

Zeitschrift: IABSE publications = Mémoires AIPC = IVBH Abhandlungen
Band: 7 (1943-1944)

Artikel: Hohlträger als Faltwerke
Autor: Gruber, Ernst
DOI: <https://doi.org/10.5169/seals-7998>

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. [Mehr erfahren](#)

Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. [En savoir plus](#)

Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. [Find out more](#)

Download PDF: 22.07.2025

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>

HOHLTRÄGER ALS FALTWERKE.

POUTRES CREUSES TRAITÉES EN «TOITS PLISSÉS».

HOLLOW BEAMS OF A SHED-TYPE SYSTEM.

Dr. Ing. ERNST GRUBER, Deutschland.

A. Allgemeines.

Für Tragwerke, wie sie in Fig. 1, 2 und 7 dargestellt sind, wurden bisher, außer einigen Modellversuchen, noch keine eingehenden Untersuchungen angestellt. Es ist naheliegend, solche Hohlträger als Faltwerke aufzufassen. Man kommt dadurch dem wirklichen Verhalten des Tragwerks äußerst nahe und erhält, wie die folgenden Untersuchungen zeigen werden, sehr übersichtliche und treffende Ergebnisse.

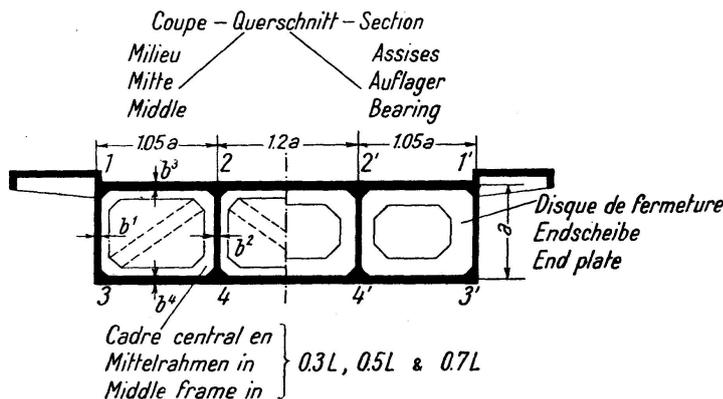


Fig. 1

Bei Faltwerksberechnungen werden in der Regel die senkrecht zu den Längsachsen der Scheiben wirkenden Spannungen σ_{ξ} (siehe Fig. 3a, b) nicht berücksichtigt. Bei Systemen, die im Querschnitt ein rahmenartiges Grundnetz aufweisen (Fig. 1), trifft diese Annahme immer sehr gut zu. In solchen Tragwerken tritt infolge der Knotensteifigkeit und der Plattensteifigkeit der Scheiben im Gesamtquerschnitt des Faltwerkes eine rahmenartige Wirkung auf, durch welche die zusätzlichen Querbelastungen \bar{p}_r und \bar{p}_s entstehen, welche wieder die $\bar{\sigma}_{\xi}$ erzeugen (Fig. 3a). Da die \bar{p}_r und \bar{p}_s bei dem fast immer schlanken Verhältnis $\frac{b}{2h}$ sehr gering sind, werden die dazu gehörigen σ_{ξ} ebenfalls sehr klein. Betrachtet man ein solches Faltwerk, wie dies meistens mit genügender Genauigkeit geschehen kann, als „gelenkig“, d. h. die einzelnen Scheiben sind längs der Kanten nur durch scharnierartige Gelenke miteinander verbunden, so wird die oben erwähnte Rahmenwirkung unterbunden und die $\bar{\sigma}_{\xi}$ verschwinden bis auf den weiter unten beschriebenen direkten Einfluß der Lasten ganz.

Bei Faltenwerken, welche nach Fig. 2a und 7a im Querschnitt die Figur eines stabilen Fachwerkes als Grundnetz aufweisen, die also in der Quer- richtung auch ohne Mitwirkung der oben erwähnten Platten- und Knoten- steifigkeit einen etwa eben so großen Biege- widerstand besitzen wie in der Haupt- richtung L , erreichen die p_r und p_s und daher auch die σ_ξ mitunter besonders für bestimmte Belastungen beträchtliche Werte und müssen meist im gesamten Verformungsspiel berücksichtigt werden. Der von einer stetigen Belastung herrührende direkte Einfluß auf die Querbelastungen p und die Querspannungen σ_ξ ist in Anbetracht der geringen bezogenen Pressungen, die die üblichen Belastungen auf ihre Unterlagen ausüben, immer gering. Da man örtlich engkonzentrierte Lasten durch Entwicklung in Funktions- reihen, z. B. Fourier'sche Reihen in eine Folge der üblichen, stetig verteilten Belastungen überführen kann, gelten diese Betrachtungen auch für die so- genannten „Einzellasten“. Die in diesen Entwicklungen an den Angriffsorten der Einzellasten auftretenden größeren Pressungen erstrecken sich nur über örtlich eng begrenzte Räume und sind für das Gesamtergebnis ohne nennens- werte Bedeutung. Es ist jedoch immer notwendig, die Spannungen und zwar besonders die Schubspannungen in der unmittelbaren Umgebung der Ein- zellasten großemäßig zu verfolgen.

B. Spannungs- und Verformungszustand einer Scheibe.

Wir nehmen in der Folge an, daß die einzelnen Scheiben längs der Kanten n nur durch scharnierartige Gelenke verbunden sind, so daß von einer Scheibe auf die andere nur in diesen Kanten wirkende Schubspannungen τ übertragen werden können (Fig. 7a, b). Für Tragwerke, welche im Quer- schnitt die Figur eines stabilen Fachwerkes als Grundnetz aufweisen, trifft

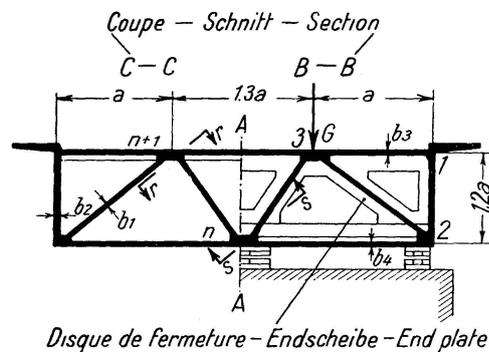


Fig. 2 a

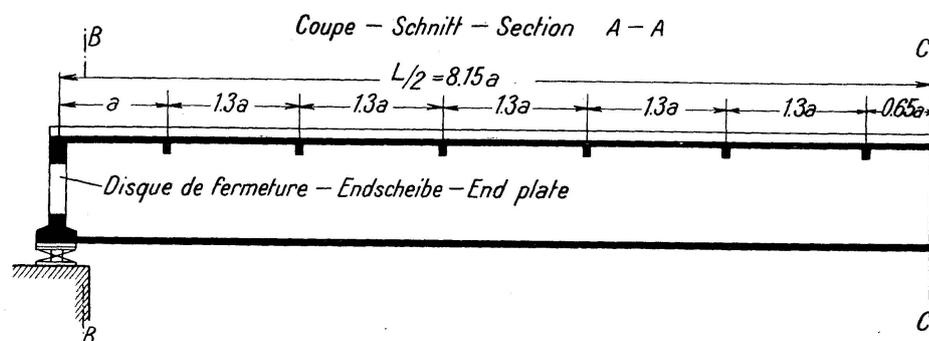


Fig. 2 b

diese Annahme fast vollständig zu. Eine, in einem beliebigen Knoten, z. B. 2 der Fig. 7a, angreifende Kraft G_0 zerlegt sich in die stetig verteilten Belastungen p , z. B. p_{21} , p_{23} , p_{24} und p_{22}' , deren Wirkungsebenen mit den Mittelebenen der von diesem Knoten ausgehenden Scheiben zusammenfallen (Fig. 7a). Laufen im letzteren mehr als 2 solcher Tragwände zusammen, so ist diese Kraftaufteilung statisch unbestimmt.

