

**Zeitschrift:** IABSE publications = Mémoires AIPC = IVBH Abhandlungen  
**Band:** 6 (1940-1941)

**Artikel:** Die Knickberechnung mehrfeldriger, in den Feldgrenzen beliebig gestützter Stäbe  
**Autor:** Kriso, K.  
**DOI:** <https://doi.org/10.5169/seals-7094>

### **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. [Mehr erfahren](#)

### **Conditions d'utilisation**

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. [En savoir plus](#)

### **Terms of use**

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. [Find out more](#)

**Download PDF:** 23.07.2025

**ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>**

# DIE KNICKBERECHNUNG MEHRFELDRIGER, IN DEN FELDGRENZEN BELIEBIG GESTÜTZTER STÄBE.

LE CALCUL DU FLAMBAGE DES POUTRES CONTINUES  
SUR APPUIS D'UN GENRE QUELCONQUE.

CALCULATING THE BUCKLING OF MEMBERS WITH SEVERAL  
BAYS AND SUPPORTED IN ANY MANNER WITHIN THE LIMITS  
OF THE BAYS.

Prof. Dr. Ing. K. KRISO, Deutsche Technische Hochschule, Brünn.

## I. Einleitung.

Die Bedingung für das Ausknicken eines mehrfeldrigen geraden Stabes, der in den Feldgrenzen auf elastischen Stützen gelagert ist und derselbst von axial wirkenden Kräften ergriffen wird, wurde erstmals von ZIMMERMANN<sup>1)</sup> hergeleitet. Von dieser prinzipiellen Lösung ausgehend, kann man nur mühsam, auf recht umständliche Weise über umfangreiche Zahlenrechnungen bis zu dem vom Ingenieur benötigten Zahlenresultat vordringen. Aus diesem Grunde hat ZIMMERMANN für gewisse Sonderfälle<sup>2)</sup> ein systematisches Verfahren zur zahlenmäßigen Durchführung der Knickberechnung entwickelt. Dieses ZIMMERMANN'sche Verfahren erstreckt sich auf gleichfeldrige Stäbe, die hinsichtlich Konstruktion und Belastung Symmetrie zur Mitte aufweisen und in allen Feldgrenzen eine elastische Querstützung von gleicher Intensität besitzen. Die Druckgurte offener Fachwerksbrücken entsprechen vielfach dieser Voraussetzung, ihre Knickberechnung nach dem nunmehr schon dreißig Jahre bestehenden ZIMMERMANN'schen Verfahren hat sich jedoch in der Praxis nicht einbürgern können.

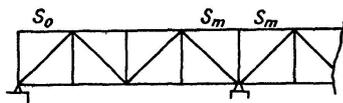


Fig. 1

Unter ähnlichen, aber erweiterten Voraussetzungen hat der Verfasser ein ebenfalls strenges Verfahren zur Knickberechnung der Druckgurte offener Brücken hergeleitet, das in einfacher Art zu handhaben ist und verhältnismäßig rasch zur Ermittlung der Knickdeterminante führt<sup>3)</sup>.

<sup>1)</sup> H. ZIMMERMANN, Der gerade Stab auf elastischen Einzelstützen mit Belastung durch längsgerichtete Kräfte. (Sitzungsberichte der Berliner Akademie, mathem.-physik. Klasse, 1907, Seite 326 ff.)

H. ZIMMERMANN, Die Knickfestigkeit des geraden Stabes mit mehreren Feldern. (Sitzungsbericht der Berliner Akademie, mathem.-physik. Klasse, 1909, Seite 180 ff.)

<sup>2)</sup> H. ZIMMERMANN, Die Knickfestigkeit der Druckgurte offener Brücken. (Berlin 1910, Ernst & Sohn.)

<sup>3)</sup> K. KRISO, Die Knicksicherheit der Druckgurte offener Fachwerksbrücken. Band III der Abhandlungen der Internationalen Vereinigung für Brückenbau und Hochbau, Zürich 1935.

In der vorliegenden Arbeit wird das Ausknicken von geraden Durchlaufstäben untersucht, deren Querschnitt und Trägheitsmoment innerhalb eines Feldstabes konstant ist und die in den Feldgrenzen von axial wirkenden Einzelkräften ergriffen werden. Neben Druckkräften können auch Zugkräfte auftreten, wie z. B. beim Ausknicken des Obergurtes im durchlaufenden Träger einer offenen Brücke ( $S_m$  in Fig. 1), auch Feldstäbe, die durch keinerlei Axialkraft beansprucht sind ( $S_0$  in Fig. 1) dürfen im Durchlaufstab enthalten sein. Die Stützung in den Feldgrenzen kann nach irgend einer der in Fig. 2 schematisch dargestellten Art erfolgen und diese Stützungsarten können in beliebiger Kombination verwendet werden. Für derartige Durchlaufstäbe, die jede beliebige Unsymmetrie hinsichtlich Konstruktion, Belastung und Stützung aufweisen dürfen, wird nun im folgenden ein strenges, ganz allgemein gültiges Verfahren zur zahlenmäßigen Durchführung der Knickberechnung entwickelt.

Dieses Verfahren beschreitet, im Gegensatz zum ZIMMERMANN'schen Verfahren, andere Wege. Es zeichnet sich vor allem durch seinen einheitlichen Aufbau aus, der für alle, wie immer gearteten Fälle, seine Gültigkeit behält und daher die Durchführung der Berechnung in immer gleicher und gleich einfacher Weise gestattet. Ein solches, besonders vom praktischen Rechner geschätztes Verfahren, ermöglicht eine leichte Kontrolle, verbürgt ein Minimum an Fehlerquellen und führt in übersichtlicher schematischer Form in jedem Falle sicher zu dem in der Praxis geforderten Zahlenresultat. Infolge zweckmäßig getroffener Anordnungen in der Herleitung, erscheinen in der Zahlenrechnung nur kleine dimensionslose Grössen, so daß dieselbe, falls keine Rechenmaschine zur Verfügung steht, auch mit Hilfe eines Rechenschiebers durchgeführt werden kann.

Im Vergleich zu meiner in Band III der „Abhandlungen“ der I. V. B. H. veröffentlichten Methode, ermöglichen die Ergebnisse des hier zu entwickelnden Verfahrens auch neuerdings eine bedeutend vereinfachte strenge Knickrechnung der Druckgurte offener Brücken, die nunmehr unter Erweiterung der bisherigen eingeschränkten Voraussetzungen durchgeführt werden kann.

## II. Bezeichnungen.

Die Fig. 2a—2c stellt eine in der Querrichtung unverschiebliche, die Fig. 2d—2f eine in der Querrichtung federnde Stützung dar. Die über den Stützen liegenden „Stützenquerschnitte“ des Durchlaufstabes sind entweder frei drehbar (Fig. 2a, 2d), elastisch drehbar (Fig. 2b, 2e) oder unverdrehbar (Fig. 2c, 2f).

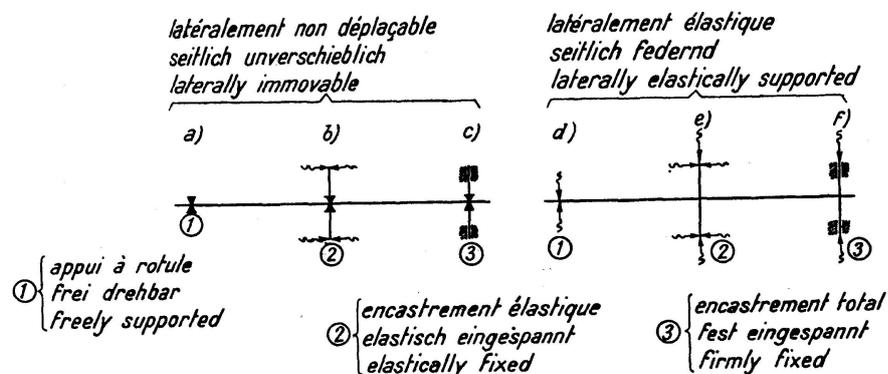


Fig. 2

In den letzten zwei Fällen wird die elastische bzw. feste „Einspannung“ des Stützenquerschnittes so verwirklicht gedacht, daß, wie Fig. 2 zeigt, der Stützenquerschnitt des durchgehenden Stabes mit einem hierauf senkrechten starren Stab biegungssteif verbunden sei, der entweder elastisch drehbar oder unverdrehbar ist. Dieser starre Stab soll als „Stützenstab“ bezeichnet werden, zum Unterschied von dem zwischen zwei Stützen liegenden „Feldstab“.

Ein über mehrere elastische Stützen durchlaufender Stab ist äußerlich statisch unbestimmt. Hieraus erhält man bei Kenntnis der elastischen Stützelemente ein statisch bestimmtes Hauptsystem, indem man an den Enden der Feldstäbe Gelenke einschaltet. Folgen im Stabzug zwei Feldstäbe unmittelbar aufeinander, so liegt das einzuschaltende Gelenk unmittelbar über der Stütze. Sind zwei aufeinanderfolgende Feldstäbe jedoch durch einen Stützenstab getrennt, dann sind die einzuschaltenden Gelenke unendlich nahe links und rechts vom Stützenstab anzubringen. Das zwischen ihnen liegende Stabelement ist mit dem Stützenstab in starrer Verbindung.

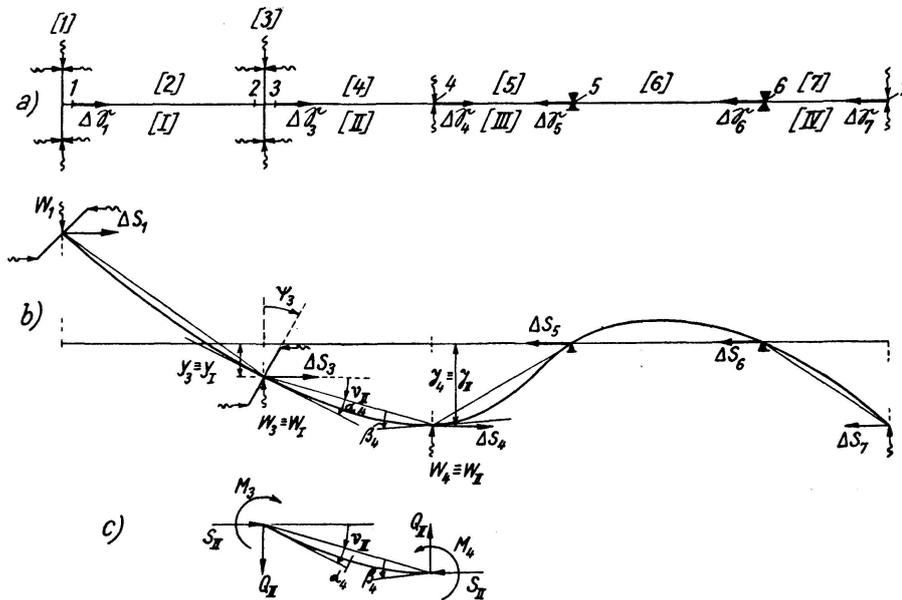


Fig. 3

In diesen „Gelenkquerschnitten“, die nach Fig. 3 mit den fortlaufenden arabischen Ziffern 1, 2, ... zu bezeichnen sind, kommen im ausgeknickten Zustand die „Knickmomente“  $M_1, M_2$  usw. zur Wirkung. Die zwischen den Gelenken liegenden „Feld-“ bzw. „Stützenstäbe“ werden, wie Fig. 3 zeigt, mit einer eingeklammerten arabischen Ziffer bezeichnet, derart, daß zwischen den Gelenken  $r - 1$  und  $r$  der Feld- bzw. Stützenstab  $[r]$  zu liegen kommt.

Die Stützen selbst werden ebenfalls durch arabische Ziffern gekennzeichnet. Eine zwischen zwei Feldstäben liegende Stütze führt die Ordnungsnummer des links von ihr liegenden Feldstabes. Ist der Stützenquerschnitt in einen Stützenstab eingespannt, so wird die Stütze mit der Ordnungsnummer des Stützenstabes bezeichnet. In solchen Fällen weist die Bezeichnung der aufeinander folgenden Stützen allerdings keine regelmäßige Zahlenfolge auf. Die letzte Stütze eines  $n$ -stäbigen Durchlaufstabes führt stets die Bezeichnung „ $n$ “, die erste Stütze hingegen wird mit „1“ bezeichnet, falls der erste Stab des Verbandes ein Stützenstab ist, jedoch mit „0“, wenn der Stabzug mit einem Feldstab beginnt.

Sind in einem Durchlaufstab nur Feldstäbe allein vorhanden, so weist die Bezifferung dieser Stäbe eine regelmäßige Zahlenfolge auf. Bei der Anwesenheit von Stützenstäben wird diese Regelmäßigkeit der Zahlenfolge gestört. Es ist aber, wie sich später erweisen wird, zweckmäßig, daß auch in solchen Fällen die an beiden Enden oder auch nur an einem Ende federnd quergeschützten Feldstäbe in ihrer Bezifferung eine regelmäßige Zahlenfolge bilden. Um diese Regelmäßigkeit herzustellen, wird bei der Anwesenheit von Stützenstäben und überdies auch bei Anwesenheit von Feldstäben, die an beiden Enden auf unverschieblichen Querstützen aufliegen, neben der bereits festgelegten Bezifferung durch arabische Ziffern noch eine zweite Bezifferung durch fortlaufende eingeklammerte römische Ziffern [I], [II], ... erforderlich. Diese Ziffern werden jenen Feldstäben zugeordnet, die an beiden Enden oder auch nur an einem Ende federnd quergestützt sind. Alle anderen Stäbe führen nur die zuerst festgesetzte Bezeichnung durch arabische Ziffern (siehe Fig. 3).

Innerhalb eines Feldes sind, wie schon erwähnt, Querschnitt, Trägheitsmoment und Axialkraft unveränderlich. Für ein beliebiges Feld  $r$  werden die folgenden Bezeichnungen eingeführt:  $c_r$  = Feldlänge,  $J_r$  = Trägheitsmoment des Querschnittes  $F_r$  in bezug auf die zur Zeichenebene senkrechte Symmetrieaxe des Querschnittes,  $\mathcal{S}_r$  = die im Felde wirksame Normalkraft. In den Stützenquerschnitten sollen die von außen, z. B. von den Füllstäben eines Fachwerkes aufgebrauchten Axialkräfte  $\Delta \mathcal{S}_r$  angreifen. Diese Gebrauchsbelastung erzeugt in den Feldstäben die Normalkräfte  $\mathcal{S}_r$ .

Der Durchlaufstab besitzt bei vorgegebener elastischer Stützung die Knicksicherheit  $\nu$ , wenn erst die  $\nu$ -fach erhöhte Belastung  $\nu \Delta \mathcal{S}_r = \Delta S_r$  das Ausknicken des Stabes bewirkt. Im Felde  $r$  eines Druckstabes wirkt dann die Knickkraft  $S_r = \nu \mathcal{S}_r$ , sie erzeugt die Knickspannung  $\sigma_r = \frac{S_r}{F_r}$ ;  $T_r$  ist der der Knickspannung  $\sigma_r$  zugeordnete (Engesser'sche) Knickmodul. Die elastische Senkung eines Stützpunktes  $i$  wird nach Fig. 3 mit  $y_i$  bezeichnet, die Tangente in einem beliebigen Punkte der elastischen Linie des ausgeknickten Stabes besitze die Neigung  $\psi$ , im Stützpunkt  $r$  daher die Neigung  $\psi_r$ . Die Neigung  $\nu_r$  der Stabsehne im Felde  $r$  wird gelegentlich auch als Verdrehung des Feldstabes  $[r]$  bezeichnet. Die Verdrehung  $\psi_r$  des Stützenstabes  $[r]$  stimmt mit der Neigung  $\psi = \psi_r$  der Stützpunkt tangente überein. Die Winkel  $\nu_r$  und  $\psi_r$  werden auch kurz „Stabverdrehungen“ genannt.  $\alpha_r$  bzw.  $\beta_r$  ist der Winkel, den die Stabsehne des  $r$ ten Feldes mit der Stützpunkt tangente der elastischen Linie am linken bzw. rechten Stabende einschließt.  $\nu_r$  und  $\psi_r$  sind im Sinne der Uhrzeigerdrehung positiv zu rechnen, ebenso  $\alpha_r$ , während für  $\beta_r$  der entgegengesetzte Drehsinn als positiv zählt. Für die in den Gelenkquerschnitten wirkenden Momente gilt dieselbe Vorzeichenregel, wie für die Winkel  $\alpha$  und  $\beta$ .

### III. Die elastische Stützung.

Die elastischen Stützenreaktionen — der Stützenwiderstand  $W_i$  und das in Fig. 4 durch das Kraftpaar  $H_i$  gekennzeichnete Einspannungsmoment  $\mathfrak{M}_i$  — gehorchen dem Elastizitätsgesetz und sind demnach den sich einstellenden

<sup>4)</sup> Die Knicksicherheit wurde mit dem Buchstaben  $\nu$ , die Neigung der Stabsehnen mit dem gleichen, jedoch immer bezeichneten Buchstaben  $\nu_r$  bezeichnet. Eine Verwechslung dieser Größen scheint daher ausgeschlossen.

Deformationen proportional. Daher ist in bezug auf Fig. 4

$$\left. \begin{aligned} W_i &= A_i y_i, \\ \mathfrak{M}_i &= C_i \psi_i. \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

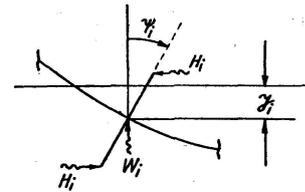


Fig. 4

Man nennt  $A_i$  den spezifischen Stützenwiderstand,  $C_i$  den spezifischen Verdrehungswiderstand. Diese Konstantwerte sind die Sonderwerte von  $W_i$  und  $\mathfrak{M}_i$ , welche den Deformationen  $y_i = 1$  bzw.  $\psi_i = 1$  entsprechen.  $A_i, C_i$  — die „Federkonstanten“ — bestimmen die „Stärke“ der elastischen Stützung.

