformations de la poutre Vierendeel permet également de déterminer ses caractéristiques élastiques, et par suite d'aborder le calcul de la poutre Vierendeel extérieurement hyperstatique telle que la poutre continue sur plusieurs appuis.

Résumé.

Le calcul de la poutre Vierendeel habituelle à m panneaux se ramène à la solution d'un système de m équations étagées à m inconnues, chaque équation comprenant trois inconnues sauf les extrêmes qui n'en comportent que deux. La solution de ce système nécessite des calculs délicats. Si l'on veut une précision suffisante, il faut chiffrer les opérations avec de nombreuses décimales et, la règle à calcul étant alors inutilisable, employer la machine à calculer.

A la fin de l'ouvrage que nous avons publié en 1937 et intitulé „Les constructions hyperstatiques“¹⁾ nous avons ébauché (pages 210 à 214) une méthode de calcul de la poutre Vierendeel basée sur la méthode des systèmes équivalents et servant d'exemple d'application. Cette méthode utilise spécialement l'ellipse centrale d'élasticité d'un élément élastique dont elle représente toutes les propriétés élastiques. Tous les systèmes ayant même ellipse centrale d'élasticité, pouvant alors se substituer l'un à l'autre, sont donc considérés comme systèmes équivalents.

En approfondissant l'emploi de cette méthode pour le calcul de la poutre Vierendeel, elle s'est montrée des plus fécondes. Elle nous a permis de ramener le calcul d'une poutre de hauteur variable à la solution d'équations ne comportant chacune qu'une inconnue. Chacune de celles-ci s'exprime sous forme d'addition de termes ne contenant que des rapports simples, calculables avec une précision suffisante à la règle à calcul. C'est donc une solution directe, rapide et pratique. Chaque inconnue s'exprime en fonction de la sollicitation extérieure de la poutre et de coefficients qui ne dépendent que des dimensions de celle-ci et de l'étendue des goussets. Ces coefficients peuvent aussi se calculer directement dans la méthode des systèmes équivalents où ils trouvent une interprétation concrète.

¹⁾ Bibliothèque scientifique belge, No. 31, 1937. Liège, G. Thône, éd.

Zusammenfassung.

Die Berechnung des gewöhnlichen Vierendeel-Trägers mit m Feldern läßt sich auf die Lösung eines Systems von m Gleichungen mit m Unbekannten zurückführen, wobei jede Gleichung drei Unbekannte enthält. Eine Ausnahme hiezu bilden die Anfangs- und Endgleichungen, die nur zwei Unbekannte umfassen. Die Lösung dieser Systeme führt zu empfindlichen Berechnungen. Um eine genügende Genauigkeit zu erreichen, sind die numerischen Rechnungen mit zahlreichen Dezimalen durchzuführen und, da der Rechenschieber für diese Genauigkeit nicht mehr genügt, muß die Rechenmaschine verwendet werden.

Am Ende der im Jahre 1937 veröffentlichten Abhandlungen, betitelt: „Die statisch unbestimmten Systeme“¹⁾, haben wir (Seiten 210—214) eine Berechnungsmethode für Vierendeel-Träger angedeutet, die sich auf die Methode der gleichwertigen Systeme stützt und die als Anwendungsbeispiel diente. Diese Methode verwendet insbesondere die Elastizitätsellipse eines elastischen Elementes, dessen elastische Eigenschaften sie darstellt. Alle Systeme mit gleichen Elastizitätsellipsen können einander ersetzen, sind somit als gleichwertige Systeme zu betrachten.

Diese Methode hat sich für die Berechnung des Vierendeel-Trägers als sehr zweckmäßig erwiesen. Dank dieser Methode kann die Berechnung eines Trägers mit veränderlicher Höhe auf die Lösung von Gleichungen, von denen jede nur eine unbekannt enthält, zurückgeführt werden. Jede dieser Gleichungen stellt sich dar als eine Superposition von Ausdrücken, die nur einfache Verhältnisse enthalten, welche genügend genau mit dem Rechenschieber berechnet werden können. Es handelt sich also um eine direkte Rechnung und praktische Lösung. Jede Unbekannte drückt sich aus in Funktionen der äußeren Belastung des Trägers und von Beiwerten, die nur von den Abmessungen desselben abhängen und von der Ausdehnung der Knotenbleche. Diese Beiwerte können auch direkt mit Hilfe der Methode der gleichwertigen Systeme berechnet werden, nach der sie eine tatsächliche Auslegung erfahren.

Summary.

The design of an ordinary Vierendeel girder of m panels is referable to a system of m equations with m unknowns, each equation containing three unknowns except the first and last equations which contain two only. The solution of such a system involves intricate calculations which, to secure sufficient accuracy, have to be carried to many decimal places; for this purpose the slide rule is inadequate and recourse must be had to a calculating machine.

At the end of the publication which appeared in 1937 under the title “The Statically Indeterminate System”¹⁾ we have explained, on pages 210—214, a method for the calculation of Vierendeel girders which depends on the method of equivalent systems and serves as an example. In this method use is made, in particular, of the ellipse of elasticity representing the elastic properties of an elastic element. All systems having the same ellipses of elasticity can be substituted for one another and are to be regarded as equivalent systems.

¹⁾ Bibliothèque scientifique belge, No. 31, 1937. Liège, G. Thône, ed.

The application of this method to the calculation of Vierendeel girders has been found very effective. In this way the calculation of a girder of varying depth can be referred to a solution of equations containing only one unknown each. Every such equation is formed from a combination of expressions of simple relationships which can be worked out with sufficient accuracy on the slide rule; a direct calculation and a practical solution are, therefore, obtainable. Every unknown is expressible as a function of the external loading of the girder and of coefficients which depend only on the dimensions of the latter and on the extensions of the joint plates. These coefficients, also, can be calculated in an actual design by using the method of equivalent systems.

Leere Seite
Blank page
Page vide