Löst man eine beliebige Scheibe $n+1$, n durch die knapp neben den Knoten $n+1$ und n geführten Schnitte $r-r$, $s-s$ vom Tragwerk los, so werden die oben festgelegten inneren Kräfte τ und p frei und erscheinen als äußere Belastung der Scheibe $n+1$, n (Fig. 2a). In Fig. 3a ist dieser Zustand zur Darstellung gebracht. Alle darin angegebenen Richtungssinne gelten in der Folge als positiv. Entsprechend den allgemeinen Erläuterungen des Abschnittes A sollen auch die senkrecht zur Scheibenachse wirkenden Spannungen σ_ξ berücksichtigt werden, so daß ein zachsiger Spannungszustand vorliegt. Die beiden Gleichgewichtsbedingungen an einem infinitesimalen Element mit den Seitenlängen dx und $d\xi$ ergeben sich unter Berücksichtigung der Massenkräfte g_v und g_h zu

$$\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} = \frac{\partial \tau}{\partial \xi} - \frac{1}{b} g_h; \quad \frac{\partial \sigma_\xi}{\partial \xi} = \frac{\partial \tau}{\partial x} + \frac{1}{b} g_v, \quad (1)$$

woraus durch Elimination von τ

$$\frac{\partial^2 \sigma_x}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 \sigma_\xi}{\partial \xi^2} - \frac{1}{b} \left(\frac{\partial g_v}{\partial \xi} + \frac{\partial g_h}{\partial x} \right) \quad (2)$$

folgt (Fig. 3b). Ist das Verhältnis $\frac{2h}{L}$ kleiner als etwa $\frac{1}{6}$ bis $\frac{1}{7}$, so ist mit genügender Genauigkeit die Normalspannung σ_x eine lineare Funktion der Querschnittsordinate ξ , so daß

$$\sigma_x = -\frac{1}{2bh} \left(\frac{3M}{h^2} \xi - N \right) \quad (3)$$

wird, woraus sich nach Gl. (2) die Bestimmungsgleichung

$$\frac{\partial^2 \sigma_\xi}{\partial \xi^2} = -\frac{1}{2bh} \left(\frac{3M''}{h^2} \xi - N'' \right) + \frac{1}{b} \left(\frac{\partial g_v}{\partial \xi} + \frac{\partial g_h}{\partial x} \right) \quad (4)$$

für σ_ξ ergibt, worin M und N reine Funktionen von x sind. Es sei nun g_v konstant und g_h von ξ linear abhängig, etwa wie

$$g_h = \frac{1}{2bh} \left(n_{rs} - \frac{3\xi}{h^2} m_{rs} \right)$$

Integriert man dann diese Differentialgleichung (4) zwei mal partiell nach ξ , so erhält man

$$\sigma_\xi = -\frac{\xi^2}{4bh} \left(\frac{M''}{h^2} \xi - N'' \right) + \xi f_1(x) + f_2(x) + \frac{\xi^2}{4bh} \left(n'_{rs} - \frac{m'_{rs}}{h^2} \xi \right). \quad (5)$$

Hiebei sind $f_1(x)$ und $f_2(x)$ reine Funktionen von x , die sich aus den funktionellen Randbedingungen

$$\begin{aligned} \xi = h; & \quad b \sigma_\xi = p_s \\ \xi = -h; & \quad b \sigma_\xi = p_r \quad \text{zu} \end{aligned}$$

$$f_1(x) = \frac{1}{2bh}(p_s - p_r) + \frac{M''}{4bh} + \frac{m'_{rs}}{4bh} \quad (6a)$$

$$f_2(x) = \frac{1}{2b}(p_s + p_r) - \frac{hN''}{4b} - \frac{h}{4b}n'_{rs} \quad (6b)$$

ergeben. Setzt man dies in Gl. (5) ein, so folgt

$$\sigma_\xi = \frac{1}{2b} \left\{ \frac{1}{2} \left(1 - \frac{\xi^2}{h^2} \right) \left[\frac{\xi}{h} (M'' + m'_{rs}) - h(N'' + n'_{rs}) \right] + p_r \left(1 - \frac{\xi}{h} \right) + p_s \left(1 + \frac{\xi}{h} \right) \right\}^1 \quad (7)$$

Schneidet man durch zwei um dx voneinander entfernte, senkrecht zur x -Achse stehende Schnitte das in Fig. 3a durch Schraffen hervorgehobene Element aus seiner Scheibe, so werden die weiteren inneren Kraftwirkungen M , N und Q frei, die sich mit den τ_r , τ_s , p_r , p_s , g_v und g_h am Element das Gleichgewicht halten müssen. Man erhält somit

$$M' = -bh(\tau_r + \tau_s) + Q - m_{rs} \quad (8a)$$

$$N' = -b(\tau_r - \tau_s) - n_{rs} \quad (8b)$$

$$Q' = -p_r + p_s - 2g_v h. \quad (8c)$$

Nach Differentiation der Gl. (8a) und (8b) nach x folgt unter Beachtung auf Gl. (8c)

$$M'' = -bh(\tau'_r + \tau'_s) - p_r + p_s - m'_{rs} - 2g_v h \quad (9a)$$

$$N'' = -b(\tau'_r - \tau'_s) - n'_{rs}. \quad (9b)$$

Die bezogenen Dehnungen ε_r und ε_s der beiden Scheibenränder $n+1$ und n ergeben sich unter Berücksichtigung der Querdehnungszahl m zu

$$\varepsilon_s = \frac{1}{2bhE} \left(\pm \frac{3M}{h} + N \right) - \frac{p_r}{mbE} = \frac{\sigma_x}{E} - \frac{p_r}{mbE}, \quad (10a,b)$$

woraus durch Subtraktion und Addition

$$M = \frac{1}{3} bh^2 E (\varepsilon_r - \varepsilon_s) + \frac{h^2}{3m} (p_r - p_s) \quad (11a)$$

$$N = bhE (\varepsilon_r + \varepsilon_s) + \frac{h}{m} (p_r + p_s) \quad (11b)$$

folgt, wobei die Verkürzung als positiv gerechnet wird. Differenzieren wir Gl. (11a) und (11b) zwei mal nach x und setzen diese Ausdrücke in die Gl. (9a) und (9b) ein, so erhalten wir zwei lineare Gleichungen, deren Lösungen

$$\tau'_r = -\frac{hE}{3} (2\varepsilon''_r + \varepsilon''_s) - \frac{h}{3mb} (2p''_r + p''_s) - \frac{1}{2hb} (p_r - p_s) - \frac{1}{2b} \left(\frac{m'_{rs}}{h} + n'_{rs} \right) - \frac{g_v}{b} \quad (12a)$$

$$\tau'_s = \frac{hE}{3} (\varepsilon''_r + 2\varepsilon''_s) + \frac{h}{3mb} (p''_r + 2p''_s) - \frac{1}{2hb} (p_r - p_s) - \frac{1}{2b} \left(\frac{m'_{rs}}{h} - n'_{rs} \right) - \frac{g_v}{b} \quad (12b)$$

lauten. Eliminiert man aus den Gl. (7), (9a), (9b) und (12a), (12b) M'' , N'' , τ'_r und τ'_s , so wird

¹⁾ Diese Beziehungen stimmen sehr gut mit den genauen elastizitätstheoretischen Lösungen überein, die man mit Hilfe der Airy'schen Spannungsfunktion findet.

$$\sigma_{\xi} = -\frac{h^2}{4} \left(1 - \frac{\xi^2}{h^2}\right) \left[\left(1 - \frac{\xi}{3h}\right) \left(\varepsilon_r'' E + \frac{p_r''}{mb}\right) + \frac{2\xi}{bh^2} g_v + \left(1 + \frac{\xi}{3h}\right) \left(\varepsilon_s'' E + \frac{p_s''}{mb}\right) \right] + \frac{1}{2b} \left[p_r \left(1 - \frac{\xi}{h}\right) + p_s \left(1 + \frac{\xi}{h}\right) \right], \quad (13)$$

womit alle inneren Kräfte durch ε_r , ε_s , p_r und p_s ausgedrückt sind.