Man bezeichnet die dem Widerstand  $W_i = 1$  zugeordnete Stützensenkung  $y_i$  mit  $\delta_i$ , bzw. die  $\mathfrak{M}_i = 1$  entsprechende Stützenverdrehung  $\psi_i$  mit  $\varepsilon_i$ ;  $\delta_i$  ist die „spezifische Stützensenkung“,  $\varepsilon_i$  die „spezifische Stützenstabverdrehung“. Mit Einführung dieser Größen ergeben sich die Formeln

$$y_i = \delta_i W_i \quad \text{bzw.} \quad \psi_i = \varepsilon_i \mathfrak{M}_i \quad (2)$$

und aus (1) folgen die Beziehungen

$$\left. \begin{aligned} 1 &= A_i \delta_i & \text{oder} & & A_i &= \frac{1}{\delta_i} & \text{bzw.} & & \delta_i &= \frac{1}{A_i}, \\ 1 &= C_i \varepsilon_i & \text{„} & & C_i &= \frac{1}{\varepsilon_i} & \text{„} & & \varepsilon_i &= \frac{1}{C_i}. \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

#### IV. Knickgleichungen, Knickbedingung und Knickdeterminante.

Der Knickzustand eines Durchlaufstabes, z. B. des in Fig. 3 dargestellten Stabes, ist dadurch gekennzeichnet, daß neben der geraden Gleichgewichtslage (Fig. 3 a) noch eine zweite Gleichgewichtslage (Fig. 3 b) existiert, in der sich die Knickbelastung  $\Delta S_i = \nu \Delta \mathfrak{S}_i$ , die Stützenreaktionen  $W_i$  und  $\mathfrak{M}_i$  am ausgebogenen Stab das Gleichgewicht halten. Im „Knickzustand“ wird sich diese letztere Gleichgewichtslage auch immer ausbilden, weil das Gleichgewicht am geraden Stab unsicher ist.

Im folgenden sind nun jene analytischen Bedingungen aufzusuchen, die erfüllt sein müssen, wenn sich die oben genannten Kräfte am deformierten Stab das Gleichgewicht halten. Ist dies der Fall, so werden z. B. die Stützensenkungen  $y_i$  und ebenso auch die Neigungswinkel  $\nu_r$  der Stabsehnern in einem ganz bestimmten Verhältnis zueinander stehen.

Der Rechnungsgang in dieser Abhandlung führt zu einem System von Gleichungen zur Berechnung der Neigungswinkel  $\nu_r$ . Sind in einem  $n$ -feldrigen Durchlaufstab z. B.  $m$  Feldstäbe enthalten, die an einem Ende oder auch an beiden Enden federnd quergestützt sind — nur solche Stäbe können im deformierten Stabzug eine Neigung  $\nu_r$  erhalten — so läßt sich, wie im folgenden gezeigt werden wird, stets eine Gleichungsgruppe von der Form

$$\left. \begin{aligned} a_{11} \nu_1 + a_{12} \nu_2 + \dots + a_{1m} \nu_m &= 0 \\ a_{21} \nu_1 + a_{22} \nu_2 + \dots + a_{2m} \nu_m &= 0 \\ \dots & \\ a_{m1} \nu_1 + a_{m2} \nu_2 + \dots + a_{mm} \nu_m &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

zur Errechnung der dem Knickzustand entsprechenden Neigungswinkel  $\nu_r$  ermitteln.

Diese Gleichungen, die auch als „Knickgleichungen“ bezeichnet werden, sind hinsichtlich der Unbekannten  $\nu_r$  linear und homogen und liefern bekanntlich nur dann endliche Werte  $\nu_r$ , wenn die Koeffizientendeterminante verschwindet. Da im ausgeknickten Zustand die Stabneigungen  $\nu_r$  von Null verschiedene endliche Werte besitzen, so folgt, daß im Knickzustand die Bedingung

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & a_{2m} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & a_{mm} \end{vmatrix} = 0 \quad (5)$$

erfüllt sein muß. Diese Bedingung  $\Delta = 0$  ist die „Knickbedingung“ des Problems, die Determinante  $\Delta$  aus den Beiwerten der Knickgleichungen wird „Knickdeterminante“ genannt.

Will man also ein Ausknicken des Durchlaufstabes herbeiführen, was in verschiedener Weise geschehen kann — z. B. durch  $\nu$ -fache Erhöhung der Gebrauchsbelastung oder durch eine  $\mu$ -fache Verschwächung der vorhandenen federnden Querstützung usw. — so ist in den Beiwerten  $a_{rK}$  zunächst die der verlangten Forderung entsprechende Größe  $\nu$ ,  $\mu$  usw. frei zu halten und dann aus  $\Delta = 0$  zu errechnen. Diese aus  $\Delta = 0$  fließende Gleichung ist die einzige Gleichung zur Lösung des Knickproblems.

Für die zahlenmäßige Durchführung der Knickberechnung ist es von größter Bedeutung, ein Verfahren zu besitzen, das für jeden beliebig gelagerten Stab in übersichtlicher, immer gleicher und gleich einfachen Art rasch die Glieder der Knickdeterminante liefert. Ein solches Verfahren soll nun an dem Sonderfall des in der Fig. 3 dargestellten Stabes entwickelt und dann verallgemeinert werden.

## V. Ermittlung der Knickgleichungen.

Gleichgewichts- und Formänderungsbetrachtungen an dem durch die Knickbelastung  $\Delta S$  deformierten Stab liefern zwei Gruppen von Gleichungen, die Lagergleichungen und die Kontinuitätsgleichungen, durch deren Verbindung die nach den Neigungswinkeln  $\nu_r$  linearen und homogenen Knickgleichungen gewonnen werden.

Die anzustellenden Untersuchungen werden am statisch bestimmten Hauptssystem durchgeführt, das unter der Wirkung der Knicklasten  $S_r$  und der statisch unbestimmten Knickmomente  $M_i$  dieselbe Beanspruchung und Deformation erleidet, wie der ausgeknickte statisch unbestimmte Durchlaufstab unter der alleinigen Belastung  $S_r$ .

### A. Ermittlung der Lagergleichungen.

1. Die Lagergleichungen eines Durchlaufstabes, der nur federnd quergestützte Feldstäbe besitzt. Die Lagergleichungen eines solchen Durchlaufstabes werden an der Hand der Fig. 5 hergeleitet, die einen aus dem Hauptssystem herausgeschnittenen Stabteil zur Darstellung bringt. In den Feldgrenzen wurde die von außen aufgebrachte Differenzbelastung  $\Delta S$  durch zwei Einzelkräfte von der Größe der Feld-

stabskräfte ersetzt, in den Gelenken des Hauptsystems werden die Knickmomente als äußere Belastung angebracht.

Die in der Figur eingeschriebene Stabbezeichnung und Bezeichnung ist im speziellen Falle mit arabischen Ziffern vorzunehmen. Die Einführung einer Beschreibung mit römischen Ziffern ist hier wegen des Fehlens von Stützenstäben nicht erforderlich.

Für die Stabneigungen  $\nu_r$  und die Stützensenkungen  $y_r$  ergibt sich aus der Figur die geometrische Beziehung

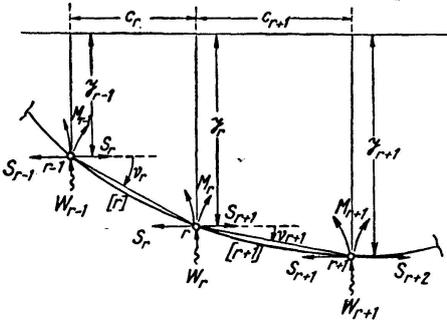


Fig. 5

$$y_r - y_{r-1} = c_r \operatorname{tg} \nu_r = c_r \nu_r \quad (6)$$

Nach Gl. (1) und (3) folgt

$$y_r = \frac{W_r}{A_r} = \delta_r W_r$$

analog

$$y_{r-1} = \frac{W_{r-1}}{A_{r-1}} = \delta_{r-1} W_{r-1}$$

$$\text{daher} \quad y_r - y_{r-1} = c_r \nu_r = \delta_r W_r - \delta_{r-1} W_{r-1} \quad (7)$$

Wie aus der Fig. 5 erkenntlich, wird der Stützenwiderstand (Lagerwiderstand)  $W_r$  nur durch die auf die Feldstäbe  $[r]$  und  $[r+1]$  wirkenden Momente und Normalkräfte erzeugt, daher ist

$$W_r = \frac{M_{r-1} - M_r}{c_r} - \frac{M_r - M_{r+1}}{c_{r+1}} + \frac{S_r c_r \operatorname{tg} \nu_r}{c_r} - \frac{S_{r+1} c_{r+1} \operatorname{tg} \nu_{r+1}}{c_{r+1}}$$

Da die Neigungswinkel  $\nu_r$  sehr klein sind, so ist  $\sin \nu_r = \operatorname{tg} \nu_r = \nu_r$ ,  $\cos \nu_r = 1$ . Die Differenz der an einem Feldstab wirkenden Momente wird weiterhin kurz „Momentendifferenz am Feldstab  $r$ “ genannt und mit  $\Delta M_{[r]}$  oder  $(\Delta M)_r$  bezeichnet. Mit

$$(\Delta M)_r = M_{r-1} - M_r = M_{\text{links}} - M_{\text{rechts}} \quad (8)$$

folgt somit aus obiger Gleichung

$$\text{analog} \quad \left. \begin{aligned} W_r &= \frac{(\Delta M)_r}{c_r} - \frac{(\Delta M)_{r+1}}{c_{r+1}} + S_r \nu_r - S_{r+1} \nu_{r+1} \\ W_{r-1} &= \frac{(\Delta M)_{r-1}}{c_{r-1}} - \frac{(\Delta M)_r}{c_r} + S_{r-1} \nu_{r-1} - S_r \nu_r \end{aligned} \right\} \quad (9)$$

und mit Rücksicht auf (7)

$$\begin{aligned} c_r \nu_r &= - \frac{\delta_{r-1}}{c_{r-1}} (\Delta M)_{r-1} + \frac{\delta_{r-1} + \delta_r}{c_r} (\Delta M)_r - \frac{\delta_r}{c_{r+1}} (\Delta M)_{r+1} - \delta_{r-1} S_{r-1} \nu_{r-1} \\ &\quad + (\delta_{r-1} + \delta_r) S_r \nu_r - \delta_r S_{r+1} \nu_{r+1} \end{aligned} \quad (10)$$

Für die zahlenmäßige Durchführung der Berechnung ist es zweckmäßig, mit dimensionslosen Verhältniszahlen zu rechnen. Aus diesem Grunde werden die in (10) und in allen späteren Gleichungen noch auftretenden Größen mit gewissen frei zu wählenden Konstantwerten in Vergleich gesetzt.

Daher wählt man einen beliebigen, abgerundeten Vergleichswert  $c^*$  von der Größenordnung der Feldlängen  $c_r$ , ebenso Vergleichswerte  $S^*$  und  $\delta^*$  von

der Größenordnung der Stabkräfte  $S_r$  bzw. der spezifischen Stützensenkungen  $\delta_r$  und setzt

$$\begin{array}{l}
 \frac{c_r}{c^*} = c'_r, \quad \text{bzw.} \quad c_r = c^* c'_r, \\
 \frac{\delta_r}{\delta^*} = \delta'_r, \quad \text{„} \quad \delta_r = \delta^* \delta'_r, \\
 \text{ferner} \quad \frac{S_r}{S^*} = S'_r, \quad \text{„} \quad S_r = S^* S'_r, \\
 \frac{M_r}{S^* c^*} = M'_r, \quad \text{„} \quad M_r = S^* c^* M'_r, \\
 \frac{(\Delta M)_r}{S^* c^*} = (\Delta M')_r, \quad \text{„} \quad (\Delta M)_r = S^* c^* (\Delta M')_r.
 \end{array} \quad (11)$$

Hier und auch späterhin soll der an irgend eine Größe beigesetzte „Strich“ daran erinnern, daß durch ihn eine dimensionslose, mit den Vergleichswerten  $S^*$ ,  $c^*$ ,  $\delta^*$  gebildete Verhältniszahl angedeutet wird. Trotzdem soll aber auch weiterhin noch, in allerdings nicht ganz richtiger Ausdrucksweise, kurzerhand von „Momenten  $M'$ “, von „Kräften  $S'$ “ usw. gesprochen werden. Mit (11) geht nun Gleichung (10) über in

$$c^* c'_r \nu_r = \delta^* S^* \left\{ - \frac{\delta'_{r-1}}{c'_{r-1}} (\Delta M')_{r-1} + \frac{\delta'_{r-1} + \delta'_r}{c'_r} (\Delta M')_r - \frac{\delta'_r}{c'_{r+1}} (\Delta M')_{r+1} \right. \\
 \left. - \delta'_{r-1} S'_{r-1} \nu_{r-1} + (\delta'_{r-1} + \delta'_r) S'_r \nu_r - \delta'_r S'_{r+1} \nu_{r+1} \right\}$$

und hieraus folgt durch Division mit  $(c'_r \delta^* S^*)$

$$\frac{1}{c'_r} \left\{ + \frac{\delta'_{r-1}}{c'_{r-1}} (\Delta M')_{r-1} - \frac{\delta'_{r-1} + \delta'_r}{c'_r} (\Delta M')_r + \frac{\delta'_r}{c'_{r+1}} (\Delta M')_{r+1} \right\} + \frac{\delta'_{r-1}}{c'_r} S'_{r-1} \nu_{r-1} \\
 + \left( \frac{c^*}{\delta^* S^*} - \frac{\delta'_{r-1} + \delta'_r}{c'_r} \right) S'_r \nu_r + \frac{\delta'_r}{c'_r} S'_{r+1} \nu_{r+1} = 0 \quad (12)$$

Gl. (12) ist dem Feldstab  $[r]$  der Fig. 5 zugeordnet, auch jedem anderen Feldstab entspricht eine solche analog gebaute Gleichung. Diese Gleichungen, deren Zahl mit der Zahl der Stabneigungswinkel  $\nu_r$  übereinstimmt, bilden die „Lagergleichungen“ oder „Lagerbedingungen“ des Knickproblems.

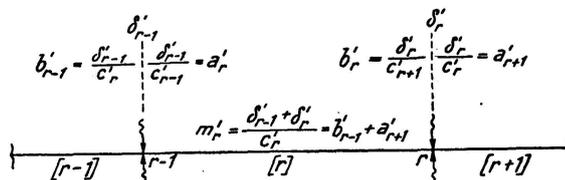


Fig. 6

Die Lagergleichungen (12) lassen sich in noch einfacherer und übersichtlicherer Weise anschreiben, wenn man jedem Feldstab je einen mit der Ordnungsziffer des Feldstabes bezeichneten  $a'$ -,  $m'$ - und  $b'$ -Wert zuordnet. Für den Feldstab  $[r]$  werden diese Werte aus den in (12) erscheinenden Koeffizienten der  $\Delta M'$  gebildet. Das Bildungsgesetz dieser Werte —

es wurde in die Fig. 6 eingeschrieben — prägt sich dem Gedächtnis, und abhängig von der jeweiligen Bezeichnung, leicht ein, wenn man es in folgende Worte faßt:

Der  $a'$ -Wert eines Feldstabes ist gleich dem  $\delta'$ -Wert der linken Stütze, geteilt durch den  $c'$ -Wert des links von der Stütze liegenden Feldstabes. Der  $a'$ -Wert des ersten Feldstabes ist daher immer gleich Null zu setzen, weil kein zugeordneter  $c'$ -Wert existiert.

Der  $b'$ -Wert eines Feldstabes ist gleich dem  $\delta'$ -Wert der rechten Stütze, geteilt durch den  $c'$ -Wert des rechts von der Stütze liegenden Feldstabes. Der  $b'$ -Wert des letzten Feldstabes ist daher immer gleich Null, weil der zugeordnete  $c'$ -Wert nicht existiert.

Der  $m'$ -Wert eines Feldstabes ist gleich der Summe aus den  $\delta'$ -Werten der das Feld begrenzenden Stützen, geteilt durch den  $c'$ -Wert des Feldes oder, was auf dasselbe hinauskommt, auch gleich der Summe aus dem  $b'$ -Wert des linken und dem  $a'$ -Wert des rechten Nachbarfeldes.

Nach dieser letzten Anweisung wird man beim praktischen Rechnen die  $m'$ -Werte ermitteln, denn in erster Linie sind die  $a'$ - und  $b'$ -Werte der Feldstäbe zu bestimmen, die dann die Ermittlung der  $m'$ -Werte in einfacher Weise ermöglichen.

Die zahlenmäßige Ermittlung der  $a'$ -,  $b'$ - und  $m'$ -Werte ist am besten nach dem in Fig. 8 dargestellten Schema durchzuführen.

Auf Grund der festgelegten Regeln ergeben sich nun die Formeln

$$\left. \begin{aligned} a'_r &= \frac{\delta'_{links}}{c'_{links}}, & b'_r &= \frac{\delta'_{rechts}}{c'_{rechts}}, \\ m'_r &= \frac{\delta'_{links} + \delta'_{rechts}}{c'_r} = b'_{links} + a'_{rechts}. \end{aligned} \right\} \quad (13)$$

Setzt man in (12) die aus den Vergleichswerten  $c^*$ ,  $\delta^*$ ,  $S^*$  aufgebaute dimensionslose Verhältniszahl

$$\frac{c^*}{\delta^* S^*} \equiv \frac{A^* c^*}{S^*} = \eta, \quad (14)$$

so nimmt die dem Stab  $[r]$  zugeordnete Lagergleichung (12) mit Rücksicht auf (13) die folgende endgültige Form an:

$$\frac{1}{c'_r} [a'_r (\Delta M')_{r-1} - m'_r (\Delta M')_r + b'_r (\Delta M')_{r+1}] + b'_{r-1} S'_{r-1} v_{r-1} + (\eta - m'_r S'_r) v_r + a'_{r+1} S'_{r+1} v_{r+1} = 0. \quad (15)$$

2. Die Lagergleichungen eines Durchlaufstabes von beliebiger Bauart. Die Querstützung kann nunmehr wie bei dem in Fig. 3 dargestellten Stab teils federnd, teils unverschieblich sein und neben den Feldstäben soll der Durchlaufstab auch Stützenstäbe besitzen.

Zunächst sei hervorgehoben, daß einem Feldstab, der beiderseits auf unverschieblichen Stützen aufliegt, keine Lagergleichung zugeordnet ist, weil für einen solchen Stab wegen  $\delta_{r-1} = \delta_r = 0$  die der Herleitung zugrunde liegende Gleichung (7) nicht existiert.

In der Fig. 7 des aus Feld- und Stützenstäben bestehenden Durchlaufstabes wird die arabische Bezifferung durch die in der Figur erscheinenden „i“, die römische Bezifferung hingegen durch die „r“ angedeutet.