Für die Untersuchungen der folgenden Abschnitte ist das vorherige Studium der Formänderungen einer Scheibe notwendig. In Fig. 4 seien 1, 2, 3, 4 die Ecken und $m-m$ sei die Achse eines Elementes in seiner ursprünglichen, unverformten Lage. Durch die eintretende Verzerrung rücken die Ecken von 1, 2, 3, 4 nach 1', 2', 3', 4', die Achse hingegen bewegt sich von $m-m$ nach $m'-m'$. Rücken wir das Element 1, 2, 3, 4 soweit nach abwärts, bis m nach m'' , d. h. in gleicher Höhe mit m' zu liegen kommt, so erkennen wir in der Strecke $\overline{mm''}$ die lotrechte Durchbiegung ξ . Außerdem werden sich infolge der σ_{ξ} die Längen der Strecken $m1$ bzw. $m3$ um Δ_r bzw. Δ_s ändern, wobei eine Verkürzung wieder positiv in Rechnung gestellt wird. Da die bezogene Dehnung in Richtung der ξ -Achse

$$\varepsilon_{\xi} = \frac{\sigma_{\xi}}{E} - \frac{\sigma_x}{mE} \quad (14)$$

ist, folgt durch bestimmte Integration die Verkürzung der unteren bzw. oberen Scheibenhälfte in der Form

$$\Delta_s = \frac{1}{E} \int_0^h \left(-\frac{\sigma_x}{m} + \sigma_{\xi}\right) d\xi; \quad \Delta_r = \frac{1}{E} \int_{-h}^0 \left(-\frac{\sigma_x}{m} + \sigma_{\xi}\right) d\xi. \quad (15a, b)$$

Substituiert man hierin die σ_{ξ} und die σ_x durch Gl. (13) und Gl. (3), ersetzt weiters in letzterer M und N durch Gl. (11a) und (11b) und führt die beiden langwierigen, jedoch nicht schwierigen Integrationen aus, so wird

$$\Delta_r = -\frac{h}{4m} (3\varepsilon_r + \varepsilon_s) - \frac{h^3}{48} (9\varepsilon_r'' + 7\varepsilon_s'') + \frac{h}{4bE} \left(1 - \frac{1}{m^2}\right) (3p_r + p_s) - \frac{h^3}{48bmE} (9p_r'' + 7p_s'') + \frac{h^2}{8bE} g_v \quad (16a)$$

$$\Delta_s = -\frac{h}{4m} (\varepsilon_r + 3\varepsilon_s) - \frac{h^3}{48} (7\varepsilon_r'' + 9\varepsilon_s'') + \frac{h}{4bE} \left(1 - \frac{1}{m^2}\right) (p_r + 3p_s) - \frac{h^3}{48bmE} (7p_r'' + 9p_s'') - \frac{h^2}{8bE} g_v. \quad (16b)$$

Analog Gl. (14) lautet die bezogene Dehnung in Richtung der x -Achse

$$\varepsilon_x = \frac{\sigma_x}{E} - \frac{\sigma_{\xi}}{mE}. \quad (17)$$

Es ergibt sich bei Anwendung des Prinzips der virtuellen Verschiebungen für die lotrechte Durchbiegung ξ im Punkte (cd)

$$\xi = \bar{\xi} + \bar{\xi} = -\frac{b}{E} \int_{x=0}^{x=L} \int_{\xi=-h}^{\xi=+h} \left[\left(\sigma_x - \frac{\sigma_{\xi}}{m}\right) \bar{v}_x + \left(\sigma_{\xi} - \frac{\sigma_x}{m}\right) \bar{v}_{\xi} \right] dx d\xi + \frac{b}{G} \int_{x=0}^{x=L} \int_{\xi=-h}^{\xi=+h} \tau \bar{\tau} dx d\xi, \quad (18)$$

wobei die gestrichelten Spannungen von einer im Achspunkt (cd) angreifen-

den Hilfskraft $P = 1$ herrühren (Fig. 3a). Das erste Integral stellt den Anteil der Normalspannungen und das zweite Integral denjenigen der Schubspannungen dar. Für den Hilfsangriff erreichen die $\bar{\sigma}_\xi$ in den engsten Nachbarbereichen der beiden Auflagerdrücke und der Last $P = 1$ Werte in der ungefähren Größenordnung der p . Da aber einerseits diese drei Bereiche im Vergleich zur ganzen Scheibenfläche sehr klein sind und andererseits

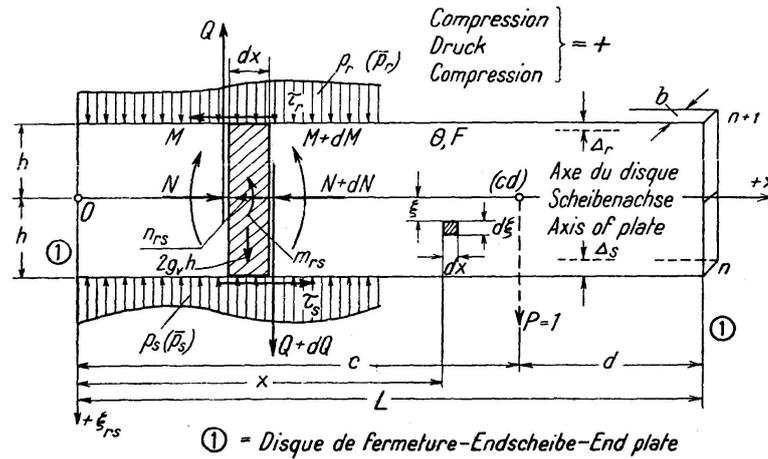


Fig. 3 a

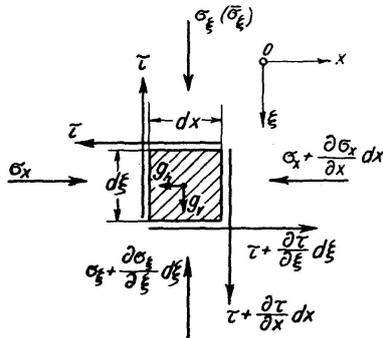


Fig. 3 b

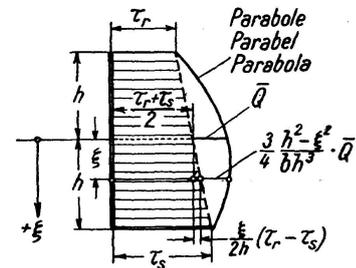


Fig. 3 c

die achsnormalen Spannungen in den Gebieten zwischen den obigen Einzel-lasten praktisch vollkommen verschwinden, kann man die vom Hilfsangriff herrührenden $\bar{\sigma}_\xi$ ganz unterdrücken, so daß man im ersten Integral $\bar{\sigma}_x = \frac{\mathfrak{M}}{\Theta} \xi$ und $\bar{\sigma}_\xi = 0$ setzen kann. Führt man unter Bedachtnahme auf Gl. (3) und Gl. (13) die innere Integration der Gl. (18) aus, so wird mit $\Theta = \frac{2}{3} b h^3$

$$\xi = \int_{x=0}^{x=L} \frac{1}{E} \left[\frac{M}{\Theta} + \frac{p_s - p_r}{2 m h b} - \frac{h E}{30 m} (\varepsilon_s'' - \varepsilon_r'') - \frac{h}{30 m^2 b} (p'' - p_r'') - \frac{g_v}{5 m b} \right] \mathfrak{M} dx. \quad (19)$$

Berücksichtigt man, daß die w und die Δ klein von der Größenordnung $\frac{\sigma}{E}$ sind, so ergibt sich aus einer aus der Fig. 4 leicht abzulesenden geometrischen Betrachtung bei Unterdrückung von unendlich kleinen Größen zweiter Ordnung

$$\frac{1}{E} \left[\frac{M}{\Theta} + \frac{p_s - p_r}{2 m h b} \right] = - \frac{\varepsilon_s - \varepsilon_r}{2 h}.$$

Faßt man in der Gl. (19) $\frac{1}{E} \bar{\gamma}$ als elastisches Gewicht γ auf, so folgt $\bar{\xi} = \int_0^L \gamma \mathfrak{M} dx$, das heißt die Biegelinie ist die Momentenlinie der γ oder es wird

$$\bar{\xi}'' = + \frac{1}{2h} (-\varepsilon_r + \varepsilon_s) + \frac{h}{30m} (-\varepsilon_r'' + \varepsilon_s'') + \frac{h}{30m^2 b E} (-p_r'' + p_s'') + \frac{g_v}{5 m b E}, \quad (20)$$

was den Anteil der Normalspannungen an der Durchbiegung darstellt. Für die Auswertung des zweiten Integrals der Gl. (18) muß die Verteilung der Schubspannungen τ bekannt sein. Diese ergibt sich für den vorhandenen rechteckigen Querschnitt für die zur äußeren Last gehörigen Querkraft Q zu

$$\tau_\xi = \frac{3}{4} \frac{h^2 - \xi^2}{b h^3} \bar{Q} + \frac{1}{2} (\tau_r + \tau_s) - \frac{\xi}{2h} (\tau_r - \tau_s) \quad (\text{Fig. 3c}) \quad (21)$$

mit
$$\bar{Q} = Q - b h (\tau_r + \tau_s). \quad (21')$$

Da beim Hilfsangriff keine Randschubspannungen vorhanden sind, erhalten wir für diesen die Verteilung zu

$$\bar{\tau}_\xi = \frac{3}{4} \frac{h^2 - \xi^2}{b h^3} \bar{Q}, \quad (22)$$

wenn \bar{Q} die Querkraft für $P=1$ ist.

Mit Gl. (21) und (22) folgt nun

$$\bar{\xi} = \frac{1}{G} \int_0^{x=L} Q_c \bar{Q} dx, \quad (23)$$

wobei

$$Q_c = \frac{3}{5} \frac{\bar{Q}}{b h} + \frac{\tau_r + \tau_s}{2} \text{ ist.} \quad (23')$$

Setzt man

$$\bar{Q}_{links} = \frac{L-c}{L} \bar{Q} \quad \text{und} \quad \bar{Q}_{rechts} = - \frac{c}{L} \bar{Q},$$

so ergibt sich

$$\bar{\xi} = \frac{1}{G} \left[\int_0^c Q_c dx - \frac{c}{L} \int_0^L Q_c dx \right],$$

woraus mit Gl. (23') und Gl. (21') nach zweimaliger Differentiation nach c

$$\bar{\xi}'' = \frac{Q'_c}{G} = \frac{1}{G} \left[\frac{3}{5 b h} Q' - \frac{1}{10} (\tau'_r + \tau'_s) \right] \quad (24)$$

folgt. Mit Gl. (8c) und Gl. (12a) und (12b) erhält man nun

$$\bar{\xi}'' = \frac{1}{G} \left[\frac{1}{2 b h} (-p_r + p_s) - \frac{h E}{30} (-\varepsilon_r'' + \varepsilon_s'') - \frac{h}{30 m b} (-p_r'' + p_s'') + \frac{m'_{rs}}{10 b h} - \frac{g_v}{b} \right], \quad (25)$$

womit wir den Anteil der Schubspannungen an der Durchbiegung gefunden haben. Addiert man Gl. (20) und Gl. (25), so erhält man mit $G = \frac{m E}{2(1+m)}$ die gesamte Verformung in der Gestalt

$$\xi'' = \frac{1}{2h} \left[(-\varepsilon_r + \varepsilon_s) + \frac{2(1+m)}{mbE} (-p_r + p_s) \right] - \frac{h}{30} \frac{1+2m}{m} \left[(-\varepsilon_r'' + \varepsilon_s'') + \frac{1}{mbE} (-p_r'' + p_s'') \right] + \frac{g_v}{5mbE} - \frac{g_v}{bG} + \frac{m'_{rs}}{10bhG} \quad (26)$$

In dieser Gleichung ist der Einfluß des zweiten Klammerausdruckes besonders bei Scheiben mit kleinem Verhältnis $\frac{2h}{L}$ außerordentlich klein und kann meistens unberücksichtigt bleiben. Man erhält dann für ξ'' die vereinfachte Form

$$\xi'' = \frac{1}{2h} \left[(-\varepsilon_r + \varepsilon_s) + \frac{2hg_v}{5mbE} \right] + \frac{1+m}{mbhE} \left[(-p_r + p_s) - 2hg_v + \frac{1}{5} m'_{rs} \right], \quad (26')$$

in welcher der erste Teil von den Normalspannungen σ und der zweite Teil von den Schubspannungen τ herrührt. Will man also nur den Einfluß der σ berücksichtigen, so ergibt sich die noch weiter vereinfachte Form der Gl. (26)

$$\xi'' = \frac{1}{2h} \left[(-\varepsilon_r + \varepsilon_s) + \frac{2hg_v}{5mbE} \right]. \quad (26'')$$

Wie man aus der Fig. 4 erkennt, ergeben sich die Verformungen des oberen bzw. unteren Scheibenrandes, indem man zu ξ die Werte der Δ_r addiert, bzw. der Δ_s subtrahiert.

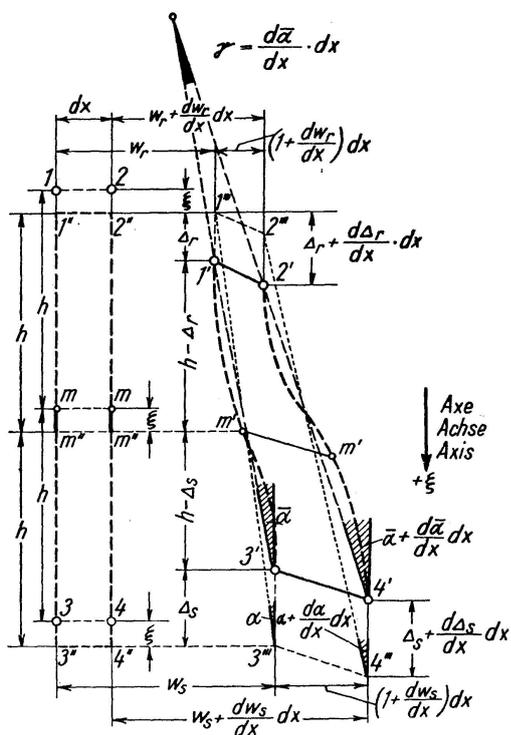


Fig. 4

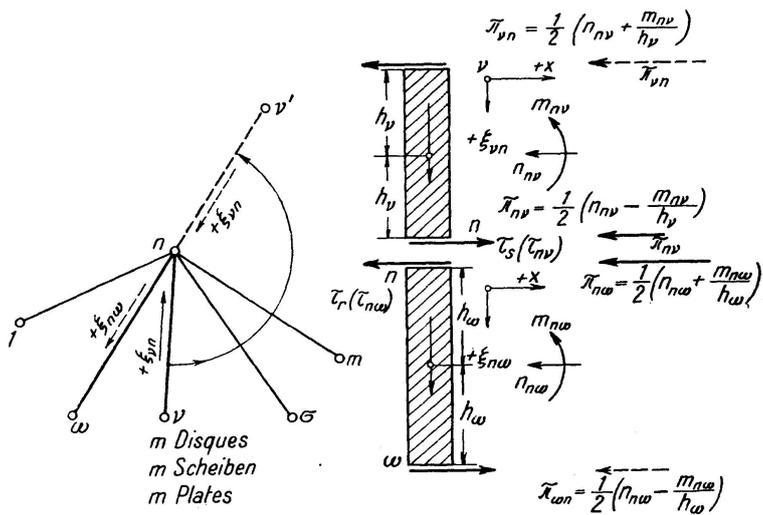


Fig. 5

Diese Ergebnisse stimmen mit den genauen mit Hilfe der Airy'schen Spannungsfunktion gewonnenen Werten gut überein.