Auch im vorliegenden Fall behalten Gl. (6) und (7) ihre formale Gültigkeit, wenn die hierin auftretenden Zeiger auf die „römische Bezifferung“ bezogen werden. Für den Stützenwiderstand  $W_r$ , erhält man aus Fig. 7

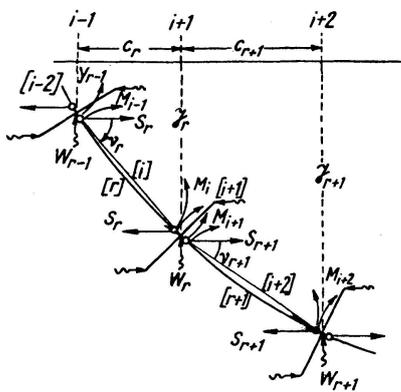


Fig. 7

$$W_r = \frac{M_{i-1} - M_i}{c_r} - \frac{M_{i+1} - M_{i+2}}{c_{r+1}} + S_r \nu_r - S_{r+1} \nu_{r+1}$$

In Analogie zu (8) sind die hier auftretenden Momentendifferenzen mit

$$\Delta M_r = M_{i-1} - M_i$$

$$\Delta M_{r+1} = M_{i+1} - M_{i+2}$$

zu bezeichnen, womit obige Gleichung formal in die zu (9) vollkommen analoge Form

$$W_r = \frac{\Delta M_r}{c_r} - \frac{\Delta M_{r+1}}{c_{r+1}} + S_r \nu_r - S_{r+1} \nu_{r+1} \quad (16)$$

übergeht. Bildet man aus (16)  $W_{r-1}$ , indem man hierin  $r$  durch  $r - 1$  ersetzt und nun  $W_{r-1}$  und  $W_r$  in Gleichung (7) einführt, so erhält man die dem Stab  $[r]$  zugeordnete Lagergleichung, die formal mit (15) vollkommen übereinstimmt. Hieraus folgt, daß die Lagergleichung (15) auch für beliebig konstruierte Durchlaufstäbe ihre Gültigkeit beibehält, wenn man die hierin auftretenden „Zeiger  $r$ “ auf die römische Bezifferung der Feldstäbe des Durchlaufstabes bezieht.

Aus (13) gewinnt man die in Fig. 7 dem Feldstab  $[r]$  zugeordneten Werte

$$\left. \begin{aligned} a'_r &= \frac{\delta'_{r-1}}{c'_{r-1}} \equiv \frac{\delta'_{i-1}}{c'_{i-2}}, & b'_r &= \frac{\delta'_r}{c'_{r+1}} \equiv \frac{\delta'_{i+1}}{c'_{i+2}}, \\ m'_r &= \frac{\delta'_{r-1} + \delta'_r}{c'_r} \equiv \frac{\delta'_{i-1} + \delta'_{i+1}}{c'_i}, \end{aligned} \right\} \quad (17)$$

während die in (15) auftretenden Differenzen  $\Delta M'$  durch die Ausdrücke

$$\left. \begin{aligned} \Delta M'_{r-1} &= M'_{i-3} - M'_{i-2} \\ \Delta M'_r &= M'_{i-1} - M'_i \\ \Delta M'_{r+1} &= M'_{i+1} - M'_{i+2} \end{aligned} \right\} \quad (18)$$

gegeben sind.

Anmerkung. Die Lagergleichungen (15) bleiben auch formal unverändert, wenn der eine oder der andere von den elastisch gestützten Feldstäben nicht, wie vorausgesetzt, auf Druck, sondern auf Zug beansprucht wird. Die in (15) auftretenden Zugkräfte  $S$  sind dann mit entgegengesetzten Vorzeichen zu versehen. Wird ein im Stabverband liegender elastisch gestützter Feldstab  $[r]$  durch keine Normalkraft beansprucht, so ist in den Lagergleichungen der ihm zugeordnete Wert  $S'_r = 0$  zu setzen.

3. Die Lagergleichungen des in Fig. 3 dargestellten Stabes. Nach den in 1. und 2. gegebenen Anweisungen lassen sich die Lagergleichungen für den allgemeinsten Fall beliebiger Stützenkombination unmittelbar ohne Herleitung in der stets gleichen Form der Gleichung (15) für jeden Feldstab, der an einem Ende oder an beiden Enden federnd quer-gestützt ist, anschreiben. Die Fig. 8 zeigt das Schema zur Ermittlung der  $a'$ -,  $b'$ - und  $m'$ -Werte des in Fig. 3 dargestellten Stabes.



Verdrehung  $\Delta\varphi_i$  der in  $i$  zusammengeschlossenen Stabquerschnitte gleich Null sein muß. Diese aus der Bedingung  $\Delta\varphi_i = 0$  entspringenden Gleichungen sind die Kontinuitätsgleichungen des Problems.

Denkt man sich die federnde Querstützung des Knickstabes unverschieblich festgelegt — die elastische Einspannung von eventuell vorhandenen Stützenstäben bleibt unverändert erhalten — so soll dieser auf nunmehr starren Querstützen ruhende Durchlaufstab als „Ersatzstab“ bezeichnet werden, weil er den gegebenen Knickstab für die folgende Betrachtung zu ersetzen vermag. Schaltet man an den Enden seiner Feldstäbe Gelenke ein, so erhält man ein statisch bestimmtes Hauptsystem, das mit jenem des Knickstabes bis auf die verschiedene Art der Querstützung vollkommen übereinstimmt.

Erteilt man dem Ersatzstab derartige Stützensenkungen, daß diese mit den Stützensenkungen des ausgeknickten Stabes übereinstimmen, so besitzen beide Stäbe in allen Feldern gleiche Stabneigungen  $\nu_r$ , gleiche Deformation und daher auch gleich große Beanspruchungen. In diesem Falle stimmen also die Knickmomente  $M_i$  im Knickstab mit den Momenten in den Gelenkquerschnitten des Ersatzstabes überein. Diese durch die Stützenverschiebungen des Ersatzstabes erzeugten Momente  $M_i$  werden nun aus der auf sein Hauptsystem anzuwendenden Bedingung  $\Delta\varphi_i = 0$  errechnet.

Ist  $\Delta\varphi_{i0}$  die durch Stützensenkung und Stützenstabverdrehung erzeugte gegenseitige Verdrehung der Querschnitte im Gelenk  $i$  des Hauptsystems,  $\Delta\varphi_{i,MS}$  die gegenseitige Verdrehung dieser Querschnitte infolge der Belastung  $MS$ , so folgt aus  $\Delta\varphi_i = \Delta\varphi_{i,MS} + \Delta\varphi_{i0} = 0$  die Kontinuitätsbedingung in der Form

$$\Delta\varphi_{i,MS} = -\Delta\varphi_{i0}. \tag{20}$$

1. Die gegenseitige Verdrehung  $\Delta\varphi_{i0}$  im Hauptsystem des Ersatzstabes. Wird nach Fig. 9 ein Feld- oder Stützenstab im Sinne der Uhr um  $(+\nu)$  bzw.  $(+\psi)$  verdreht, so drehen sich auch die „Gelenkquerschnitte“ dieser Stäbe im gleichen Sinn und um denselben Winkel. Die Vorzeichen dieser Querschnittsverdrehungen sind nach der bereits im Abschnitt II für die Drehwinkel  $\alpha$  und  $\beta$  festgesetzten Vorzeichenregel zu beurteilen. Demnach ist die Verdrehung der Gelenkquerschnitte an den linken Stabenden positiv, an den rechten Stabenden hingegen negativ.

Auf Grund dieser Feststellung errechnet sich die gegenseitige Verdrehung  $\Delta\varphi_{i0}$  der im Gelenk  $i$  der Fig. 9 zusammengeschlossenen Gelenkquerschnitte aus den folgenden Gleichungen

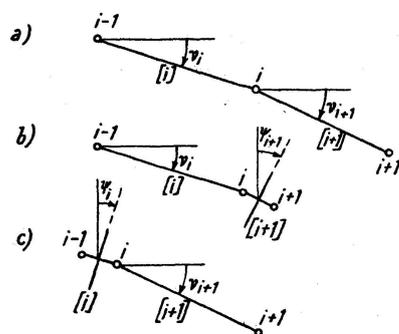


Fig. 9

Fig. 9 a)	$\Delta\varphi_{i0} = -\nu_i + \nu_{i+1}$	} (21)
„ 9 b)	$\Delta\varphi_{i0} = -\nu_i + \psi_{i+1}$	
„ 9 c)	$\Delta\varphi_{i0} = -\psi_i + \nu_{i+1}$	

Hieraus folgt mit Rücksicht auf (20) die Form

Fig. 9 a)	$-\Delta\varphi_{i0} = \nu_i - \nu_{i+1}$	} (22)
„ 9 b)	$-\Delta\varphi_{i0} = \nu_i - \psi_{i+1}$	
„ 9 c)	$-\Delta\varphi_{i0} = \psi_i - \nu_{i+1}$	

d. h. die auf der rechten Seite der Kontinuitätsgleichung (20) stehende gegenseitige Verdrehung  $(-\Delta\varphi_{i0})$  zweier Gelenkquerschnitte, infolge der Ver-

drehung von Feld- und Stützenstäben, ist gleich der Differenz der von links nach rechts aufeinander folgenden „Stabverdrehungen“ der beiden im Gelenk  $i$  zusammengeschlossenen Stäbe.

Infolge alleiniger Stützensenkung erleiden im Hauptsystem des Ersatzstabes, wie in Fig. 10 dargestellt, nur die Feldstäbe, nicht aber die Stützenstäbe, Verdrehungen. Die hiedurch erzeugten gegenseitigen Verdrehungen  $\Delta\varphi_{i0}$  errechnen sich daher aus den Gleichungen

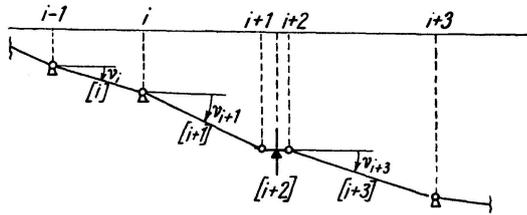


Fig. 10

$$\left. \begin{aligned} -\Delta\varphi_{i,0} &= v_i - v_{i+1}, \\ -\Delta\varphi_{i+1,0} &= v_{i+1} - 0, \\ -\Delta\varphi_{i+2,0} &= 0 - v_{i+3}. \end{aligned} \right\} \quad (23)$$

2. Die gegenseitige Verdrehung  $\Delta\varphi_{i,MS}$  im Hauptsystem des Ersatzstabes. Wie schon erwähnt, werden diese gegenseitigen Verdrehungen durch die auf das Hauptsystem gleichzeitig einwirkende Belastung  $MS$  erzeugt. Es ist gleichgültig, ob man, wie in Fig. 10, zuerst die Stützensenkung durchführt und nachher die Belastung  $MS$  aufbringt oder umgekehrt zuerst diese Belastung wirken läßt und nachträglich die Stützensenkung vornimmt. Die Belastung  $MS$  deformiert einerseits die Feldstäbe (Fig. 11—13) und bewirkt andererseits eine Verdrehung der starren Stützenstäbe (Fig. 14). Die hiedurch erzeugten Verdrehungen der Gelenkquerschnitte sollen im folgenden berechnet werden.

a) Verdrehung der Gelenkquerschnitte eines Feldstabes infolge seiner Deformation durch die Belastung  $MS$ . Die Abmessungen des Feldstabes, seine Feldlänge  $c_r$ , die Querschnittsfläche  $F_r$  und das Trägheitsmoment  $J_r$  sind gegeben. In den Gelenkquerschnitten, die mit den Endquerschnitten des Stabes zusammenfallen, wirken die Momente  $M_{r-1}$  bzw.  $M_r$  und die Normalkräfte  $S_r$ . Die in den Fig. 11—13 dargestellten Verdrehungswinkel  $\alpha_r$  und  $\beta_r$  der Endquerschnitte sind zu ermitteln. Diese Verdrehungen sind unabhängig von der Neigung  $\nu_r$  der Stabsehne, wenn  $\nu_r$  klein, d. h.  $\sin \nu_r = \sim \text{tg } \nu_r = \sim \nu_r$ ,  $\cos \nu_r = 1$  gesetzt werden darf, sie besitzen aber verschiedene Werte, je nachdem  $S_r$  eine Druck- oder Zugkraft oder  $S_r = 0$  ist. In all diesen drei Fällen lassen sich die Verdrehungswinkel  $\alpha_r$  und  $\beta_r$  aus den formal gleichen Formeln

$$\left. \begin{aligned} \alpha_r &= M'_{r-1} \tau'_r + M'_r \sigma'_r, \\ \beta_r &= M'_{r-1} \sigma'_r + M'_r \tau'_r \end{aligned} \right\} \quad (24)$$

bestimmen, wenn hierin für  $\sigma'_r$  und  $\tau'_r$  die durch die Gleichungen (28) bzw. (29) oder (33) bestimmten Werte eingeführt werden.

Sonderfall 1. Die Normalkraft  $S_r$  ist eine Druckkraft. Die Integration der Differentialgleichung der elastischen Linie, die hier unterbleiben möge, führt zur Berechnung der in Fig. 11 dargestellten Winkel  $\alpha_r$ ,  $\beta_r$ , die aus den Formeln

$$\left. \begin{aligned} \alpha_r &= \frac{M_{r-1}}{S_r c_r} t_r + \frac{M_r}{S_r c_r} s_r, \\ \beta_r &= \frac{M_{r-1}}{S_r c_r} s_r + \frac{M_r}{S_r c_r} t_r, \end{aligned} \right\} \quad (25)$$

gewonnen werden, wobei



wobei

$$\left. \begin{aligned} 1 - \frac{\varphi_r}{\text{Sin } \varphi_r} &= \xi_r \\ \frac{\varphi_r}{\text{Tg } \varphi_r} - 1 &= t_r \end{aligned} \right\} \quad (30)$$

gesetzt wurde.

$\varphi_r$  ist wieder nach (27) zu bestimmen, während Sin und Tg die hyperbolischen Funktionen andeuten.

Sonderfall 3. Die Normalkraft  $S_r = 0$ . In diesem Falle ist  $\varphi_r = 0$ ; hiemit erhält man aus (25) oder in direkter Rechnung aus Fig. 13

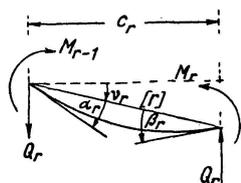


Fig. 13

$$\left. \begin{aligned} \alpha_r &= \frac{M_{r-1} c_r}{3 E J_r} + \frac{M_r c_r}{6 E J_r} \\ \beta_r &= \frac{M_{r-1} c_r}{6 E J_r} + \frac{M_r c_r}{3 E J_r} \end{aligned} \right\} \quad (30)$$

Um die Form der Gl. (24) herzustellen, bildet man mit den Vergleichswerten  $S^* c^*$  einen zu (27) analogen Wert

$$\varphi^* = \sqrt{\frac{S^* c^{*2}}{E J_r}}, \quad (31)$$

eliminiert hiemit  $E J_r$  aus (30) und erhält

$$\left. \begin{aligned} \alpha_r &= M'_{r-1} \frac{c'_r \varphi^{*2}}{3} + M'_r \frac{c'_r \varphi^{*2}}{6} \\ \beta_r &= M'_{r-1} \frac{c'_r \varphi^{*2}}{6} + M'_r \frac{c'_r \varphi^{*2}}{3} \end{aligned} \right\} \quad (32)$$

in formaler Übereinstimmung mit (24), wenn in (32)

$$\frac{c'_r \varphi^{*2}}{3} = t'_r \quad \text{und} \quad \frac{c'_r \varphi^{*2}}{6} = \sigma'_r \quad (33)$$

gesetzt wird.

b) Verdrehung der Gelenkquerschnitte eines Stützenstabes [r] infolge seiner Verdrehung durch die Belastung  $MS$ . Die Verdrehung  $\psi_r$  des in Fig. 14 dargestellten Stützenstabes wird einzig und allein durch die beiden Momente  $M_{r-1}$  und  $M_r$  erzeugt. Beide Momente drehen im positiven Sinn, daher ist nach Gl. (2)

$$\psi_r = M_{r-1} \varepsilon_r - M_r \varepsilon_r = \frac{M_{r-1} - M_r}{S^* c^*} S^* c^* \varepsilon_r = (M'_{r-1} - M'_r) \varepsilon'_r \quad (34)$$

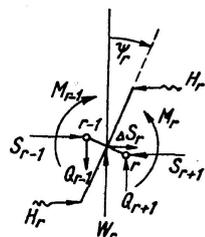


Fig. 14

wobei

$$\varepsilon'_r = S^* c^* \varepsilon_r \quad (35)$$

gesetzt wurde. Die Verdrehung des links liegenden Gelenkquerschnittes  $r-1$  ist durch

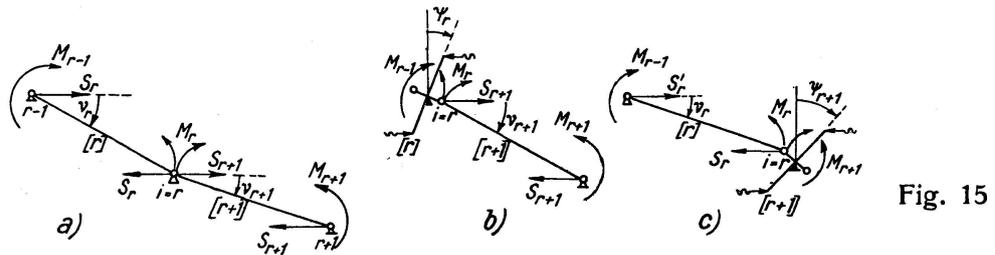
$$\varphi_{r-1} = + \psi_r = (M'_{r-1} - M'_r) \varepsilon'_r \quad (36)$$

jene des rechts liegenden Gelenkquerschnittes  $r$  durch

$$\varphi_r = - \psi_r = - (M'_{r-1} - M'_r) \varepsilon'_r \quad (37)$$

gegeben.

c) Die gegenseitige Verdrehung  $\Delta\varphi_{i,MS}$  der zweiständigen Systeme und ihre Kontinuitätsbedingung. Die gegenseitige Verdrehung  $\Delta\varphi_i = \Delta\varphi_{i,MS} + \Delta\varphi_{i0}$  der Gelenkquerschnitte in einem Gelenk  $i$  des Hauptsystems wird, wie leicht zu erkennen, nur von der auf die Stäbe  $[i]$  und  $[i+1]$  wirkenden Belastung  $M, S$  und von den Neigungen  $v_i$  und  $v_{i+1}$  dieser Stäbe erzeugt. Solche zwei in einem Gelenk  $i$  zusammengeschlossene Stäbe  $[i]$  und  $[i+1]$  bilden ein sogenanntes „zweiständiges System“, das sich nach Fig. 15 entweder aus zwei Feldstäben oder aus je einem Feld- und Stützenstab zusammensetzt. Die Kontinuitätsbedingung  $\Delta\varphi_i = 0$  in der Form  $\Delta\varphi_{i,MS} = -\Delta\varphi_{i0}$  liefert für das Gelenk  $i = r$  der Fig. 15, die folgenden, mit Hilfe von (24) und (23) zu bildenden Kontinuitätsgleichungen:



$$\left. \begin{aligned} \text{Fig. 15 a)} & \quad +M'_{r-1} \sigma'_r + M'_r (\tau'_r + \tau'_{r+1}) + M'_{r+1} \sigma'_{r+1} = -\Delta\varphi_{r0} = v_r - v_{r+1} \\ \text{„ 15 b)} & \quad -M'_{r-1} \varepsilon'_r + M'_r (\varepsilon'_r + \tau'_{r+1}) + M'_{r+1} \sigma'_{r+1} = -\Delta\varphi_{r0} = 0 - v_{r+1} \\ \text{„ 15 c)} & \quad +M'_{r-1} \sigma'_r + M'_r (\tau'_r + \varepsilon'_r) - M'_{r+1} \varepsilon'_{r+1} = -\Delta\varphi_{r0} = v_r - 0 \end{aligned} \right\} (38)$$

3. Die Fortleitungszahlen  $a$  und  $b$  der zweiständigen Systeme. Die Klammerausdrücke in obigen Gleichungen geben die gegenseitige Verdrehung  $\kappa'_i$  im Gelenk  $i = r$  infolge  $M'_r = +1$  an. Schließt das Gelenk  $i$  zwei Feldstäbe zusammen, so ist der  $\kappa'_i$ -Wert die Summe aus den  $\tau'$ -Werten der zusammengeschlossenen Stäbe. Verbindet das Gelenk  $i$  aber einen Feld- und Stützenstab, so ist der  $\kappa'_i$ -Wert die Summe aus dem  $\tau'$ -Wert des Feldstabes und dem  $\varepsilon'$ -Wert des Stützenstabes. Nach dieser Definition erhält man z. B. für

$$\left. \begin{aligned} \text{Fig. 15 a)} & \quad \kappa'_i = \tau'_{links\ i} + \tau'_{rechts\ i} \\ \text{„ 15 b)} & \quad \kappa'_i = \varepsilon'_{links\ i} + \tau'_{rechts\ i} \\ \text{„ 15 c)} & \quad \kappa'_i = \tau'_{links\ i} + \varepsilon'_{rechts\ i} \end{aligned} \right\} (39)$$

Jedem Gelenk  $i$  ist ein solcher nach (39) zu bildender  $\kappa'_i$ -Wert zugeordnet und ebenso ein  $k'_i$ -Wert, der durch

$$k'_i = \frac{1}{\kappa'_i} \quad (40)$$

gegeben ist.  $\kappa'_i$  und sein Reziprokwert  $k'_i$  sind stets Absolutwerte.