C. Die Kontinuitätsbedingungen.

Führt man um einen beliebigen Knoten, z. B. um 2' der Fig. 7a einen Ringschnitt t mit unendlich kleinem Durchmesser, so wird für jede Scheibe eine Schubspannung τ und eine Querbelastung p frei, welche sich am übrigbleibenden Knotenfragment das Gleichgewicht halten müssen. Da die innerhalb des Ringschnittes liegende Fläche f unendlich klein von 2. Ordnung ist, wird die Kraft $f \cdot \sigma_x$ ebenfalls von derselben Ordnung unendlich klein, so daß die Gleichgewichtsbedingung gegen Verschiebung parallel zur Knotenlinie in differenzierter Form

$$\sum_{\sigma=1}^{\sigma=m} \tau'_{n\sigma} b_{\sigma} = 0 \quad (27)$$

lautet, wenn in dem betreffenden Knoten m Scheiben mit den Breiten b_{σ} ($\sigma = 1, 2, 3, \dots, m$) zusammenstoßen. Wir wählen nun für jede Scheibe des Falwerkes eine bestimmte Richtung, nach welcher in Hinkunft für die einzelnen Scheiben die positiven Werte der ξ in Gl. (26) gezählt werden sollen (Fig. 5). Die mit der dazugehörigen Breite b_{ω} multiplizierte 1. Ableitung der Schubspannung der Scheibe $n\omega$ bei n ergibt sich nach Gl. (12a) zu

$$\begin{aligned} b_{\omega} \tau'_{n\omega} = & -\frac{h_{\omega} b_{\omega} E_{\omega}}{3} (2 \varepsilon''_n + \varepsilon''_{\omega}) - \frac{h_{\omega}}{3 m_{\omega}} (2 p''_{n\omega} + p''_{\omega n}) - \frac{1}{2 h_{\omega}} (p_{n\omega} - p_{\omega n}) - \\ & - \frac{1}{2} \left(n'_{n\omega} + \frac{m'_{n\omega}}{h_{\omega}} \right) - g_v^{(\omega)}. \end{aligned} \quad (28)$$

Hierbei mußte in Übereinstimmung mit Fig. 3a die obere der beiden Gl. (12) benutzt werden, da die in Frage kommende Schubspannung $\tau_{n\omega}$ ebenso wie in Fig. 3a das τ_r auf der, der Pfeilspitze abgewendeten Seite der positiven Durchbiegungsrichtung liegt. Handelt es sich hingegen um eine Scheibe nv , deren positive Durchbiegungsrichtung ξ_{vn} zum Sammelknoten n gerichtet ist, so ergibt sich jetzt das an n grenzende, mit b_v vervielfachte τ'_{nv} nach Gl. (12b) zu

$$\begin{aligned} b_v \tau'_{nv} = & \frac{h_v b_v E_v}{3} (\varepsilon''_v + 2 \varepsilon''_n) + \frac{h_v}{3 m_v} (p''_{vn} + 2 p''_{nv}) + \frac{1}{2 h_v} (p_{nv} - p_{vn}) - \\ & + \frac{1}{2} \left(n'_{nv} - \frac{m'_{nv}}{h_v} \right) - g_v^{(v)}. \end{aligned} \quad (29)$$

Klappt man nun alle im Knoten n zusammenlaufenden Scheiben so in eine Ebene, daß sodann alle Pfeilspitzen der positiven ξ -Vektoren nach ein und derselben Richtung weisen, so werden die durch den Ringschnitt freigemachten, an den Scheibenelementen angreifenden $\tau_{n\omega}$ der Scheiben $n\omega$ mit vom Knoten weisenden positiven ξ -Richtungen nach der einen und die τ_{nv} der Scheiben mit zum Knoten weisenden positiven ξ -Richtungen nach der anderen Seite gerichtet sein (Fig. 5). Bei der nun folgenden Substitution der $\tau_{n\omega}$ der Gl. (28) und Gl. (29) in die Bedingung (27) muß also bei einer von den beiden letzteren das Vorzeichen verkehrt werden, so daß zwischen den Indices v und ω nicht mehr unterschieden zu werden braucht. Wir erhalten demnach

$$\begin{aligned}
& 2 \varepsilon_n'' \sum_{\sigma=1}^{\sigma=m} h_{\sigma} b_{\sigma} E_{\sigma} + \sum_{\sigma=1}^{\sigma=m} h_{\sigma} b_{\sigma} E_{\sigma} \varepsilon_{\sigma}'' = \\
& = - \sum_{\sigma=1}^{\sigma=m} \frac{h_{\sigma}}{m_{\sigma}} (2 p_{n\sigma}'' + p_{\sigma n}'') - \frac{3}{2} \sum_{\sigma=1}^{\sigma=m} \frac{1}{h_{\sigma}} (p_{n\sigma} - p_{\sigma n}) + \\
& + 3 \sum_{\sigma=1}^{\sigma=m} \frac{1}{2} \left(n'_{n\sigma} + \frac{m'_{n\sigma}}{h_{\sigma}} \right) + 3 \sum_{\sigma=1}^{\sigma=m} g_v^{(\sigma)},
\end{aligned} \tag{30}$$

wobei ε_n die bezogene Dehnung am Knoten n des faltwerkes und $p_{n\sigma}$ bzw. $p_{\sigma n}$ die Querbelastung der Scheibe $n\sigma$ an deren Rand n bzw. σ bedeutet. Ersetzt man die Belastungen m_{rs} und n_{rs} einer jeden Scheibe durch zwei in deren Rändern r und s wirkenden Kräfte π_{rs} und π_{sr} , so stellen die einzelnen Summanden des dritten Gliedes der rechten Seite von Gl. (30) diejenigen dieser Ersatzkräfte π dar, die in den dem Sammelknoten n anliegenden Scheibenkanten angreifen (Fig. 5). Die g_v sind dann positiv, wenn sie

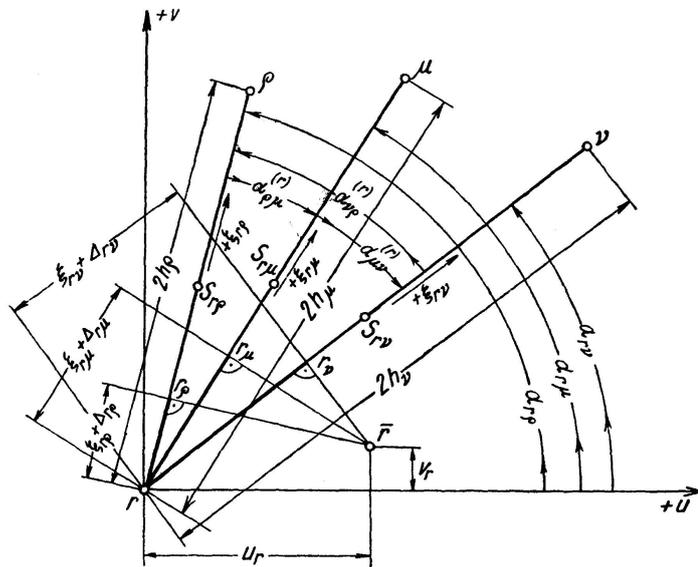


Fig. 6

mit der ξ -Achse gleichgerichtet sind. Man kann aber die Massenkräfte g_v näherungsweise auch so erfassen, daß man sie, ähnlich wie bei einem Fachwerk das Eigengewicht der einzelnen Stäbe, auf die Knoten verhältnismäßig aufteilt. Der im Verlauf dieser Entwicklung notwendig gewesene Unterschied zwischen Scheiben mit zum und mit vom Sammelknoten n weisender positiver ξ -Richtung fällt also bei der Gl. (30) wieder weg. Da die bezogene Dehnung ε_n des gemeinsamen Knotens n auch jeder von n ausgehenden Scheibe angehört, drückt die Gl. (30) den bezüglich der Längsdehnung ε_n vorhandenen punktwisen Zusammenhang längs der Knotenlinie n aus. Wir wollen sie daher Kontinuitätsbedingung 1. Art nennen. Für jedes faltwerk besteht für jede Knotenlinie eine solche Differentialgleichung.

Führt man längs jeder Knotenlinie unendlich enge röhrenförmige Ringschnitte (Fig. 7a), so zerfällt das faltwerk in seine einzelnen Scheiben, die sich dann auf Grund der auf sie einwirkenden Belastungen und Spannungen

p_r, p_s, m, n, g_v und τ in ihren Ebenen entsprechend den Gl. (16a), (16b) und (26) frei verformen können (Fig. 3a). So werden sich z. B. die rückwärtigen, d. h. die den Pfeilspitzen der positiven ξ -Vektoren abgewendeten Ränder der vom Knoten r ausgehenden Scheiben r_ϱ, r_μ, r_ν usw. von r nach r_ϱ, r_μ, r_ν usw. um $\xi_{r_\varrho} + \Delta_{r_\varrho}; \xi_{r_\mu} + \Delta_{r_\mu}; \xi_{r_\nu} + \Delta_{r_\nu}$ usw. verschoben, so daß der Knoten r auseinanderklafft (Fig. 6). Da infolge der großen Schlankheit der beiden Verhältnisse $\frac{b}{2h}$ und $\frac{b}{L}$ der Widerstand, den eine im obigen Sinne freigelegten Scheibe gegen senkrecht zu ihrer Ebene gerichtete Kräfte entgegengesetzt, äußerst gering ist, können die Ränder r_ϱ, r_μ und r_ν senkrecht zu ihren zugehörigen Scheibenebenen längs der Normalen $r_\varrho \bar{r}, r_\mu \bar{r}, r_\nu \bar{r}$ bewegt werden, ohne daß dadurch neue Zwänge entstehen. Zufolge der Kontinuitätsbedingung 1. Art liegen die Randpunkte r_ϱ, r_μ, r_ν und daher auch die Bewegungsnormalen $r_\varrho \bar{r}, r_\mu \bar{r}, r_\nu \bar{r}$ in einer zur Knotenlinie senkrecht stehenden Ebene. Verhalten sich nun die Verschiebungen $\xi_{r_\varrho} + \Delta_{r_\varrho}, \xi_{r_\mu} + \Delta_{r_\mu}, \xi_{r_\nu} + \Delta_{r_\nu}$ zueinander so, daß diese Normalen alle durch ein und denselben Punkt \bar{r} gehen, so ist das Klaffen des Knotens wieder aufgehoben und der Tragwerkszusammenhang auch in der zur Längsachse senkrechten Richtung punktweise wieder hergestellt, wobei \bar{r} diejenige Stelle ist, an welcher sich der Knoten r nach erfolgter Verformung befindet. Damit haben wir die Kontinuitätsbedingung 2. Art formuliert. Legt man nun durch r ein Koordinatensystem u, v und projiziert die auf dieses bezogenen Koordinaten u_r, v_r des Punktes \bar{r} senkrecht auf 3 von r ausgehende Scheiben, so erhalten wir die 3 Gleichungen

$$u_r \cos \alpha_{r_\varrho} + v_r \sin \alpha_{r_\varrho} = \xi_{r_\varrho} + \Delta_{r_\varrho} \quad (31a)$$

$$u_r \cos \alpha_{r_\mu} + v_r \sin \alpha_{r_\mu} = \xi_{r_\mu} + \Delta_{r_\mu} \quad (31b)$$

$$u_r \cos \alpha_{r_\nu} + v_r \sin \alpha_{r_\nu} = \xi_{r_\nu} + \Delta_{r_\nu} \quad (\text{Abb. 6}). \quad (31c)$$

Bestimmt man aus zwei von diesen u_r und v_r und setzt diese Werte in die dritte der obigen Gleichungen ein, so ergibt sich

$$(\xi_{r_\varrho} + \Delta_{r_\varrho}) \sin \alpha_{\mu\nu}^{(r)} + (\xi_{r_\mu} + \Delta_{r_\mu}) \sin \alpha_{\nu\varrho}^{(r)} + (\xi_{r_\nu} + \Delta_{r_\nu}) \sin \alpha_{\varrho\mu}^{(r)} = 0, \quad (32)$$

worin die Indices ϱ, μ und ν zyklisch gruppiert sind. Für jeden Knoten, in welchem m Scheiben zusammenstoßen, bestehen $m - 2$ solcher Gleichungen. Dabei werden die Winkel $\alpha^{(r)}$ von positivem ξ -Vektor zu positivem ξ -Vektor gezählt. Das Vorzeichen ist durch die Reihenfolge der unteren Indices festgelegt. Damit ist die Kontinuitätsbedingung 2. Art in ihre analytische Form gebracht.

D. Die Elastizitätsgleichungen.

Wir betrachten ein Faltwerk mit r Knoten und s Scheiben. Ein solches hat r unbekannte Funktionen ε und $2s$ unbekannte Querbelastungsfunktionen p . Differentiert man die Gl. (32) zwei mal nach x und setzt in die so erhaltene Beziehung die Gl. (26) und die gleichfalls zwei mal differenzierte Gl. (16a) und (16b) ein, so folgt

$$\begin{aligned} \sum_1^4 a \varepsilon + \sum_1^6 f p + \sum_1^4 e \varepsilon'' + \sum_1^4 \bar{e} \varepsilon'' + \sum_1^4 g \varepsilon'''' + \sum_1^6 i p'' + \sum_1^6 \bar{i} p'' + \sum_1^6 \bar{j} p'''' + \\ + \sum_1^3 r g_v'' + \sum_1^3 \bar{r} g_v'' + \sum_1^3 s m'_{rs} = 0, \end{aligned} \quad (33)$$

wobei die oberen Summengrenzen die Anzahl der in diesen Summen vorhandenen Summanden angeben. Für jeden Knoten, in welchem m Scheiben zusammenstoßen, bestehen $m-2$ Kontinuitätsbedingungen 2. Art. Es ergeben sich daher auch $2s-2r$ Gl. (33). In diesen haben diejenigen Glieder des homogenen Teiles, welche die höheren Ableitungen der ε und p enthalten, auf die gesamte Rechnung einen bedeutend geringeren Einfluß als die anderen, so daß man sie in manchen Fällen auch vernachlässigen kann. Für die etwas später folgenden Betrachtungen erwähnen wir, daß die Summen mit überstrichenen Beiwerten die Querdehnungszahl m nur im Nenner enthalten. Benützt man für ξ'' statt der ausführlichen Gl. (26) nur die vereinfachte Gl. (26'), so werden die ersten, zweiten, zehnten und elften Glieder nur durch die ξ gebildet, während die durch die Gl. (16a) und (16b) dargestellten Δ die übrigen Bestandteile der Gl. (33) erzeugen. Unterdrückt man die Δ , so ist die Benutzung der genauen Gl. (26) sinnlos, da die darin enthaltenen Zusatzglieder die Rechnung weniger beeinflussen als die Δ selbst.

Stellt man nun durch Auflösen der Gl. (30) nach den ε'' diese als Funktionen der p explizit dar, so wird

$$\varepsilon''_{\sigma} = \frac{3}{2} \sum_1^{2s} l p + \sum_1^{2s} n p'' + \sum_1^s \bar{n} \left(n' + \frac{m'}{h} \right) + \sum_1^s \bar{n} g_v. \quad (34)$$

$$\sigma = 1, 2, 3, \dots, r.$$

Differentiiert man die Gl. (33) zweimal nach x und setzt in diese Beziehungen die Gl. (34) und die aus diesen folgenden vierten und sechsten Ableitungen der ε ein, so erhalten wir weiter die linearen Differentialgleichungen

$$\begin{aligned} \sum_1^{2s} o p + \sum_1^{2s} t p'' + \sum_1^{2s} \bar{t} p'' + \sum_1^{2s} q p'''' + \sum_1^{2s} \bar{q} p'''' + \sum_1^{2s} y p^{VI} + \sum_1^{2s} z n'_{rs} + \sum_1^{2s} \bar{z} m'_{rs} + \\ + \sum_1^{2s} r g_v'''' + \sum_1^{2s} \bar{r} g_v'' + \sum_1^{2s} s m'''_{rs} + \sum_1^{2s} \bar{s} g_v = 0, \end{aligned} \quad (35)$$