Mit (39) und (40) geht die Gleichungsgruppe (38) über in

$$\left. \begin{aligned} \text{Fig. 15 a)} & \quad +M'_{r-1} \frac{\sigma'_r}{\kappa'_r} + M'_r + M'_{r+1} \frac{\sigma'_{r+1}}{\kappa'_r} = -\frac{1}{\kappa'_r} \Delta\varphi_{r0} = -k'_r \Delta\varphi_{r0} \\ \text{„ 15 b)} & \quad -M'_{r-1} \frac{\varepsilon'_r}{\kappa'_r} + M'_r + M'_{r+1} \frac{\sigma'_{r+1}}{\kappa'_r} = -\frac{1}{\kappa'_r} \Delta\varphi_{r0} = -k'_r \Delta\varphi_{r0} \\ \text{„ 15 c)} & \quad +M'_{r-1} \frac{\sigma'_r}{\kappa'_r} + M'_r - M'_{r+1} \frac{\varepsilon'_{r+1}}{\kappa'_r} = -\frac{1}{\kappa'_r} \Delta\varphi_{r0} = -k'_r \Delta\varphi_{r0} \end{aligned} \right\} (41)$$

Der  $\kappa'$ -Wert, der einem links- bzw. rechtsseitigen Gelenk eines Feld- bzw. Stützenstabes zugeordnet ist, soll nunmehr kurz mit „ $\kappa'_{links}$ “ bzw. mit „ $\kappa'_{rechts}$ “ bezeichnet werden. Mit Vorteil wird nun jedem Feld- und jedem Stützenstab  $[r]$  ein  $a$ - bzw.  $b$ -Wert zugeordnet, der durch die Gleichungen

$$\left. \begin{array}{l} \text{Feldstab . . . } a_r = \frac{\sigma'_r}{\kappa'_{links}}, \quad b_r = \frac{\sigma'_r}{\kappa'_{rechts}} \\ \text{Stützenstab . . } a_r = \frac{\varepsilon'_r}{\kappa'_{links}}, \quad b_r = \frac{\varepsilon'_r}{\kappa'_{rechts}} \end{array} \right\} \quad (42)$$

gegeben ist.

Mit (42) lassen sich die Kontinuitätsgleichungen (41) auch in der folgenden Form anschreiben:

$$\left. \begin{array}{l} \text{Fig. 15 a) } M'_r = -b_r M'_{r-1} - a_{r+1} M'_{r+1} - k'_r \Delta\varphi_{r0} \\ \text{„ 15 b) } M'_r = +b_r M'_{r-1} - a_{r+1} M'_{r+1} - k'_r \Delta\varphi_{r0} \\ \text{„ 15 c) } M'_r = -b_r M'_{r-1} + a_{r+1} M'_{r+1} - k'_r \Delta\varphi_{r0} \end{array} \right\} \quad (43)$$

Aus (43) erkennt man nun die statische Bedeutung der  $a$ -,  $b$ - und  $k'$ -Werte.

Leitet man am linken Stabende eines zweiständigen Systems  $[r-1]$   $[r]$  ein Moment  $M'_{r-1}$  ein, so wird es gewissermaßen nach rechts hin über den Stab  $[r]$  „fortgeleitet“ und kommt am anderen rechten Stabende in der Größe  $(-b_r M'_{r-1})$  zur Wirkung, wenn die Fortleitung über einen Feldstab erfolgte, hingegen in der Größe  $(+b_r M'_{r-1})$  im Falle der Fortleitung über einen Stützenstab.

Wird hingegen am rechten Ende dieses zweiständigen Systems ein Moment  $M'_{r+1}$  eingeleitet, so wird es nach links hin über den Stab  $[r+1]$  fortgeleitet und kommt am linken Ende eines Feldstabes in der Größe  $(-a_{r+1} M'_{r+1})$ , am linken Ende eines Stützenstabes in der Größe  $(+a_{r+1} M'_{r+1})$  zur Wirkung.

Die für die Fortleitung charakteristischen, durch die Formeln (42) bestimmten Zahlenwerte  $a$  und  $b$ , sollen daher als „Fortleitungszahlen der zweiständigen Systeme“ bezeichnet werden.

Für  $M'_{r-1} = 0$ ,  $M'_{r+1} = 0$  und  $\Delta\varphi_{r0} = -1$  folgt aus (43) der Wert  $M'_r = +k'_r$  als Sonderwert des Momentes  $M'_r$  infolge der gegenseitigen, durch alleinige Stützenverschiebung erzeugten Verdrehung  $\Delta\varphi_{r0} = -1$ .

4. Die Kontinuitätsgleichungen des in Figur 3 dargestellten Stabes. Wie schon erwähnt, ist die einem Gelenk  $i$  des Hauptsystems zugeordnete Kontinuitätsbedingung mit der Kontinuitätsgleichung des in  $i$  zusammengeschlossenen zweiständigen Systems identisch. Errechnet man daher für den in Fig. 3 dargestellten Stab mit Hilfe von (40) sämtliche  $k'_i$ -Werte, mit (42) die Fortleitungszahlen  $a_r$  und  $b_r$ , so kann man die durch (43) bestimmten Kontinuitätsgleichungen unmittelbar in der folgenden Form anschreiben:

$$\left. \begin{array}{l} M'_1 = \quad \quad \quad - a_2 M'_2 - k'_1 \Delta\varphi_{10}, \\ M'_2 = - b_2 M'_1 + a_3 M'_3 - k'_2 \Delta\varphi_{20}, \\ M'_3 = + b_3 M'_2 - a_4 M'_4 - k'_3 \Delta\varphi_{30}, \\ M'_4 = - b_4 M'_3 - a_5 M'_5 - k'_4 \Delta\varphi_{40}, \\ M'_5 = - b_5 M'_4 - a_6 M'_6 - k'_5 \Delta\varphi_{50}, \\ M'_6 = - b_6 M'_5 \quad \quad \quad - k'_6 \Delta\varphi_{60}, \end{array} \right\} \quad (44)$$

wobei die Belastungsglieder  $\Delta\varphi_{i0}$  nach (21) durch

$$\left. \begin{aligned} \Delta\varphi_{10} &= v_I - 0 & \Delta\varphi_{40} &= v_{III} - v_{II} \\ \Delta\varphi_{20} &= 0 - v_I & \Delta\varphi_{50} &= 0 - v_{III} \\ \Delta\varphi_{30} &= v_{II} - 0 & \Delta\varphi_{60} &= v_{IV} - 0 \end{aligned} \right\} \quad (45)$$

gegeben sind.

**C. Die Berechnung der Knickmomente  $M'_i$ .**

1. Die Knickmomente  $M'_i$  als Funktion der Belastungsglieder  $\Delta\varphi_{i0}$ . Aus den linearen Gleichungen (44) ergeben sich die unbekanntenen Momente  $M'_i$  als Funktion der „Belastungsglieder  $\Delta\varphi_{i0}$ “ in der Form

$$\left. \begin{aligned} M'_1 &= \bar{\lambda}'_{11} \Delta\varphi_{10} + \bar{\lambda}'_{12} \Delta\varphi_{20} + \bar{\lambda}'_{13} \Delta\varphi_{30} + \bar{\lambda}'_{14} \Delta\varphi_{40} + \bar{\lambda}'_{15} \Delta\varphi_{50} + \bar{\lambda}'_{16} \Delta\varphi_{60} \\ M'_2 &= \bar{\lambda}'_{21} \quad \text{„} \quad + \bar{\lambda}'_{22} \quad \text{„} \quad + \bar{\lambda}'_{23} \quad \text{„} \quad + \bar{\lambda}'_{24} \quad \text{„} \quad + \bar{\lambda}'_{25} \quad \text{„} \quad + \bar{\lambda}'_{26} \quad \text{„} \\ M'_3 &= \bar{\lambda}'_{31} \quad \text{„} \quad + \bar{\lambda}'_{32} \quad \text{„} \quad + \bar{\lambda}'_{33} \quad \text{„} \quad + \bar{\lambda}'_{34} \quad \text{„} \quad + \bar{\lambda}'_{35} \quad \text{„} \quad + \bar{\lambda}'_{36} \quad \text{„} \\ &\dots \dots \dots \end{aligned} \right\} \quad (46)$$

Die Gleichungen (44), (46) gelten sowohl für den elastisch gestützten ausgeknickten Durchlaufstab, als auch für den ihm zugeordneten und der weiteren Betrachtung zugrunde gelegten, durch Stützensenkung deformierten Ersatzstab.

Aus dem linearen Aufbau von (44), (46) folgt die Gültigkeit des Superpositionsgesetzes zur Ermittlung der Momente  $M'_i$  aus den „Teilbelastungen  $\Delta\varphi_{i0}$ “. Unter einer „Teilbelastung  $\Delta\varphi_{i0}$ “ versteht man eine auf die Stützen des Ersatzstabes derartig ausgeübte Kraftwirkung, daß infolge der hiedurch erzeugten Stützenverschiebungen nur ein einziges Belastungsglied  $\Delta\varphi_{i0} \neq 0$  ist, wie z. B.  $\Delta\varphi_{40}$  in Fig. 16, hingegen alle übrigen  $\Delta\varphi_{i0}$  den Wert Null besitzen.

Im folgenden werden zunächst die Sonderwerte der Momente  $M'_i$  infolge der einzelnen Teilbelastungen ermittelt und dann durch Superposition die Momente  $M'_i$  infolge „Totalbelastung“ bestimmt.

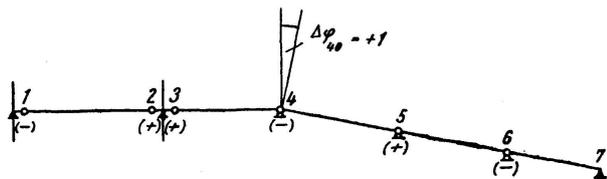


Fig. 16

Einflußzahlen  $\lambda'$  und Fortleitungszahlen  $p_r, q_r$ . Die in (46) erscheinenden  $\bar{\lambda}'$ -Werte sind die mit Vorzeichen behafteten Einflußzahlen der Belastungsglieder  $\Delta\varphi_{i0}$ . Ihre Absolutwerte  $|\bar{\lambda}'|$  sollen in Hinkunft durch die Bezeichnung  $\lambda'$ , also durch Weglassung des Querstriches, gekennzeichnet werden. Die in einer Vertikalkolonne von (46) stehenden Einflußzahlen, z. B.  $\bar{\lambda}'_{14}, \bar{\lambda}'_{24} \dots$ , sind Sonderwerte der Momente  $M'_i$  infolge der „Teilbelastung  $\Delta\varphi_{i4} = +1$ “, die der in Fig. 16 dargestellten Stützenverschiebung entspricht. Die dieser „Teilbelastung“ zugeordneten Kontinuitätsgleichungen erhält man aus (44), indem man hierin  $\Delta\varphi_{40} = +1$  und alle übrigen  $\Delta\varphi_{i0} = 0$  setzt. Hieraus werden unter Beibehaltung eines zunächst beliebigen Verdrehungswinkels  $\Delta\varphi_{40}$ , durch Elimination von oben bzw. von unten die folgenden zwei Gleichungsgruppen gewonnen:

$$\left. \begin{aligned} M'_1 &= -p_2 M'_2 \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot p_2 = a_2 \\ M'_2 &= +p_3 M'_3 \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot p_3 = \frac{a_3}{1 - b_2 p_2} \\ M'_3 &= -p_4 M'_4 \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot p_4 = \frac{a_4}{1 - b_3 p_3} \\ M'_4 &= -p_5 M'_5 - \frac{p_5}{a_5} k'_4 \Delta\varphi_{40} \cdot \cdot \cdot p_5 = \frac{a_5}{1 - b_4 p_4} \end{aligned} \right\} (47)$$

$$\left. \begin{aligned} M'_6 &= -q_6 M'_5 \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot q_6 = b_6 \\ M'_5 &= -q_5 M'_4 \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot q_5 = \frac{b_5}{1 - a_6 q_6} \\ M'_4 &= -q_4 M'_3 - \frac{q_4}{b_4} k'_4 \Delta\varphi_{40} \cdot \cdot \cdot q_4 = \frac{b_4}{1 - a_5 q_5} \end{aligned} \right\} (48)$$

$M'_3$  aus (47) in die letzte Gleichung (48) eingesetzt, liefert

$$M'_4 = -\frac{q_4}{1 - p_4 q_4} \frac{k'_4}{b_4} \Delta\varphi_{40} = \bar{\lambda}'_{44} \Delta\varphi_{40} \quad (49)$$

und  $M'_5$  aus (48) in die letzte Gleichung (47) gibt

$$M'_4 = -\frac{p_5}{1 - p_5 q_5} \frac{k'_4}{a_5} \Delta\varphi_{40} = \bar{\lambda}'_{44} \Delta\varphi_{40} \quad (50)$$

Die Gleichung (49) oder (50) bestimmt das der Teilbelastung  $\Delta\varphi_{40}$  zugeordnete Moment  $M'_4$  im Gelenkquerschnitt  $i = 4$ . Mit Kenntnis dieses Momentes gewinnt man aus (47) die Momente  $M'$  in den links von  $i = 4$  liegenden Gelenkquerschnitten des Ersatzstabes mit Hilfe der „Fortleitungszahlen  $p$ “, hingegen aus (48) die Momente  $M'$  in den Gelenkquerschnitten rechts von  $i = 4$  mit Hilfe der „Fortleitungszahlen  $q$ “.

Diese Fortleitungszahlen  $p$  und  $q$ , deren allgemeines Bildungsgesetz aus (47), (48) zu erkennen ist, sind den einzelnen Feld- und Stützenstäben zugeordnet, ihre Absolutwerte errechnen sich mit Hilfe der bereits nach (42) bekannten Fortleitungszahlen  $a_r$ ,  $b_r$  der zweiständigen Systeme aus den durch Verallgemeinerung von (47) und (48) gefundenen Formeln

$$p_r = \frac{a_r}{1 - b_{r-1} p_{r-1}}, \quad \left| \quad r = 1, 2 \dots n \right. \quad (51)$$

$$q_r = \frac{b_r}{1 - a_{r+1} q_{r+1}}, \quad \left| \quad r = n, n-1 \dots 2, 1 \right. \quad (52)$$

Die Zeiger  $r$  in (51) und (52) beziehen sich auf die arabische Bezifferung der Feld- und Stützenstäbe des durchlaufenden Stabverbandes. Da, wie seinerzeit erwähnt, der erste Stab im Stabverband, gleichgültig ob Feld- oder Stützenstab, stets den Wert  $a_1 = 0$ , der letzte Stab des Verbandes immer den Wert  $b_n = 0$  besitzt, so folgt auch aus (51) bzw. (52), daß stets  $p_1 = 0$  und  $q_n = 0$  ist.

Der linke Randstab eines durchlaufenden Stabes besitzt daher keinen  $p$ -Wert, der rechte Randstab hingegen keinen  $q$ -Wert, während jedem inneren Stab je ein  $p$ - und  $q$ -Wert zugeordnet ist.

Die Berechnung der Fortleitungszahlen  $p_r, q_r$  läßt sich zweckmäßig nach dem im Zahlenbeispiel IX verwendeten Schema durchführen.

Aus (47) und (48) erkennt man ferner, daß die Momente  $M'$  an den Enden eines Feldstabes stets entgegengesetzte Vorzeichen besitzen, die beiden Momente  $M'$  zu beiden Seiten eines Stützenstabes hingegen stets gleiche Vorzeichen aufweisen. Wie beim zweiständigen System, so ist auch hier die Momentenfortleitung über einen Feldstab stets mit Zeichenwechsel, die Fortleitung über einen Stützenstab hingegen stets mit Zeichenfolge verbunden. Dieses hier für die Teilbelastung  $(+\Delta\varphi_{40})$  hergeleitete Gesetz der Momentenfortpflanzung im Ersatzstab, das sinngemäß auch in jedem anderen Falle von Teilbelastung Gültigkeit besitzt, soll weiterhin kurz als „Fortleitungsregel“ bezeichnet werden.

Aus (49), (50) ergibt sich infolge der Belastung  $(+\Delta\varphi_{40})$  ein negatives Moment  $M'_4$ , das in den oberen Fasern des Gelenkquerschnittes  $i=4$  Zug erzeugt, was auch unmittelbar in Fig. 16 aus der Form der Abknickung zu erkennen ist. Die nach der Fortleitungsregel bestimmten Vorzeichen der übrigen Momente  $M'$  wurden in die Fig. 16 eingeschrieben.

Mit  $\Delta\varphi_{40} = +1$  werden die Momente  $M'$  in (47)–(50) identisch mit den Einflußzahlen  $\lambda'_{i4}$ . Aus (49) erhält man zur Bestimmung des Absolutwertes  $\lambda'_{44}$  die Formel

$$\lambda'_{44} = \frac{q_4}{1-p_4 q_4} \frac{k'_4}{b_4}, \quad (53)$$

aus (50) die Formel

$$\lambda'_{44} = \frac{p_5}{1-p_5 q_5} \frac{k'_4}{a_5}, \quad (54)$$

während alle übrigen Einflußzahlen  $\lambda'_{i4}$  mittelst der Fortleitungsregel zu bestimmen sind und zwar für  $i < 4$  mit Hilfe der Fortleitungszahlen  $p$ , für  $i > 4$  mit Hilfe der Fortleitungszahlen  $q$ .

Aus (53), (54) ergeben sich durch Verallgemeinerung die Formeln zur Bestimmung der Einflußzahlen  $\lambda'_{ii}$  in der von links nach rechts fallenden „Hauptdiagonale“ von (46) und zwar

$$\text{aus (53)} \quad \lambda'_{ii} = \frac{q_r}{1-p_r q_r} \frac{k'_i}{b_r}, \quad \Big|_{r=i} \quad (55)$$

$$\text{aus (54)} \quad \lambda'_{ii} = \frac{p_{r+1}}{1-p_{r+1} q_{r+1}} \frac{k'_i}{a_{r+1}}, \quad \Big|_{r=i} \quad (56)$$

Die Zeiger  $r$  beziehen sich auf die arabische Bezifferung der Feldstäbe, die Zeiger  $i$  auf die arabische Bezifferung der Gelenkquerschnitte.

$\lambda'_{ii}$  als Sonderwert des Momentes  $M'_i$  infolge der Belastung  $\Delta\varphi_{i0} = +1$  ist stets negativ.

Da der erste Gelenkquerschnitt mit „1“, der letzte Gelenkquerschnitt immer mit „ $n-1$ “ beziffert ist, so sind die Einflußzahlen  $\lambda'_{ii}$  für  $i=1$  bis  $i=n-1$  zu ermitteln.

Für die erste und letzte Einflußzahl  $\lambda'_{ii}$  ergeben sich besonders einfache Formeln und zwar

$$\text{wegen } p_1 = 0 \text{ aus (55)} \quad \lambda'_{11} = \frac{q_1}{b_1} k'_1, \quad (57)$$

$$\text{wegen } q_n = 0 \text{ aus (56)} \quad \lambda'_{n-1, n-1} = \frac{p_n}{a_n} k'_{n-1}. \quad (58)$$

Sind die Randstäbe des Stabzuges aber unverdrehbar gelagerte, also fest eingespannte Stützenstäbe, so besitzen die ihnen zugeordneten  $ab$ - und  $pq$ -Fortleitungszahlen den Wert Null. Die Gleichungen (57), (58) nehmen dann die unbestimmte Form  $\frac{0}{0}$  an, weshalb in solchen Fällen  $\lambda'_{11}$  aus (56) und  $\lambda'_{n-1, n-1}$  aus (55) zu errechnen ist.

Schließlich läßt sich noch eine wichtige Beziehung herleiten, durch welche die  $\lambda'_{ii}$ -Einflußzahlen miteinander verknüpft sind. Nach der Fortleitungsregel gelten für die Absolutwerte  $\lambda'_{i, i-1}$  und  $\lambda'_{i-1, i}$  die Beziehungen

$$\lambda'_{i, i-1} = q_r \lambda'_{i-1, i-1} \Big|_{r=i} \quad \text{bzw.} \quad \lambda'_{i-1, i} = p_r \lambda'_{ii} \Big|_{r=i}$$

und da nach MAXWELL  $\lambda'_{i, i-1} = \lambda'_{i-1, i}$ , so folgt

$$\lambda'_{ii} = \frac{q_r}{p_r} \lambda'_{i-1, i-1} \Big|_{r=i} = \mu_r \lambda'_{i-1, i-1} \Big|_{r=i} \quad (59)$$

oder hieraus durch Umkehrung und Erhöhung des Zeigers  $i$  auf  $i + 1$

$$\lambda'_{ii} = \frac{p_r}{q_r} \lambda'_{i+1, i+1} \Big|_{r=i+1}. \quad (60)$$

Errechnet man nun nach (57) die erste Einflußzahl  $\lambda'_{11}$  oder die letzte Einflußzahl  $\lambda'_{n-1, n-1}$  aus (58), so kann man die übrigen  $\lambda'_{ii}$ -Werte nach (59) oder (60) in einfacherer Weise erhalten, als durch direkte Berechnung nach den Gleichungen (55), (56), die zu Kontrollrechnungen verwendet, immerhin gute Dienste tun.

Die in (46) oberhalb der Hauptdiagonale stehenden Einflußzahlen sind nach der Fortleitungsregel mit Hilfe der  $p$ -Zahlen aus den Einflußzahlen  $\lambda'_{ii}$  zu ermitteln. In analoger Weise gewinnt man die in (46) unterhalb der Hauptdiagonale stehenden Einflußzahlen aus den  $\lambda'_{ii}$  mit Hilfe der Fortleitungszahlen  $q$ .

Mit Kenntnis der Einflußzahlen  $\bar{\lambda}'$  sind nunmehr auch die in (46) durch Totalbelastung erzeugten Knickmomente  $M'_i$  bekannte Funktionen der Belastungsglieder  $\Delta \varphi_{i0}$ .

2. Die Knickmomente  $M'_i$  als Funktion der Neigungswinkel  $\nu_r$ . Die Gleichungen (46) liefern auch die Knickmomente  $M'_i$  des in Fig. 3 dargestellten Durchlaufstabes als Funktion der Neigungswinkel  $\nu_r$ , wenn man hierin die Belastungsglieder  $\Delta \varphi_{i0}$  mit Hilfe von (45) als Funktion der Stabneigungen  $\nu_r$  ausdrückt. Die Gleichungsgruppe (46) geht dann über in

$$\left. \begin{aligned} M'_1 &= \bar{A}'_1 \nu_I + \bar{B}'_1 \nu_{II} + \bar{C}'_1 \nu_{III} + \bar{D}'_1 \nu_{IV} \\ M'_2 &= \bar{A}'_2 \text{ „ } + \bar{B}'_2 \text{ „ } + \bar{C}'_2 \text{ „ } + \bar{D}'_2 \text{ „ } \\ M'_3 &= \bar{A}'_3 \text{ „ } + \bar{B}'_3 \text{ „ } + \bar{C}'_3 \text{ „ } + \bar{D}'_3 \text{ „ } \\ &\dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \end{aligned} \right\} \quad (61)$$

Diese in (61) auftretenden Beiwerte  $\bar{A}'$ ,  $\bar{B}'$ ,  $\bar{C}'$  und  $\bar{D}'$  sind Sonderwerte der Momente  $M'_i$ , falls der Durchlaufstab bzw. sein Ersatzstab Stützensenkungen nach Fig. 17a—d, die das Hauptsystem dieses Stabes darstellt, erleidet.

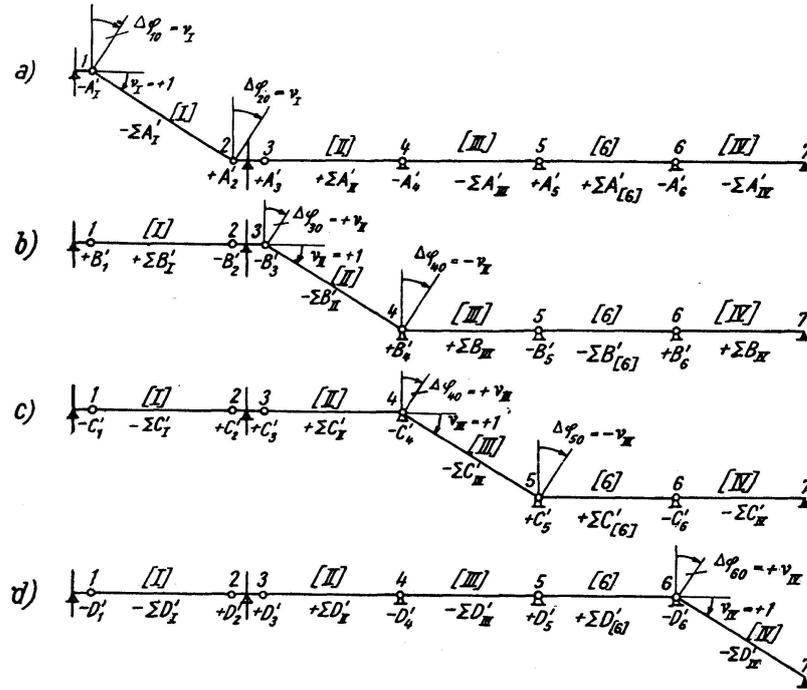


Fig. 17

In allen diesen Fällen erhält immer nur ein Feldstab die „Neigung  $\nu_r = +1$ “, während alle übrigen Feldstäbe die „Neigung  $\nu = 0$ “ aufweisen. Kraftwirkungen auf die Stützen, die eine derartige Verformung erzeugen, sollen als „Teilbelastung oder kurz als Belastung  $\nu_r = +1$ “ bezeichnet werden. So z. B. sind die Beiwerte  $A'_i$  die Sonderwerte der Momente  $M'_i$  infolge der „Belastung  $\nu_I = +1$ “, die die in Fig. 17a dargestellte Stützensenkung bewirkt. Diese Momente werden im folgenden kurz als „ $A'$ -Momente“ bezeichnet. In Analogie hierzu sind die „ $B'$ - bzw.  $C'$ - und  $D'$ -Momente“ die Sonderwerte der in den Gelenkquerschnitten des Ersatzstabes wirkenden Momente  $M'_i$ , infolge der durch die Belastung  $\nu_{II} = +1$  bzw.  $\nu_{III} = +1$  oder  $\nu_{IV} = +1$  erzeugten Stützensenkung nach Fig. 17b—d. Die Bezeichnung dieser Sondermomente mit den Buchstaben A, B, C ... des Alphabetes steht im Einklang mit der Bezifferung I, II, III ... jener Stäbe, durch deren Verdrehung diese Momente erzeugt werden. Da nach Fig. 3 der Feldstab [6] an beiden Seiten auf starren Stützen ruht, so erleidet die Stabsehne auch im Knickzustand keinerlei Verdrehung, weshalb der Neigungswinkel  $\nu_6$  wegen  $\nu_6 = 0$  weder in den Belastungsgliedern (45) noch in den Gleichungen (61) erscheint.

Die einer Belastung  $\nu_r = +1$  zugehörigen Belastungsglieder  $\Delta\varphi_{i0}$  sind, mit Ausnahme von jenen zwei, die den Gelenkquerschnitten  $r-1$  und  $r$  an den Enden des geneigten Feldstabes  $[r]$  zugeordnet sind, gleich Null. So z. B. sind die von Null verschiedenen, dem in Fig. 17b dargestellten Belastungsfall  $\nu_{II} = +1$  zugeordneten Belastungsglieder durch  $\Delta\varphi_{30} = +1$ ,  $\Delta\varphi_{40} = -1$  gegeben. Hiemit erhält man aus (46)

$$\bar{B}'_3 = \bar{\lambda}'_{33} (+1) + \bar{\lambda}'_{34} (-1) = \bar{\lambda}'_{33} - \bar{\lambda}'_{34}$$

und wegen  $\bar{\lambda}'_{34} = \bar{\lambda}'_{43}$  folgt mit  $\bar{\lambda}'_{43} = -q_4 \bar{\lambda}'_{33}$

$$B'_3 = \bar{\lambda}'_{33} (1 + q_4) \left. \vphantom{B'_3} \right\}$$

und in analoger Herleitung

$$B'_4 = \bar{\lambda}'_{44} (1 + p_4) \left. \vphantom{B'_4} \right\}$$

Bekanntlich sind die den Belastungsgliedern  $\Delta \varphi_{i0} = + 1$  zugeordneten Einflußzahlen  $\bar{\lambda}'_{ii}$  stets negativ. In Fig. 17 b ist daher  $\bar{\lambda}'_{33} = -\lambda'_{33}$ , hingegen  $\bar{\lambda}'_{44} = +\lambda'_{44}$ , das Moment  $B'_3$  somit negativ,  $B'_4$  aber positiv, was auch anschaulich in Fig. 17 b aus der Form der Abknickung zu erkennen ist.

Aus obigen Gleichungen folgen die Absolutwerte

$$\left. \begin{aligned} B'_3 &= \lambda'_{33} (1 + q_4), \\ B'_4 &= \lambda'_{44} (1 + p_4). \end{aligned} \right\} \quad (62)$$

Hieraus werden die Absolutwerte der übrigen  $B'$ -Momente, wie dies auch die untenstehende Tabelle zeigt, mit Hilfe der Fortleitungszahlen  $p$  und  $q$  gewonnen. Die ihnen nach der Fortleitungsregel zukommenden Vorzeichen sind in die Fig. 17 b eingetragen worden.

Aus (62) erkennt man bereits das Gesetz zur Ermittlung der an den Enden des geneigten Feldstabes  $[r]$ , infolge  $\nu_r = + 1$ , erzeugten Momente. Diese, an dem mit der römischen Ziffer  $[r]$  bzw. mit der arabischen Ziffer  $[i]$  bezeichneten Feldstab, zur Wirkung kommenden Sondermomente sollen nun nach Fig. 18, zwecks Aufstellung einer allgemein gültigen Berechnungsformel, die allgemeine Bezeichnung  $K'_{i-1}$  und  $K'_i$  führen. Ihre Absolutwerte sind dann durch

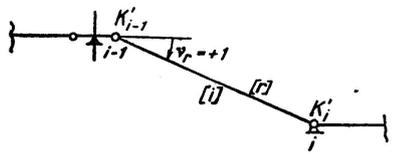


Fig. 18

$$\left. \begin{aligned} K'_{i-1} &= \lambda'_{i-1, i-1} (1 + q_i) \\ K'_i &= \lambda'_{i, i} (1 + p_i) \end{aligned} \right\} \quad (63)$$

bestimmt. Das Vorzeichen von  $K'_{i-1}$  ist stets negativ, jenes von  $K'_i$  stets positiv.

In (63) ist  $K'$  durch  $A', B', C' \dots$  zu ersetzen, wenn der geneigte Feldstab die Ordnungsnummer  $I$ , bzw.  $II, III \dots$  besitzt.

Wie oben im Sonderfall  $\nu_{II} = + 1$ , sind die Momente in den Gelenkquerschnitten links vom Gelenk  $i - 1$ , ausgehend von  $K'_{i-1}$ , nach der Fortleitungsregel mit Hilfe der Fortleitungszahlen  $p$ , die Momente in den Gelenkquerschnitten rechts vom Gelenk  $i$ , ausgehend vom Moment  $K'_i$ , mit Hilfe der Fortleitungszahlen  $q$  zu ermitteln. Dies ist auch aus der untenstehenden Tabelle, die dem in Fig. 3 dargestellten Stab zugeordnet ist, ersichtlich. Ihre stark umrandete Hauptdiagonale enthält die Absolutwerte aller nach (63) errechneten Momente  $K'_{i-1}$  und  $K'_i$ , deren Vorzeichen in die Fig. 17 eingeschrieben wurden.

Momente  $A', B', C'$  und  $D'$ . [Gl. (64)].

Nach (63) infolge				
$\nu_I = + 1$	$\nu_{II} = + 1$	$\nu_{III} = + 1$	$\nu_{IV} = + 1$	
$A'_1 = \lambda'_{11} (1 + q_2)$	$B'_1 = p_2 B'_2$	$C'_1 = p_2 C'_2$	$D'_1 = p_2 D'_2$	
$A'_2 = \lambda'_{22} (1 + p_2)$	$B'_2 = p_3 B'_3$	$C'_2 = p_3 C'_3$	$D'_2 = p_3 D'_3$	$p_2 = \dots$
$A'_3 = q_3 A'_2$	$B'_3 = \lambda'_{33} (1 + q_4)$	$C'_3 = p_4 C'_4$	$D'_3 = p_4 D'_4$	$p_3 = \dots$
$A'_4 = q_4 A'_3$	$B'_4 = \lambda'_{44} (1 + p_4)$	$C'_4 = \lambda'_{44} (1 + q_5)$	$D'_4 = p_5 D'_5$	$p_4 = \dots$
$A'_5 = q_5 A'_4$	$B'_5 = q_5 B'_4$	$C'_5 = \lambda'_{55} (1 + p_5)$	$D'_5 = p_6 D'_6$	$p_5 = \dots$
$A'_6 = q_6 A'_5$	$B'_6 = q_6 B'_5$	$C'_6 = q_6 C'_5$	$D'_6 = \lambda'_{66} (1 + 0)$	$p_6 = \dots$

Mit Kenntnis der Sonderwerte  $A', B', C' \dots$  gewinnt man nun durch Superposition aus (61) die Knickmomente  $M'_i$  als bekannte Funktionen der Stabneigungen  $\nu_r$ .

#### D. Die Knickgleichungen und die Knickdeterminante.

Im folgenden werden die Knickgleichungen und die Knickdeterminante des in Fig. 3 dargestellten Stabes hergeleitet. Führt man, wie bereits im Abschnitt V/A/3 erwähnt, die Momentendifferenzen  $\Delta M'_r$  als Funktion der Stabneigungen  $\nu_r$  in die Lagergleichungen (19) ein, so werden diese Gleichungen in die Gruppe der homogenen Knickgleichungen übergeführt. Die durch (8) definierten, in (19) auftretenden Momentendifferenzen  $\Delta M'_r$  errechnen sich mit Hilfe von (61) in der Form

$$\left. \begin{aligned} \Delta M'_I &= M'_1 - M'_2 = (\bar{A}'_1 - \bar{A}'_2) \nu_I + (\bar{B}'_1 - \bar{B}'_2) \nu_{II} + (\bar{C}'_1 - \bar{C}'_2) \nu_{III} + (\bar{D}'_1 - \bar{D}'_2) \nu_{IV} \\ &= \Delta \bar{A}'_I \nu_I + \Delta \bar{B}'_I \nu_{II} + \Delta \bar{C}'_I \nu_{III} + \Delta \bar{D}'_I \nu_{IV} \\ \text{und in Analogie hierzu} \\ \Delta M'_{II} &= M'_3 - M'_4 = \Delta \bar{A}'_{II} \nu_I + \Delta \bar{B}'_{II} \nu_{II} + \Delta \bar{C}'_{II} \nu_{III} + \Delta \bar{D}'_{II} \nu_{IV}, \\ \Delta M'_{III} &= M'_4 - M'_5 = \Delta \bar{A}'_{III} \nu_I + \Delta \bar{B}'_{III} \nu_{II} + \Delta \bar{C}'_{III} \nu_{III} + \Delta \bar{D}'_{III} \nu_{IV}, \\ \Delta M'_{IV} &= M'_6 - 0 = \Delta \bar{A}'_{IV} \nu_I + \Delta \bar{B}'_{IV} \nu_{II} + \Delta \bar{C}'_{IV} \nu_{III} + \Delta \bar{D}'_{IV} \nu_{IV}. \end{aligned} \right\} \quad (65)$$

Die in den Enden der Feldstäbe wirkenden Momente  $\bar{A}', \bar{B}', \bar{C}'$  und  $\bar{D}'$  besitzen auf Grund der Fortleitungsregel stets entgegengesetzte Vorzeichen. Daher gehen die in (65) auftretenden, über die Feldstäbe zu bildenden Momentendifferenzen, in mit positiven oder negativen Vorzeichen versehene Momentensummen über, die aus den Absolutwerten der an den Stabenden angreifenden Momente  $A', B', C', D'$  zu bilden sind. So z. B. ist

$$\left. \begin{aligned} \Delta \bar{A}'_I &= \bar{A}'_1 - \bar{A}'_2 = - (A'_1 + A'_2) = - \Sigma A'_I \\ \Delta \bar{A}'_{II} &= \bar{A}'_3 - \bar{A}'_4 = + (A'_3 + A'_4) = + \Sigma A'_{II} \\ \Delta \bar{A}'_{III} &= \bar{A}'_4 - \bar{A}'_5 = - (A'_4 + A'_5) = - \Sigma A'_{III} \\ \Delta \bar{A}'_{IV} &= \bar{A}'_5 - \bar{A}'_6 = + (A'_5 + A'_6) = + \Sigma A'_{IV} \\ \Delta \bar{A}'_{[6]} &= \bar{A}'_5 - \bar{A}'_6 = + (A'_5 + A'_6) = + \Sigma A'_{[6]} \\ \Delta \bar{A}'_{IV} &= \bar{A}'_6 - 0 = - (A'_6 + 0) = - \Sigma A'_{IV} \end{aligned} \right\} \quad (66)$$

und man erkennt aus (66) und auch aus den in die Fig. 17 eingeschriebenen Momentensummen, daß die Summen der an einem „geneigten Stab“ angreifenden Momente stets negative Vorzeichen besitzen, die (+) und (−) Vorzeichen aller übrigen Momentensummen hingegen schachbrettartig über die Feldstäbe verteilt sind. Diese Vorzeichen wurden in Fig. 17 unterhalb der Feldstabmitte eingeschrieben. Die Gleichungen (65) gehen somit in die folgende Form über:

$$\left. \begin{aligned} \Delta M'_I &= - \Sigma A'_I \nu_I + \Sigma B'_I \nu'_{II} - \Sigma C'_I \nu'_{III} - \Sigma D'_I \nu_{IV} \\ \Delta M'_{II} &= + \Sigma A'_{II} \nu_I - \Sigma B'_{II} \nu'_{II} + \Sigma C'_{II} \nu'_{III} + \Sigma D'_{II} \nu_{IV} \\ \Delta M'_{III} &= - \Sigma A'_{III} \nu_I + \Sigma B'_{III} \nu'_{II} - \Sigma C'_{III} \nu'_{III} - \Sigma D'_{III} \nu_{IV} \\ \Delta M'_{IV} &= - \Sigma A'_{IV} \nu_I + \Sigma B'_{IV} \nu'_{II} - \Sigma C'_{IV} \nu'_{III} - \Sigma D'_{IV} \nu_{IV} \end{aligned} \right\} \quad (67)$$

Die schachbrettartige Verteilung der (+) und (−) Vorzeichen wird in (67) dadurch gestört, daß der beiderseits auf starren Stützen ruhende Feldstab [6] zu diesen Gleichungen keinen Beitrag gibt. Aus diesem Grunde

weisen die letzten zwei Zeilen in (67) bzw. die letzten zwei Vertikal-  
kolonnen keinen Zeichenwechsel auf.

Wie sich leicht nachweisen läßt, sind die in (65) bzw. (67) auftretenden  
Beiwerte die Einflußzahlen der Stabneigungen  $v_r$ . Aus diesem  
Grunde sind die in (67) symmetrisch zur Hauptdiagonale liegenden Mo-  
mentensummen dem Vorzeichen und der Größe nach gleich. In diesen  
Gleichungen besteht daher Symmetrie zur Hauptdiago-  
nale, gleichgültig ob der Durchlaufstab selbst Sym-  
metrie aufweist oder nicht. Diese Tatsache bildet beim Zahlen-  
rechnen eine erwünschte Kontrolle für die Richtigkeit der Rechnung.

Bezeichnet man in (67) die in der „Momentensumme über  
einem Feldstab [r]“ auftretenden Momente ganz allgemein mit  $K'_{links}$   
und  $K'_{rechts}$ , so ist diese Momentensumme aus der Formel

$$\Sigma K'_r = K'_{links} + K'_{rechts} \tag{68}$$

zu ermitteln. In (68) ist  $K'$  durch  $A', B', C' \dots$  zu ersetzen, wenn die Mo-  
mente  $K'$  infolge  $v_I = +1, v_{II} = +1, v_{III} = +1 \dots$  erzeugt werden.

Führt man (67) in (19) ein, so erhält man die folgende Gruppe von  
homogenen Knickgleichungen, in denen die Unbekannten  $v_r$  als „Kopf“ über  
ihre Beiwerte geschrieben wurden.

$v_I$	$v_{II}$	
$\eta + \frac{1}{c'_I} [ 0 + m'_I \Sigma A'_I + b'_I \Sigma A'_{II} ] - m'_I S'_I$	$-\frac{1}{c'_I} [ 0 + m'_I \Sigma B'_I + b'_I \Sigma B'_{II} ] + a'_{II} S'_{II}$	} (69)
$-\frac{1}{c'_{II}} [ a'_{II} \Sigma A'_I + m'_{II} \Sigma A'_{II} + b'_{II} \Sigma A'_{III} ] + b'_I S'_I$	$\eta + \frac{1}{c'_{II}} [ a'_{II} \Sigma B'_I + m'_{II} \Sigma B'_{II} + b'_{II} \Sigma B'_{III} ] - m'_{II} S'_{II}$	
$+\frac{1}{c'_{III}} [ a'_{III} \Sigma A'_{II} + m'_{III} \Sigma A'_{III} + 0 ]$	$-\frac{1}{c'_{III}} [ a'_{III} \Sigma B'_{II} + m'_{III} \Sigma B'_{III} + 0 ] + b'_{II} S'_{II}$	
$+\frac{1}{c'_{IV}} [ 0 + m'_{IV} \Sigma A'_{IV} + 0 ]$	$-\frac{1}{c'_{IV}} [ 0 + m'_{IV} \Sigma B'_{IV} + 0 ]$	
$v_{III}$	$v_{IV}$	
$+\frac{1}{c'_I} [ 0 + m'_I \Sigma C'_I + b'_I \Sigma C'_{II} ]$	$+\frac{1}{c'_I} [ 0 + m'_I \Sigma D'_I + b'_I \Sigma D'_{II} ]$	= 0
$-\frac{1}{c'_{II}} [ a'_{II} \Sigma C'_I + m'_{II} \Sigma C'_{II} + b'_{II} \Sigma C'_{III} ] + a'_{III} S'_{III}$	$-\frac{1}{c'_{II}} [ a'_{II} \Sigma D'_I + m'_{II} \Sigma D'_{II} + b'_{II} \Sigma D'_{III} ]$	= 0
$\eta + \frac{1}{c'_{III}} [ a'_{III} \Sigma C'_{II} + m'_{III} \Sigma C'_{III} + 0 ] - m'_{III} S'_{III}$	$+\frac{1}{c'_{III}} [ a'_{III} \Sigma D'_{II} + m'_{III} \Sigma D'_{III} + 0 ] + 0$	= 0
$+\frac{1}{c'_{IV}} [ 0 + m'_{IV} \Sigma C'_{IV} + 0 ] + 0$	$\eta + \frac{1}{c'_{IV}} [ 0 + m'_{IV} \Sigma D'_{IV} + 0 ] - m'_{IV} S'_{IV}$	= 0

Aus diesen linearen und homogenen Gleichungen sind nun die sich im  
Knickfall einstellenden Neigungen  $v_r$  der Stabsehnern zu errechnen. Die tri-  
viale Lösung  $v_I = v_{II} = v_{III} = v_{IV} = 0$  hat keine Bedeutung, sie entspricht  
dem Gleichgewichtsfall des geraden nicht ausgeknickten Stabes. Endliche,  
dem ausgeknickten Stab entsprechende Werte ergeben sich aus obigen

Gleichungen nur dann, wenn die Nennerdeterminante verschwindet. Diese bereits aus der Anschreibung (69) zu erkennende Nennerdeterminante ist die Knickdeterminante  $\Delta$  des vorliegenden Problems.

Die aus der „Knickbedingung  $\Delta = 0$ “ fließende Gleichung ist die einzige Gleichung zur Lösung des Knickproblems. Um in einem vorliegenden Knickproblem die Bedingung  $\Delta = 0$  zu erzwingen, sind in den Gliedern der Determinante alle von vornherein unbekanntes Größen passend anzunehmen bis auf eine einzige, die dann aus der Bedingung  $\Delta = 0$  zu errechnen ist. Je nach der Wahl dieser frei zu haltenden und aus  $\Delta = 0$  zu ermittelnden Unbekannten  $x$  ergeben sich zwei Hauptaufgaben, die im Abschnitt VII näher umschrieben werden.

Aus dem regelmäßigen Aufbau der Knickdeterminante des hier betrachteten Sonderfalles werden im Abschnitt VIII durch Verallgemeinerung der hier gewonnenen Erkenntnisse Gesetze hergeleitet, welche die unmittelbare Anschreibung der Knickdeterminante eines jeden beliebigen Durchlaufstabes ermöglichen.

## VI. Formänderung des ausgeknickten Durchlaufstabes.

Wurde aus  $\Delta = 0$  die Unbekannte  $x$  errechnet, so werden hiemit auch sämtliche Determinantenglieder zahlenmäßig bekannt. Aus den homogenen Gleichungen (69) gewinnt man dann die unbekanntes Stabneigungen bekanntlich in der Form  $v_I = k \Delta_{11}$ ,  $v_{II} = k \Delta_{12}$ ,  $v_{III} = k \Delta_{13}$ ,  $v_{IV} = k \Delta_{14}$ , wobei  $k$  eine beliebige Konstante, die  $\Delta$ -Werte jedoch die Unterdeterminanten der Elemente der ersten Zeile der Knickdeterminante darstellen. An Stelle dieser Unterdeterminanten kann man aber auch die Unterdeterminanten irgend einer anderen Zeile nehmen. Mit den nun zahlenmäßig bekannten Stabneigungen erhält man aus (61) auch die Zahlenwerte und Vorzeichen der Knickmomente  $M'_i$ . Hiemit ist aber auch die Form der elastischen Linie des ausgeknickten Stabes und damit auch die Zahl der Knickwellen bestimmt. Wegen des beliebig zu wählenden Konstantwertes  $k$  bleibt zwar die Größe, nicht aber die Art der Formänderung unbestimmt. Wird die Durchsenkung von irgend einer Stütze beliebig angenommen, so ist hierdurch auch die Lage des Stabsehnenpolygons bestimmt. Liefert die Bedingung  $\Delta = 0$  mehrere Werte für die hieraus zu errechnende Unbekannte  $x$ , so sind auch ebensoviele verschiedene Gleichgewichtslagen, d. h. verschiedene elastische Linien des ausgeknickten Stabes mit voneinander verschiedener Zahl von Knickwellen möglich. Im allgemeinen ist die im Knickfalle eintretende Formänderung nicht von Interesse, ihre Berechnung kann daher entfallen. Wohl aber interessiert jener aus  $\Delta = 0$  zu bestimmende Wert  $x$  der frei gehaltenen Unbekannten, der das Ausknicken des Durchlaufstabes gerade noch zu verhindern vermag. Ergeben sich aus  $\Delta = 0$  mehrere Werte  $x$ , so liefern nur die Grenzwerte und zwar je nach der Art des vorliegenden Problems entweder  $x_{max}$  oder  $x_{min}$  die Lösung des Problems.

## VII. Die beiden Hauptaufgaben.

### A. Die Überprüfung einer bestehenden Konstruktion.

Im Falle der Überprüfung sind sämtliche Abmessungen des Durchlaufstabes, die Axialkräfte  $\mathcal{S}$ , der Gebrauchsbelastung, die spezifischen Stützwiderstände  $A_i$  bzw. Verdrehungswiderstände  $C_i$  und ihre Reziprokwerte  $\delta_i \varepsilon_i$  gegeben. Mit Bezug auf das Ausknicken in der Zeichenebene ergeben sich nun zweierlei Fragestellungen:

1. die Frage nach der „Knicksicherheit  $\nu$ “ des Durchlaufstabes und
2. die Frage nach der „Stützensicherheit  $\mu$ “ der federnden Querstützung.

Die erste Frage lautet: Um wieviel dürfen die durch die Gebrauchsbelastung erzeugten Axialkräfte  $\mathcal{S}_r$  der Feldstäbe auf  $S_r = \nu \mathcal{S}_r$  erhöht werden, damit die vorhandene Stützung ein Ausknicken des Durchlaufstabes gerade noch zu verhindern ermog. Die Unbekannte des Problems ist die Knicksicherheit  $\nu$ .

Im zweiten Falle wird gefragt, um wieviel die vorhandenen spezifischen Querstützenwiderstände  $A_{i, \text{vorh}}$  größer sind als die erforderlichen Widerstände  $A_{i, \text{erf}}$ , die das Ausknicken des Durchlaufstabes bei vorgegebener Knickbelastung und, falls Stützenstäbe vorhanden sind, auch bei vorgegebenen spezifischen Verdrehungswiderständen  $C_{i, \text{vorh}}$  gerade noch zu verhindern vermögen. Wird  $A_{i, \text{vorh}} = \mu A_{i, \text{erf}}$  gesetzt, so zeigt ein Wert  $\mu > 1$  die „Stützensicherheit“ an, der Wert  $\mu = 1$  gibt zu erkennen, daß die vorhandene Querstützung gerade genügt, während ein Wert  $\mu < 1$  darauf hindeutet, daß die vorhandene Querstützung zu schwach ist, um das Ausknicken unter den gegebenen Umständen zu verhindern. Wegen  $A_i = \frac{1}{\delta_i}$  folgt aus obiger Gleichung  $\delta_{i, \text{erf}} = \mu \delta_{i, \text{vorh}}$  und ein Wert  $\mu > 1$  bedeutet wieder, daß die erforderliche Federung um das  $\mu$ -fache „weicher“ sein könnte, als die vorhandene. Die Unbekannte des Problems ist die Stützensicherheit  $\mu$ .

Bei der ersten Überprüfungsaufgabe ist die unbekannt Knicksicherheit  $\nu$  in den Werten  $\varphi_r = \sqrt{\frac{\nu \mathcal{S}_r c_r^2}{T_r J_r}}$  enthalten, die in die Knickrechnung in transzendenten Form ( $\sin \varphi_r, \operatorname{tg} \varphi_r$ ) eingehen. Eine direkte Ermittlung von  $\nu$  aus der Bedingung  $\Delta = 0$  ist daher nicht möglich. Die Lösung ist nur mit Hilfe eines analytisch-graphischen Verfahrens zu gewinnen. Für eine beliebig  $\varrho$ -fach erhöhte Gebrauchslast  $S_r = \varrho \mathcal{S}_r$  besitzt die Knickdeterminante einen ganz bestimmten Zahlenwert  $\Delta(\varrho)$ . Ermittelt man nun für einige Werte  $\varrho$  die zugeordneten Knickdeterminanten, so läßt sich graphisch die Kurve  $\Delta = f(\varrho)$  konstruieren. Der dem Punkte  $\Delta = 0$  zugeordnete Wert  $\varrho_0$  liefert die Knicksicherheit  $\nu = \varrho_0$  als Lösung des Problems.

Bei der zweiten Überprüfungsaufgabe, der Ermittlung der Stützensicherheit  $\mu$ , erscheint diese Unbekannte in den nach (13) bzw. (17) zu ermittelnden Werten  $a', b'$  und  $m'$ , in der Form  $\frac{\delta'_{i, \text{erf}}}{c'} = \mu \frac{\delta'_{i, \text{vorh}}}{c'}$ . Daher wären, falls mit der Determinante aus (69) z. B. die Stützensicherheit  $\mu$  ermittelt werden sollte, mit Ausnahme von  $\eta$  alle Glieder mit dem Multiplikator  $\mu$  zu multiplizieren, wenn man die dort auftretenden  $a'$ -,  $b'$ - und  $m'$ -Werte mit den gegebenen Werten  $\delta'_{i, \text{vorh}}$  gebildet hätte. Teilt man dann jede Zeile der Determinante durch  $\mu$ , so tritt diese Unbekannte nur mehr im Werte  $\frac{\eta}{\mu} = \frac{c^*}{\mu \delta^* S^*} = \eta'$  auf. Durch diesen Vorgang wird die Knickdeterminante  $\Delta$  in  $\Delta = \mu^4 \Delta'$  übergeführt, wobei die Determinante  $\Delta'$  in ihrem Aufbau vollkommen mit der durch (69) gegebenen Determinante  $\Delta$  übereinstimmt. Nur sind in  $\Delta'$  die Beiwerte  $a', b'$  und  $m'$  mit den bekannten Werten  $\delta'_{i, \text{vorh}}/c'$  zu bilden, in  $\Delta$  hingegen mit den unbekannt Werten

$\delta'_{i,eri}/c'$ . Aus  $\Delta = \mu^4 \Delta' = 0$  folgt auch  $\Delta' = 0$  und hierin ist nun  $\eta' = \frac{\eta}{\mu}$  die einzige Unbekannte des Problems, während in  $\Delta$  der Wert  $\eta = \frac{c^*}{\delta^* S^*}$  bekannt wäre. Die Ausrechnung der in ihrer Form ebenfalls durch (69) gegebenen Determinante  $\Delta' = 0$  liefert eine algebraische Gleichung vierten Grades nach der Unbekannten  $\eta' = \frac{\eta}{\mu}$ . Der größte  $\eta'$ -Wert bestimmt  $\mu_{min}$ , die vorhandene Stützensicherheit, in der Form  $\mu_{min} = \frac{\eta}{\eta'_{max}} = \frac{1}{\eta'_{max}} \frac{c^*}{\delta^* S^*}$ . Hiemit erscheint der Vorgang zur Ermittlung der Stützensicherheit vollkommen klar gestellt.

Wie aus (69) leicht zu erkennen, liefert die Knickbedingung  $\Delta = 0$  immer dann eine algebraische Gleichung zur direkten Ermittlung der Unbekannten, wenn dieselbe, wie hier, nur in den Beiwerten  $a'$ ,  $b'$ ,  $m'$  oder in  $\eta$  auftritt und nicht in den Werten  $\varphi_r = \sqrt{\frac{S_r c_r^2}{T_r J_r}}$ . Dies ist immer dann der Fall, wenn irgend ein Element der elastischen Querstützung als unbekannt offen bleibt.

### B. Entwurf einer Neukonstruktion.

Bei der zweiten Hauptaufgabe, dem Entwurf einer Neukonstruktion, sind die Gebrauchslasten  $\mathfrak{S}_r$ , die verlangte Knicksicherheit  $\nu$  des Durchlaufstabes und daher auch die Knickkräfte  $S_r = \nu \mathfrak{S}_r$  gegeben. Die Abmessungen der Feldstäbe, die Stärke der elastischen Stützung (die spezifischen Widerstände  $A_i C_i$ ) sind nun so zu bestimmen, daß die vorgeschriebene Knicksicherheit des Durchlaufstabes gewährleistet erscheint.

Im vorliegenden Falle existiert eine große Zahl von vornherein unbekanntem frei zu wählenden Bestimmungsgliedern. Um, wie schon erwähnt, aus  $\Delta = 0$  eine algebraische Gleichung zur direkten Ermittlung der Unbekannten zu erhalten, muß ein Element der federnden Querstützung als unbekannt frei gehalten werden, die übrigen Bestimmungsglieder der Querstützung, die spezifischen Verdrehungswiderstände  $C_i$  und die Abmessungen der Feldstäbe sind hingegen passend anzunehmen. Wurden diese Annahmen bis auf die Querschnitte der Feldstäbe getroffen, so ist, wie die Knickberechnung leicht erkennen läßt, das fragliche Element der federnden Querstützung nur mehr eine Funktion der Steifigkeit  $T_r J_r$  der einzelnen Feldstäbe, die in der durch (27) gegebenen Kennziffer  $\varphi_r = \sqrt{\frac{S_r c_r^2}{T_r J_r}}$  zahlenmäßig zum Ausdruck kommt. An Stelle des dem Feldstab  $[r]$  zugeordneten Wertes  $\varphi_r$  kann man auch den anschaulicheren Wert

$$m_r = \frac{\pi}{\varphi_r} = \pi \sqrt{\frac{T_r J_r}{S_r c_r^2}} \quad (70)$$

heranziehen, dessen Bedeutung aus  $S_r = \frac{\pi^2 T_r J_r}{(m_r c_r)^2} = \frac{\pi^2 T_r J_r}{l_r^2}$  hervorgeht, wobei

$$l_r = m_r c_r \quad (71)$$

die „freie Knicklänge“ des Feldstabes  $c_r$  darstellt. Diese freie Knicklänge  $l_r$  ist bekanntlich jene Länge, bei welcher ein mit dem Feldstab gleich di-

mensionierter, an beiden Enden gelenkig gelagerter Stab unter der alleinigen Wirkung der Knickkraft  $S_r$  ausknickt. Der obere Grenzfall, der elastisch gestützte starre Durchlaufstab, benötigt die kleinste Querstützung, der untere Grenzfall, der durchlaufende Gelenkstab, bei welchem die innerhalb der Feldweite knicksicheren Feldstäbe gelenkig aneinander geschlossen sind, erfordert die stärkste Querstützung. Ein nur aus Feldstäben bestehender Durchlaufstab mit Kennziffern  $m_r = 1$  verhält sich, trotz seiner kontinuierlichen Verbindung mit den Nachbarstäben, wie ein Gelenkstab. Nur wenn für alle Feldstäbe die Werte  $m_r > 1$  sind, wird im Knickfalle der Stab als Ganzes ausknicken, somit als Durchlaufstab zur Wirkung kommen und eine entsprechend schwächere Querstützung erfordern. So z. B. wählt man im Brückenbau beim Entwurf des Druckgurtes von offenen Brücken  $1,2 < m_r < 3$ . Ein Druckgurt, dessen Feldstäbe Werte  $m_r < 1,2$  aufweisen, erfordert unverhältnismäßig große elastische Querstützungen. Im übrigen ist es auch zweckmäßig, daß die  $m_r$ -Werte der Feldstäbe nicht allzu sehr voneinander abweichen, weil schon ein einziger im Verhältnis zu den übrigen  $m$ -Werten kleiner Wert von  $m$  eine starke Schwächung des durchgehenden Stabverbandes herbeizuführen vermag, die eine unverhältnismäßig starke Erhöhung der elastischen Querstützung zur Folge hat.

Bei einer Entwurfsaufgabe wird nun, nachdem die spezifischen Verdrehungswiderstände  $C_i$  gewählt und die Feldstäbe dimensioniert sind, aus der Gruppe der die federnde Querstützung kennzeichnenden  $\delta_i$ -Werten ein passender  $\delta_i$ -Wert ausgewählt und als unbekannt offen gelassen. In dieser Auswahl bieten sich unter anderem folgende Möglichkeiten dar.

a) Sämtliche Querstützungen werden wie im Zahlenbeispiel IX als gleich stark vorausgesetzt und als unbekannt offen gelassen. Der diese Querstützung kennzeichnende  $\delta$ -Wert ist dann die einzige Unbekannte des Problems, die aus der Knickbedingung  $\Delta = 0$  zu ermitteln ist. Bei der Durchführung der Rechnung wird hier mit Vorteil der Vergleichswert  $\delta^* = \delta$  gewählt, wodurch für sämtliche Querstützen die Werte  $\delta' = \frac{\delta}{\delta^*} = 1$  bekannt

werden und die Unbekannte  $\delta \equiv \delta^*$  nur im Gliede  $\eta = \frac{c^*}{\delta^* S^*}$  der Hauptdiagonale erscheint. Die Ausrechnung der Knickdeterminante liefert eine algebraische Gleichung höheren Grades nach  $\eta$ .

b) Die spezifischen Stützensenkungen  $\delta_i$  oder, was auf dasselbe hinauskommt, die spezifischen Stützenwiderstände  $A_i$  werden frei gewählt bis auf einen, der als unbekannt offen bleibt und aus der Knickbedingung  $\Delta = 0$  zu errechnen ist, die in diesem Falle eine nach der Unbekannten lineare Gleichung liefert. Wenn es die gegebenen Umstände erlauben, so ist es hinsichtlich der Rechenarbeit von Vorteil, den  $A$ -Wert einer Randstütze offen zu lassen. Statt dieses einen freibleibenden Widerstandes kann auch eine Gruppe von zwei oder mehreren untereinander gleich groß vorausgesetzten Widerständen  $A$  frei bleiben und errechnet werden.

c) Man kann auch für sämtliche Querstützen zunächst beliebige  $\delta_i$ -Werte annehmen und hiezu die proportionalen erforderlichen  $\delta_{i, \text{erf}} = \mu \delta_i$  so bestimmen, daß die verlangte Knicksicherheit gewährleistet erscheint. In dieser Form wird die Entwurfsaufgabe auf die zweite Überprüfungs Aufgabe zurückgeführt.

d) Schließlich kann man, wie es vielfach bei der Knickberechnung der Druckgurte von offenen Brücken geschieht, die untereinander gleichen Zwi-

schonstützen in passender Stärke annehmen und hiezu den spezifischen Widerstand der ebenfalls als gleich vorausgesetzten Endstützen bestimmen.

In ähnlicher Weise lassen sich noch andere verschiedene Annahmen für die Berechnung der federnden Querstützen treffen. Entscheidend für die jeweiligen Annahmen sind die besonderen, in der Praxis vorliegenden Verhältnisse.

### VIII. Aufbau der Knickdeterminante eines beliebigen Durchlaufstabes.

An der Hand der in dieser Abhandlung durchgeführten Herleitung der Knickdeterminante (69) für den in Fig. 3 dargestellten Durchlaufstab lassen sich nun ganz allgemein gültige Regeln für den Aufbau der Knickdeterminante eines beliebigen Durchlaufstabes angeben, welche die unmittelbare Anschreibung dieser Determinante ermöglichen.

Mit den nach (27) zu ermittelnden  $\varphi_r$ -Werten bestimmt man die  $\sigma_r$ - und  $\tau_r$ -Werte (Gl. (28), (29), (33)), die  $\kappa_i$  nach (39) und die  $k_i$  nach (40), ferner die Fortleitungszahlen  $a_r, b_r$  nach (42) und die Fortleitungszahlen  $p, q$  nach (51), (52). Nun berechnet man mit Hilfe der Gleichungen (55)–(60) die Einflußzahlen  $\lambda'_{ii}$  und die  $A'$ -,  $B'$ -,  $C'$ -... Momente aus (64) und bildet nach (68) die „Momentensummen  $\Sigma A'$ ,  $\Sigma B'$ ,  $\Sigma C'$ ... über die elastisch quer-gestützten Feldstäbe“.

Nach (13) werden nun die von der elastischen Querstützung abhängigen Werte  $a'_r, b'_r$  und  $m'_r$  ermittelt. Im Falle eines Entwurfes ist in diesen Werten ein nach den Ausführungen im Abschnitt VII passend zu wählender Freiwert als unbekannt offen zu halten und dann aus der Knickbedingung  $\Delta = 0$  zu errechnen.

Der Aufbau der Knickdeterminante soll nun zunächst für den sogenannten „Normalfall“ angegeben werden. Als Normalfall wird ein aus  $n$  Stäben, entweder nur aus Feldstäben oder aus Feld- und Stützenstäben bestehender Durchlaufstab bezeichnet, der in allen Stützpunkten eine federnde Querstützung aufweist und dessen Feldstäbe durch Druckkräfte beansprucht sind.

Sind unter den  $n$  Stäben  $m$  Stützenstäbe enthalten, so ist die Knickdeterminante  $(n-m)$ -gliedrig und besitzt z. B. für den in Fig. 19 dargestellten „Normalfall“ die Form

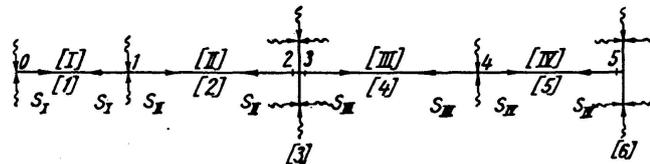


Fig. 19

$$\Delta = \begin{vmatrix} \eta + h'_{IA} - m'_I S'_I & -h'_{IB} + a'_{II} S'_{II} & +h'_I c & -h'_I d \\ -h'_{IIA} + b'_I S'_I & \eta + h'_{II B} - m'_{II} S'_{II} & -h'_{II} c + a'_{III} S'_{III} & +h'_{II} d \\ +h'_{IIIA} & -h'_{IIIB} + b'_{II} S'_{II} & \eta + h'_{III} c - m'_{III} S'_{III} & -h'_{III} d + a'_{IV} S'_{IV} \\ -h'_{IIV A} & +h'_{IIV B} & -h'_{IIV} c + b'_{III} S'_{III} & \eta + h'_{IV} d - m'_{IV} S'_{IV} \end{vmatrix} = 0 \quad (72)$$

Das Bildungsgesetz dieser aus lauter Absolutgliedern aufgebauten Determinante ist leicht zu erkennen.

Die Summen in der nach rechts fallenden Hauptdiagonale sind stets dreigliedrig. Das erste nach (14) zu bildende  $\eta$ -Glied ist stets mit einem

positiven Vorzeichen zu versehen, das Produkt  $m'S'$  erhält immer ein negatives Vorzeichen, in der Zeile darüber und darunter erscheinen die Produkte  $a'S'$  bzw.  $b'S'$ , die stets ein positives Vorzeichen bekommen. Diese „ $S'$ -Produkte“ sind in der ersten Spalte dem Feldstab  $I$ , in der zweiten Spalte dem Feldstab  $II$  usw. zugeordnet und daher dementsprechend zu bezeichnen.

Die  $h'$ -Glieder in (72) entsprechen den „Klammergliedern“ in (69) und man erkennt daselbst, daß die  $h'$ -Glieder der ersten, bzw. zweiten, dritten ... Kolonne im wesentlichen aus den  $A'$ - bzw.  $B'$ -,  $C'$ - ... Momenten aufgebaut sind. Die erste Kolonne der Knickdeterminante soll daher im weiteren als „ $A$ -Kolonne“, die zweite als „ $B$ -Kolonne“ usw. bezeichnet werden.

Diese  $h'$ -Glieder sind doppelt bezeichnet, der erste Zeiger bezeichnet die Reihe, der zweite durch den „Kolonnenbuchstaben“ gekennzeichnete Zeiger bestimmt die Kolonne. Die allgemeine Bezeichnung eines  $h'$ -Gliedes ist dann durch  $h'_{rK'}$  gegeben.

Jedes  $h'_{rK'}$ -Glied ist aber überdies auch einem Feldstab zugeordnet und zwar jenem Stab, der durch den Zeiger  $r$  angedeutet wird. Alle  $h'$ -Glieder der ersten Reihe sind daher dem Feldstab  $I$ , jene der zweiten Reihe dem Feldstab  $II$  usw. zugeordnet. Ein  $h'$ -Glied besteht aus einer dreigliedrigen Summe, die durch die allgemein gültige Formel

$$h'_{rK'} = \frac{1}{c'_r} [a'_r \Sigma K'_{r-1} + m'_r \Sigma K'_r + b'_r \Sigma K'_{r+1}] \quad \begin{matrix} r=I, II, III \dots \\ K'=A' B' C' \dots \end{matrix} \quad (73)$$

gegeben ist. Hieraus erhält man z. B. für alle Glieder in der zweiten Reihe ( $r = II$ ) der Knickdeterminante (72) die Formel

$$h'_{II K'} = \frac{1}{c'_{II}} [a'_{II} \Sigma K'_I + m'_{II} \Sigma K'_{II} + b'_{II} \Sigma K'_{III}] \quad K'=A', B', C' \dots,$$

für das Glied in der vierten Reihe der zweiten Kolonne mit  $b'_{IV} = 0$  die Formel

$$h'_{IV B'} = \frac{1}{c'_{IV}} [a'_{IV} \Sigma B'_{III} + m'_{IV} \Sigma B'_{IV} + 0],$$

für das Glied in der ersten Reihe der dritten Kolonne mit  $a'_I = 0$  die Formel

$$h'_{I C'} = \frac{1}{c'_I} [0 + m'_I \Sigma C'_I + b'_I \Sigma C'_{II}].$$

In der ersten und letzten Zeile der Determinante reduziert sich die dreigliedrige Summe (73) stets auf zwei Glieder, da in diesen Fällen, wegen  $a'_I = 0$ ,  $b'_{IV} = 0$ , das erste bzw. letzte Glied der Summe nicht existiert.

Die (+) und (−) Vorzeichen der  $h'$ -Glieder sind schachbrettartig so zu verteilen, daß die  $h'$ -Glieder in der von links nach rechts fallenden Hauptdiagonale stets positive Vorzeichen erhalten.

Eine Abweichung von dieser durch (72) gegebenen Normalform der Knickdeterminante wird durch folgende Ursachen bewirkt: 1. wenn einer der Feldstäbe nicht durch eine Druckkraft, sondern durch eine Zugkraft belastet wird, 2. wenn einer der Feldstäbe überhaupt keine Belastung durch Axialkräfte erfährt und 3. wenn im Stabzug unverschiebliche Stützen auftreten.

Im ersten Falle sind in (72) die dem Zugstab zugeordneten  $S'$ -Produkte mit entgegengesetzten Vorzeichen zu versehen, das Produkt  $m'S'$  erhält daher ein positives, die Produkte  $a'S'$  und  $b'S'$  ein negatives Vorzeichen.

Im zweiten Falle entfallen wegen  $S' = 0$  die dem Feldstab zugeordneten  $S'$ -Produkte.

Im dritten Falle werden, wegen  $\delta' = 0$ , auch die nach (13) zu bildenden, links und rechts von der Stütze liegenden  $a'$ - und  $b'$ -Werte gleich Null. In (72) (73) entfallen daher jene Summenglieder, deren  $a'$ - und  $b'$ -Werte infolge der unverschieblichen Stütze verschwinden. So z. B. geht die Knickdeterminante (69) formal aus (72) hervor, indem man hierin  $b'_{III} = 0$  und  $a'_{IV} = 0$  setzt. Ruht ein Feldstab auf zwei unverschieblichen Stützen, so sind seine  $a'$ -,  $b'$ - und  $m'$ -Werte gleich Null, ihm ist daher keine Lagergleichung zugeordnet, er gibt auch keinen Beitrag zur Knickdeterminante, bewirkt aber, wie schon zu (67) bemerkt, eine Störung in der schachbrettartigen Verteilung der den  $h'$ -Gliedern zukommenden (+) und (-) Vorzeichen.

+	-	+		+
-	+	-		-
+	-	+		+
+	-	+		+

Fig. 20

In derartigen Fällen fertige man ein quadratisches Schema nach Fig. 20 an, die Zahl der Zeilen und Kolonnen entspricht der Zahl der vorhandenen Feldstäbe, gleichgültig, wie dieselben gelagert sind. Ist z. B. der  $r$ -te Stab beiderseits auf unverschieblichen Stützen gelagert, so streiche man die  $r$ -te Zeile und Kolonne, die übrigbleibende Restfigur gibt die Vorzeichenverteilung der  $h'$ -Glieder. Fig. 20 zeigt das Vorzeichenschema für den in Fig. 3 dargestellten Stab, bei welchem der vierte Feldstab auf beiderseits starren Stützen ruht.

Zwei aufeinander folgende, beiderseits starr gelagerte Feldstäbe bewirken im Vorzeichenschema die Streichung von zwei nebeneinander liegenden Zeilen bzw. Kolonnen, die Restfigur zeigt wieder vollkommene schachbrettartige Anordnung in der Vorzeichenverteilung.

#### Sonderfälle.

1. Der durchlaufende Gelenkstab. Für einen solchen Stab existieren keine Kontinuitätsgleichungen, daher auch keine  $A'$ -,  $B'$ -,  $C'$  ... Momente und keine hieraus aufgebauten  $h'$ -Glieder. Die ihm zugeordnete Knickdeterminante geht aus (72) durch Streichung der  $h'$ -Glieder hervor.

2. Der durchlaufende Stab auf durchwegs unverschieblichen Stützen besitzt keine Lagergleichungen. Die Kontinuitätsgleichungen bilden in diesem Falle eine Gruppe von linearen homogenen Gleichungen, die nur dann endliche Werte für die Knickmomente liefern, wenn die aus ihren Beiwerten gebildete Nennerdeterminante verschwindet. Diese Determinante ist die Knickdeterminante des Problems, die beispielsweise für einen vierfeldrigen Durchlaufstab die aus den Fortleitungszahlen  $a b$  aufgebaute Form

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & a_2 & 0 & 0 \\ b_2 & 1 & a_3 & 0 \\ 0 & b_3 & 1 & a_4 \\ 0 & 0 & b_4 & 1 \end{vmatrix} = 0 \quad (74)$$

besitzt.

**IX. Zahlenbeispiel.** <sup>5)</sup>

Von dem aus zwei Stützenstäben und fünf Feldstäben bestehenden Durchlaufstab der Fig. 3 a sind die in der Tabelle 1 eingetragenen Abmessungen, die Gebrauchsbelastung  $S_r$ , die Knicksicherheit  $\nu = 2$ , die Knickkräfte und die spezifischen Verdrehungswinkel der Stützenstäbe [1] und [3] mit  $\varepsilon_1 = 0,19167 \cdot 10^{-4}$  und  $\varepsilon_3 = 0,15556 \cdot 10^{-4}$  gegeben. Man ermittle den erforderlichen, für alle elastischen Stützen als gleich groß vorausgesetzten spezifischen Stützenwiderstand  $A = A_{erf}$ , der das Ausknicken des Durchlaufstabes gerade noch zu verhindern vermag.

1. Verdrehungswinkel  $\sigma_r$  und  $\tau_r$ .

Feldstab [r]	[2]	[4]	[5]	[6]	[7]
$c_r$ in cm	400	300	450	500	400
$F_r$ „ cm <sup>2</sup>	79,2	106,9	154	160,4	69,7
$J_r$ „ cm <sup>4</sup>	5860	7670	11520	12000	4460
$S_r$ „ ton	180	240	300	360	150
$\sigma_r = \frac{S_r}{F_r}$ t/cm <sup>2</sup>	2,273	2,245	1,948	2,244	2,152
<sup>+) T<sub>r</sub> in t/cm<sup>2</sup></sup>	1212,2	1279,2	2015,4	1281	1507,6
$m_r$ nach (70)	1,56	2,12	1,94	1,30	1,67
$\widehat{\varphi}_r$ „ (27)	2,01384	1,48188	1,61938	2,41661	1,88119
$\varphi_r^\circ$	115° 23' 5''	84° 54' 24''	92° 47' 1''	138° 27' 28''	107° 47' 04''
$s_r$ „ (26)	1,22906	0,48776	0,62129	2,64403	0,97561
$t_r$ „ (26)	1,95558	0,86792	1,07874	3,72743	1,60342
Nach (11) frei gewählte Vergleichswerte: $S^* = 360$ ton, $c^* = 500$ cm					
$S_r'$ nach (11)	0,5	0,66667	0,83333	1,00	0,41667
$c_r'$ „ (11)	0,8	0,6	0,9	1,00	0,8
$S_r' c_r'$	0,4	0,4	0,75	1,00	0,33333
$\sigma_r'$ „ (28)	3,07265	1,21940	0,82839	2,64403	2,92687
$\tau_r'$ „ (28)	4,88895	2,16980	1,43832	3,72743	4,81031

<sup>+) Weil  $\sigma_r > (\sigma_{prop} = 1,905 \text{ t/cm}^2)$  findet das Knicken im unelastischen Gebiet statt. Nach ENGOESSER-TETMAJER errechnet sich daher der den  $\sigma_r \text{ t/cm}^2$  zugeordnete Knickmodul  $T_r$  aus</sup>

$$T_r = 10^3 \frac{(3,1 - \sigma_r)^2 \sigma_r}{1,28265} \text{ t/cm}^2.$$

<sup>5)</sup> Dieses und viele andere Zahlenbeispiele hat mein Assistent Dr. Ing. E. STRELSKY gerechnet, wofür ich ihm an dieser Stelle besten Dank sage.

2. Momente  $k'_i$ . Fortleitungszahlen  $a_r$  und  $b_r$ .

Gelenk $i$	1	2	3	4	5	6	7
Stab [r]	[1]	[2]	[3]	[4]	[5]	[6]	[7]
$(\varepsilon_r')$ ; $\tau_r'$	(3,45000)	4,88895	(2,80000)	2,16980	1,43832	3,72743	4,81031
$\kappa'_i$ nach (39)		8,33895	7,68895	4,96980	3,60812	5,16575	8,53774
$k'_i$ „ (40)		0,11992	0,13006	0,20122	0,27715	0,19358	0,11713
$(\varepsilon_r')$ , $\sigma_r'$	(3,45000)	3,07265	(2,80000)	1,21940	0,82839	2,64403	2,92687
$a_r$ nach (42)	0	0,36847	0,36416	0,24536	0,22959	0,51184	0,34282
$b_r$ „ (42)	0,41372	0,39962	0,56340	0,33796	0,16036	0,30969	0

3. Fortleitungszahlen  $p_r$  und  $q_r$ . Multiplikatoren  $\mu_r$ . [Gl. (51), (52)].

[r]	$p_r = \frac{a_r}{1 - b_{r-1} p_{r-1}} \quad r = 1, 2 \dots 6, 7$					$\mu_r = \frac{q_r}{p_r} \quad (r = 2, 3 \dots 5, 6)$	$q_r = \frac{b_r}{1 - a_{r+1} q_{r+1}} \quad r = 7, 6 \dots 2, 1$				
	$b_{r-1}$	$b_{r-1} p_{r-1}$	$f_r = \frac{a_r}{1 - b_{r-1} p_{r-1}}$	$a_r$	$p_r = \frac{a_r}{f_r}$		$a_{r+1}$	$a_{r+1} q_{r+1}$	$g_r = \frac{b_r}{1 - a_{r+1} q_{r+1}}$	$b_r$	$q_r = \frac{b_r}{g_r}$
[1]	—	—	1	0	0	—	0,36847	0,18991	0,81009	0,41372	0,51071
[2]	0,41372	0	1	0,36847	0,36847	1,39879	0,36416	0,22465	0,77535	0,39962	0,51541
[3]	0,39962	0,14725	0,85275	0,36416	0,42705	1,44457	0,24536	0,08672	0,91328	0,56340	0,61690
[4]	0,56340	0,24060	0,75940	0,24536	0,32310	1,09385	0,22959	0,04375	0,95625	0,33796	0,35342
[5]	0,33796	0,10919	0,89081	0,22959	0,25773	0,73943	0,51184	0,15851	0,84149	0,16036	0,19057
[6]	0,16036	0,04133	0,95867	0,51184	0,53391	0,58005	0,34282	0	1	0,30969	0,30969
[7]	0,30969	0,16535	0,83465	0,34282	0,41074	—	—	—	1	0	0

4. Einflußzahlen  $\lambda'_{ij}$ .

Die Einflußzahl  $\lambda'_{11}$  wird mit (57), alle übrigen Einflußzahlen mit (59) berechnet.

$$\lambda'_{11} = \frac{q_1}{b_1} k'_1 = 0,14804, \quad \lambda'_{44} = \mu_4 \lambda'_{33} = 0,32721,$$

$$\lambda'_{22} = \mu_2 \lambda'_{11} = 0,20708, \quad \lambda'_{55} = \mu_5 \lambda'_{44} = 0,24195,$$

$$\lambda'_{33} = \mu_3 \lambda'_{22} = 0,29914, \quad \lambda'_{66} = \mu_6 \lambda'_{55} = 0,14034,$$

Kontrollen:

nach (55)  $\lambda'_{33} = \frac{q_3}{1 - p_3 q_3} \frac{k'_3}{b_3} = 0,29914,$

nach (58)  $\lambda'_{66} = \frac{p_7}{a_7} k'_6 = 0,14034.$

5. Momente  $A', B', C'$  und  $D'$ . [Gl. (63), (64)].

Infolge				
$\nu_I = +1$	$\nu_{II} = +1$	$\nu_{III} = +1$	$\nu_{IV} = +1$	
$A'_1 = 0,22434$	$B'_1 = 0,06371$	$C'_1 = 0,01981$	$D'_1 = 0,00098$	
$A'_2 = 0,28338$	$B'_2 = 0,17290$	$C'_2 = 0,05375$	$D'_2 = 0,00266$	0,36847
0,61690 $A'_3 = 0,17482$	$B'_3 = 0,40486$	$C'_3 = 0,12587$	$D'_3 = 0,00624$	0,42705
0,35342 $A'_4 = 0,06178$	$B'_4 = 0,43293$	$C'_4 = 0,38957$	$D'_4 = 0,01931$	0,32310
0,19057 $A'_5 = 0,01177$	$B'_5 = 0,08250$	$C'_5 = 0,30431$	$D'_5 = 0,07493$	0,25773
0,30969 $A'_6 = 0,00365$	$B'_6 = 0,02555$	$C'_6 = 0,09424$	$D'_6 = 0,14034$	0,53391

6. Momentensummen  $\Sigma A'_r, \Sigma B'_r, \Sigma C'_r, \Sigma D'_r$ . |  $r = I, II, III, IV$ . [Gl. (68)].

Infolge $\Sigma K'_r$	$\nu_I = +1$	$\nu_{II} = +1$	$\nu_{III} = +1$	$\nu_{IV} = +1$
$\Sigma K'_I = K'_1 + K'_2$	$\Sigma A'_I = 0,50772$	$\Sigma B'_I = 0,23661$	$\Sigma C'_I = 0,07356$	$\Sigma D'_I = 0,00364$
$\Sigma K'_{II} = K'_3 + K'_4$	$\Sigma A'_{II} = 0,23660$	$\Sigma B'_{II} = 0,83779$	$\Sigma C'_{II} = 0,51544$	$\Sigma D'_{II} = 0,02555$
$\Sigma K'_{III} = K'_4 + K'_6$	$\Sigma A'_{III} = 0,07355$	$\Sigma B'_{III} = 0,51543$	$\Sigma C'_{III} = 0,69388$	$\Sigma D'_{III} = 0,09424$
$\Sigma K'_{IV} = K'_6 + 0$	$\Sigma A'_{IV} = 0,00365$	$\Sigma B'_{IV} = 0,02555$	$\Sigma C'_{IV} = 0,09424$	$\Sigma D'_{IV} = 0,14034$

Die in dieser Tabelle aufscheinende Symmetrie zur Hauptdiagonale ist ein Beweis für die Richtigkeit der Zahlenrechnung.

7. Werte  $a'_r, m'_r, b'_r$  der Feldstäbe  $[r]$ . [Gl. (13)].  
Vergleichswert  $\delta^* = \delta, c^* = 500$  cm.

Stütze $i$	1	3	4	5	6	7
Stab $[r]$	⌋ [I]	⌋ [II]	⌋ [III]	⌋	⌋ [IV]	⌋
$\delta_i$	$\delta$	$\delta$	$\delta$	0	0	$\delta$
$\delta'_i = \delta_i / \delta^*$	1	1	1	0	0	1
$c'_r$ nach (11)	0,8	0,6	0,9	1,0	0,8	
$a'_r$ „ (13)	0	1,25000	1,66667	0	0	
$m'_r$ „ „	2,50000	3,33333	1,11111	0	1,25000	
$b'_r$ „ „	1,66667	1,11111	0	0	0	

8. Die  $h'_{rK'}$ -Glieder der Knickdeterminante. [Gl. (72), (73)].

1. Reihe	$\dots h'_{IK'} = 0,00000$	$+ 3,12500 \Sigma K'_I + 2,08333 \Sigma K'_{II}$	 K' = A', B', C', D'.
2. „	$\dots h'_{IIK'} = 2,08333 \Sigma K'_I + 5,55556 \Sigma K'_{II} + 1,85185 \Sigma K'_{III}$		
3. „	$\dots h'_{IIIK'} = 1,85185 \Sigma K'_{II} + 1,23457 \Sigma K'_{III} + 0,00000$		
4. „	$\dots h'_{IVK'} = 0,00000$	$+ 1,56250 \Sigma K'_{IV} + 0,00000$	

Hieraus ergeben sich die in der folgenden Tabelle stehenden Zahlenwerte. Die beigefügten Vorzeichen und auch jene der  $S'$ -Produkte in der letzten Tabelle entsprechen den im Abschnitt VIII angegebenen Regeln.

$$\begin{vmatrix} + 2,07954 & - 2,48480 & + 1,30371 & + 0,06460 \\ - 2,50840 & + 6,10181 & - 4,30177 & - 0,32405 \\ + 0,52894 & - 2,18780 & + 1,81116 & + 0,16365 \\ + 0,00570 & - 0,03993 & + 0,14725 & + 0,21929 \end{vmatrix}$$

### 9. Die $S'$ -Produkte der Knickdeterminante. [Gl. (72)].

$$\begin{vmatrix} - 1,25000 & + 0,83333 & - & - \\ + 0,83333 & - 2,22222 & + 1,38888 & - \\ - & + 0,74074 & - 0,92592 & + 0,00000 \\ - & - & + 0,00000 & - 0,52084 \end{vmatrix}$$

### 10. Knickdeterminante und Lösung.

Die Addition der vertikalen Kolonnen der zwei vorhergehenden Tabellen führt nach Hinzufügung der  $\eta$ -Glieder zum Zahlenwert der aus (72) hervorgehenden Knickdeterminante (69)

$$\Delta = \begin{vmatrix} \eta + 0,82954 & - 1,65147 & + 1,30371 & + 0,06460 \\ - 1,67507 & \eta + 3,87959 & - 2,91289 & - 0,32405 \\ + 0,52894 & - 1,44706 & \eta + 0,88524 & + 0,16365 \\ + 0,00570 & - 0,03993 & + 0,14725 & \eta - 0,30155 \end{vmatrix} = 0$$

deren Ausrechnung die Gleichung

$$\eta^4 + 5,29282 \eta^3 - 2,00848 \eta^2 - 0,01729 \eta + 0,02197 = 0$$

liefert. Aus ihr gewinnt man die vier Wurzeln

$$\begin{aligned} \eta_1 &= + 0,33702, & \eta_3 &= + 0,12121, \\ \eta_2 &= - 5,64775, & \eta_4 &= - 0,09699. \end{aligned}$$

Von diesen vier Wurzeln hat nur die größte positive Wurzel  $\eta_{max} = + 0,33702$  praktische Bedeutung. Sie liefert die untereinander gleich großen spezifischen Stützenwiderstände  $A_{erf}$ , die erforderlich sind, um ein Ausknicken des Durchlaufstabes bei zweifach erhöhter Gebrauchslast gerade noch zu verhindern. Nach (14) ist

$$\eta = \frac{c^*}{\delta^* S^*} \equiv \frac{c^*}{\delta S^*} = \frac{A_{erf} c^*}{S^*}$$

und hieraus mit  $\eta = \eta_{max}$  folgt

$$A \equiv A_{erf} = \eta_{max} \frac{S^*}{c^*} = 0,33702 \frac{360 \text{ ton}}{500 \text{ cm}} = 0,238 \text{ t/cm}$$

und

$$\delta \equiv \delta_{erf} = \frac{1}{A_{erf}} = 4,202 \text{ cm/t.}$$

Weitere Zahlenbeispiele finden sich in meiner Abhandlung „Ein Rechenchema zur Knickberechnung mehrfeldriger beliebig gestützter Stäbe und seine Anwendung auf Zahlenbeispiele“ (Stahlbau 1941).

### Zusammenfassung.

In der vorliegenden Abhandlung wird ein strenges Verfahren zur Knickberechnung eines mehrfeldrigen Durchlaufstabes entwickelt, dessen Querschnitte und Trägheitsmomente innerhalb eines Feldes konstant sind und der in den Feldgrenzen von axial wirkenden Einzelkräften ergriffen wird. Neben Druckkräften können auch Zugkräfte auftreten, wie z. B. beim Ausknicken des Obergurtes im durchlaufenden Träger einer offenen Brücke ( $S_m$  in Fig. 1), auch Feldstäbe, die durch keinerlei Axialkraft beansprucht sind ( $S_0'$  in Fig. 1) dürfen im Durchlaufstab enthalten sein. Die Stützung in den Feldgrenzen kann nach irgend einer der in Fig. 2 schematisch dargestellten Art erfolgen, und diese Stützungsarten können in beliebiger Kombination verwendet werden.

Für derartige Durchlaufstäbe, die jede beliebige Unsymmetrie hinsichtlich Konstruktion, Belastung und Stützung aufweisen dürfen, wird ein Rechenschema entwickelt, nach welchem die Berechnung der Knickdeterminante in immer gleicher und gleich einfacher Weise erfolgen kann.

Das Zahlenbeispiel im Abschnitt IX und weitere Zahlenbeispiele in der Abhandlung des Verfassers „Ein Rechenschema zur Knickberechnung mehrfeldriger Stäbe“ (Stahlbau 1941/42) zeigen die praktische Anwendung des Verfahrens.

### Résumé.

Dans le présent mémoire l'auteur développe une méthode exacte de calcul du flambage de la poutre continue sur plusieurs appuis dont les sections et les moments d'inertie sont invariables à l'intérieur d'une ouverture et qui est soumise, dans les limites des ouvertures, à des forces concentrées axiales. On peut avoir simultanément des forces de traction à côté des forces de compression, comme c'est par exemple le cas lors du flambage de la membrure supérieure d'une poutre continue d'un pont à section ouverte ( $S_m$  de la fig. 1); on peut également avoir dans une poutre continue des barres qui ne sont soumises à aucune force axiale ( $S_0'$  de la fig. 1). Les appuis peuvent être d'un quelconque des types représentés schématiquement à la fig. 2 et ils peuvent être combinés à volonté.

L'auteur développe, pour des poutres continues de ce genre, c'est-à-dire pour des poutres qui peuvent présenter une dissymétrie quelconque quant à sa construction, ses surcharges et ses appuis, un schéma de calcul d'après lequel le calcul des déterminants de flambage peut toujours se faire de la même façon et avec la même simplicité.

L'exemple numérique traité au chapitre IX ainsi que d'autres exemples numériques publiés par l'auteur sous le titre « Ein Rechenschema zur Knickberechnung mehrfeldriger Stäbe » (Stahlbau 1941/42) montrent l'application pratique de la méthode.

### Summary.

In this article a strict method of calculating the buckling of a continuous multi-bay member is developed, whose cross-sections and moments of inertia within any bay are constant, and which is supported within the limits of the bays by separate forces acting axially. Besides pressure forces, tensile forces may also occur, as for instance in the buckling of the top boom in the continuous girder of an open bridge ( $S_m$  in fig. 1); also bay members

which are not stressed by any axial force ( $S_0'$  in fig. 1) may be present in the continuous member. The supporting within the limits of the bays may be effected by any of the methods illustrated diagrammatically in fig. 2, and these methods of supporting may be adopted in any desired combination.

For such continuous members, which may display any desired lack of symmetry with respect to design, load and supporting, a method of calculation is developed, according to which the buckling determinants can always be calculated in the same manner and in an equally simple manner.

The numerical example in section IX and further numerical examples in the author's article "Ein Rechenschema zur Knickberechnung mehrfeldriger Stäbe" (in Stahlbau 1941/42) show how the method can be applied in practice.