in welchen nur mehr die Querbelastungsfunktionen p als Unbekannte vorkommen. Solcher Gleichungen gibt es so viele wie es Gl. (33) gibt, nämlich $2s-2r$. Aus den zu Beginn des Abschnittes C dargelegten Gleichgewichtsbetrachtungen geht hervor, und zwar wieder aus der unendlichen Kleinheit des innerhalb des Ringschnittes liegenden Teiles f der Faltwerksfläche, daß in jeder Knotenlinie für die äußere Belastung und die angrenzenden Querbelastungen p Gleichgewicht gegen Verschieben nach zwei Richtungen punktweise bestehen muß. Es wird also

$$\sum_1^m p \sin \alpha = G_v, \quad (36a)$$

$$\sum_1^m p \cos \alpha = G_h. \quad (36b)$$

Solche Beziehungen gibt es je Knotenlinie zwei, im ganzen also $2r$, so daß zusammen mit den Gl. (35) für die Bestimmung der $2s$ unbekannt Funktionen p $2s-2r+2r=2s$ lineare simultane Differentialgleichungen sechster Ordnung zur Verfügung stehen. Da die Gl. (36) nur die reinen p enthalten, können aus den Gl. (35) und (36) $2r$ von den Funktionen p sehr leicht eliminiert werden, so daß nur mehr $2s-2r$ Unbekannte mit ebenso vielen Beziehungen übrig bleiben, in welchen wir die Elastizitätsgleichungen des Problems gefunden haben. Die Auflösung dieses Systems erfolgt

in fast allen Fällen am zweckmäßigsten mit Hilfe von Fourier'schen Reihen.

Aus den Gl. (30) folgt nun, daß nur der erste Teil der rechten Seite derselben von den Querdehnungen herrührt. Unterdrückt man diesen Einfluß, so verschwindet in Gl. (34) das Glied $\sum n p''$ und es wird

$$\varepsilon''_{\sigma} = \frac{3}{2} \sum_1^{2s} t p + \sum_1^s \bar{n} \left(n'_{rs} + \frac{m'_{rs}}{h} \right) + \sum_1^s \bar{n} g_v. \quad (37)$$

Läßt man die Längenänderungen Δ außer Acht und nimmt entsprechend der Darlegungen auf Seite 150 an Stelle der ausführlichen Gl. (26) die vereinfachte Gl. (26'), so degenerieren die homogenen Teile der Gl. (33) auf ihre beiden ersten Glieder $\sum a \varepsilon + \sum f p^2$). Differenziert man diesen Rest zwei mal nach x und setzt die Gl. (37) ein, so ergibt sich die entsprechende zusammengeschrumpfte Gl. (35) in der Form

$$\sum o p + \sum t p'' + \sum z n'_{rs} + \sum \bar{z} m'_{rs} + \sum \bar{z} g_v + \sum r g_v'''' + \sum \bar{r} g_v'' + \sum s m'_{rs}''' = 0. \quad (37a)$$

Bekanntlich gibt die Annahme $m = \infty$ bei Elastizitätsproblemen bei großen Vereinfachungen sehr gute Näherungslösungen. Wie wir schon auf Seite 150 erwähnt haben, enthalten in den Gl. (33) die Summen mit den überstrichenen Koeffizienten die Querdehnungszahlen nur im Nenner, was von der Tatsache herrührt, daß in den Gl. (16a) und (16b) die m ebenfalls nur im Nenner vorkommen. Es verschwinden also für $m = \infty$ in Gl. (33) die vierten, siebten, achten und zehnten Glieder. Da unter diesen Umständen auch die zweiten Glieder der Gl. (34) Null werden, degenerieren die Gl. (35) zu

$$\sum o p + \sum t p'' + \sum q p'''' + \sum z n'_{rs} + \sum \bar{z} m'_{rs} + \sum \bar{z} g_v + \sum r g_v'''' + \sum \bar{r} g_v'' + \sum s m'_{rs}''' = 0^3) \quad (37b)$$

wodurch die Ziffernberechnung bedeutend ermäßigt wird.

Bei diesen Betrachtungen wurden die Beiwerte der Gl. (33), (34) und (35) nur mit einfachen Buchstaben dargestellt. Die Entwicklung in allgemeinen Zahlen gelingt in einer übersichtlichen Form nur bei einfachen Falwerkssystemen. In den meisten Fällen ist es zweckmäßig, die verschiedenen oben geschilderten Eliminationen und Substitutionen, die zu den Elastizitätsgleichungen führen, jeweils mit den speziellen Zahlen durchzuführen.

Wir betrachten nun drei von einem Knoten r ausgehende Scheiben (Fig. 6). Vernachlässigt man die Längenänderungen Δ und den Einfluß der Schubspannungen auf die Durchbiegungen ξ , so erhält man nach dem vorhin beschriebenen Rechnungsgang die dazugehörige Gl. (33) in der Form

$$\sum a \varepsilon = \frac{\bar{\varepsilon}_{\varrho}}{2 h_{\varrho}} \sin \alpha_{\mu\nu}^{(r)} + \frac{\bar{\varepsilon}_{\mu}}{2 h_{\mu}} \sin \alpha_{\nu\varrho}^{(r)} + \frac{\bar{\varepsilon}_{\nu}}{2 h_{\nu}} \sin \alpha_{\varrho\mu}^{(r)} = 0, \quad (38)$$

wobei $\bar{\varepsilon}_{\varrho} = -\varepsilon_r + \varepsilon_{\varrho}$; $\bar{\varepsilon}_{\mu} = -\varepsilon_r + \varepsilon_{\mu}$; $\bar{\varepsilon}_{\nu} = -\varepsilon_r + \varepsilon_{\nu}$ bedeutet.

Errichtet man in den Punkten ϱ , μ , ν und r zur Zeichenebene lotrecht stehende Gerade und trägt auf diesen von deren Fußpunkten ϱ , μ , ν und r ausgehend ε_{ϱ} , ε_{μ} , ε_{ν} und ε_r auf, so erhalten wir im Raume vier Punkte e_{ϱ} , e_{μ} , e_{ν} , e_r mit den Koordinaten

$$\begin{array}{lll} 2 h_{\varrho} \cos \alpha_{r\varrho}, & 2 h_{\varrho} \sin \alpha_{r\varrho}, & \varepsilon_{\varrho} \\ 2 h_{\mu} \cos \alpha_{r\mu}, & 2 h_{\mu} \sin \alpha_{r\mu}, & \varepsilon_{\mu} \\ 2 h_{\nu} \cos \alpha_{r\nu}, & 2 h_{\nu} \sin \alpha_{r\nu}, & \varepsilon_{\nu} \\ 0 & 0 & \varepsilon_r. \end{array} \quad (39)$$

²⁾ Die Δ können nur dann verschwinden, wenn gleichzeitig $m = \infty$ wird.

³⁾ Das zweite Glied rührt nur vom Schubmodul G her.

Drückt man die Winkel der Sinuse der Gl. (38) als Differenzen der Winkel α_{r0} , $\alpha_{r\mu}$, α_{rv} aus, so läßt sich Gl. (38) in der Form

$$\frac{1}{8 h_0 h_\mu h_\nu} \begin{vmatrix} 2 h_0 \sin \alpha_{r0} & 2 h_0 \cos \alpha_{r0} & \bar{\varepsilon}_0 \\ 2 h_\mu \sin \alpha_{r\mu} & 2 h_\mu \cos \alpha_{r\mu} & \bar{\varepsilon}_\mu \\ 2 h_\nu \sin \alpha_{rv} & 2 h_\nu \cos \alpha_{rv} & \bar{\varepsilon}_\nu \end{vmatrix} = 0 \quad (40)$$

schreiben, die besagt, daß die vier Punkte e_0 , e_μ , e_ν , e_r in einer Ebene liegen. Da die Δ nur dann verschwinden können, wenn $m = \infty$ wird, so sind nach den Gl. (10) die σ_x proportional den ε . Es ergibt sich also folgender Satz:

„Die Verteilung der Längsspannungen σ_x über drei von einem Knoten ausgehenden Scheiben ist eine ebene, wenn die Längenänderungen Δ , der Einfluß der Querdehnungszahlen m und der Einfluß der Querkräfte auf die Durchbiegungen vernachlässigt werden.“

So ist z. B. in Fig. 2a die Verteilung der σ_x über die Knoten 3, n , 2, 1 und 3, $n+1$, n , 2 je eine ebene. Da sich diese beiden Gruppen in n , 3, 2 überdecken, folgt, daß die ebene Spannungsverteilung auch über $n+1$, n , 3, 2 und 1 reicht. Führt man diese Betrachtung systematisch zu Ende, so ergibt sich, daß für alle Faltwerksteile, die im Querschnitt die Figur eines stabilen Fachwerkes als Grundnetz aufweisen, die Verteilung der Längsspannung eine ebene ist. Für Faltwerksteile mit rahmenartigem Querschnitt trifft dies jedoch nicht mehr zu. So ist z. B. in Fig. 1 die Verteilung über 1, 2, 2', 1' und über 3, 4, 4', 3' je für sich linear, woraus jedoch noch nicht folgt, daß dies über den ganzen Querschnitt der Fall sein muß. Die Verteilung nimmt vielmehr die Form einer Regelfläche an, für welche die Ober- und Untergurtslinie die Leitgeraden sind. Werden die Längenänderungen Δ und der Einfluß der Q auf die ξ nicht unterdrückt, so ist die Verteilung der Längsspannung nur in einzelnen besonderen Fällen eine ebene.

Haben wir eine im Sinne des vorigen Lehrsatzes ebene Verteilung vor uns, so kann man die Längsspannungen in der Form $\sigma_x = \alpha \varepsilon_1 + \beta \varepsilon_2 + \gamma \varepsilon_3$ darstellen, wobei α , β , γ Funktionen der Querschnittsgrößen und ε_1 , ε_2 , ε_3 drei von den unbekanntem bezogenen Verkürzungen der Knotenlinien sind. Die Produkte $\sigma_x \cdot df$ bilden ein räumliches System paralleler Kräfte, die sich mit dem am Tragwerksabschnitt angreifenden Lasten und Auflagerreaktionen das Gleichgewicht halten müssen. Daraus folgen drei Bedingungen, die für die Bestimmung der ε_1 , ε_2 , ε_3 hinreichen. Man kann also in diesem Falle die Längsspannungen und Längsdehnungen und wegen der Gl. (26'') auch die Achsendurchbiegungen ξ aus reinen Gleichgewichtsbetrachtungen ohne Hinzuziehung der Elastizitätsgleichungen (35) bestimmen.

Wegen Gl. (26'') lassen sich nun auch alle ξ in der Form

$$\xi_0 = \bar{\alpha} \varepsilon_1 + \bar{\beta} \varepsilon_2 + \bar{\gamma} \varepsilon_3$$

ausdrücken, d. h. die Verformung eines jeden Querschnittes ist, so wie die infinitesimale Bewegung einer undeformierbaren Scheibe durch drei allgemeine Koordinaten bestimmt. Dies trifft nur zu, wenn jeder Querschnitt für sich starr bleibt. Da alle Δ gleich Null sind, ist das nur möglich, wenn das Grundnetz des Faltwerkes die Figur eines unverschieblichen Fachwerkes aufweist. In Verbindung mit den obigen Erläuterungen ergibt sich nun daraus, daß dies die notwendige und hinreichende Bedingung für das Eintreten einer ebenen Verteilung der Längsspannungen und Längsdehnungen bei den oben festgelegten Vernachlässigungen ist.

Sind alle $\Delta = 0$ und verschwindet außerdem der Einfluß der Q auf die Durchbiegungen ξ , so degenerieren, wie dies bereits auf Seite 151 gezeigt wurde, die Gl. (33) nicht nur zu $\Sigma a\varepsilon + \Sigma fp^4$, sondern zu den in ε homogenen Gleichungen $\Sigma a\varepsilon = 0^4$. Da sich dann alle ε eines Querschnittes durch 3 von ihnen darstellen lassen, sind von diesen $2s - 2r$ Gleichungen ($\Sigma a\varepsilon = 0^4$) auch nur 3 voneinander abhängig. Infolge des in den Gl. (30) ($m = \infty$) enthaltenen Zusammenhanges zwischen den ε und den p , sind auch die zu den $\Sigma a\varepsilon = 0^4$ gehörigen $2s - 2r$ Gleichungen $\Sigma op = 0^4$ ebenfalls nicht alle voneinander unabhängig, so daß diese für die Bestimmung der $2s - 2r$ unbekanntenen Querbelastungen nicht mehr ausreichen. In solchen Fällen ist ein Teil der p nicht nur statisch unbestimmt, sondern überhaupt unbestimmt. Diese Erscheinung erklärt sich aus der Vernachlässigung der Δ und des Einflusses der Q auf die ξ . Man entzieht eben dadurch der gesamten Deduktion die elastizitätstheoretische Unterlage, welche bekanntlich erst die Ermittlung aller p ermöglicht. Es bleiben nur die rein statischen Bedingungen übrig, die allein nicht hinreichen. Da die τ durch die Gl. (12a) und (12b) mit den p und den ε zusammenhängen, sind dann auch die τ in derselben Weise unbestimmt. Setzt man die im obigen Sinne auf rein statische Weise bestimmten ε in die Gl. (30) ein, so erhält man die bestimmbareren p meist bequemer als aus den, durch Grenzübergang entstandenen Gleichungen $\Sigma op = 0^4$. Die so erhaltenen Bedingungen sind aber dann auch nicht alle voneinander unabhängig, so daß aus ihnen ebenfalls nicht alle p bestimmt werden können.

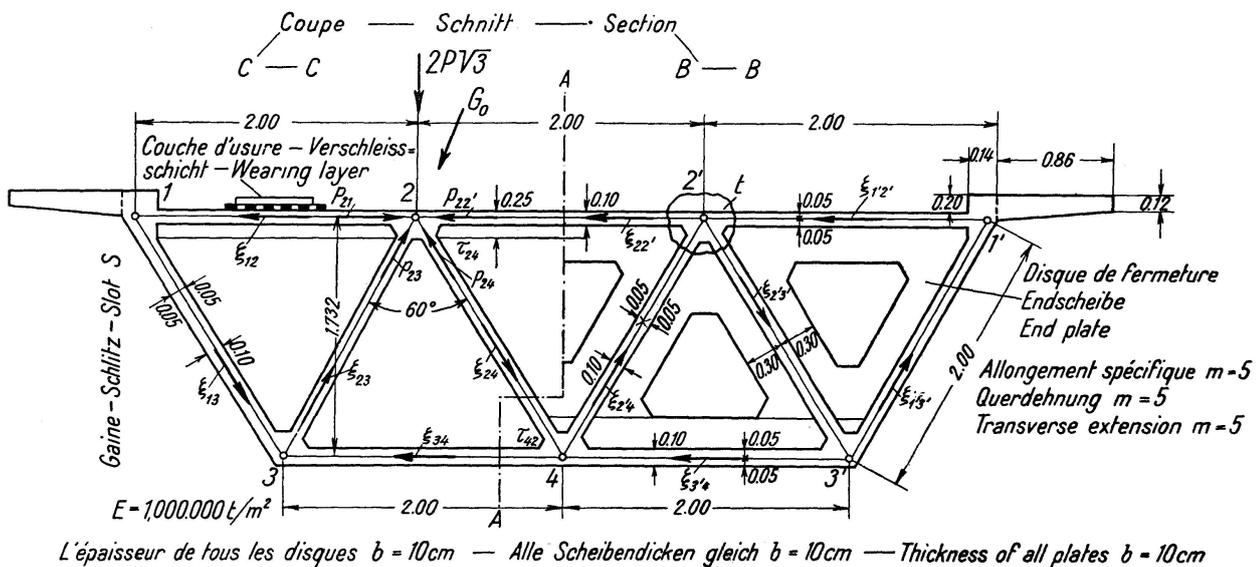


Fig. 7 a

Da die p nur untergeordnete Spannungen erzeugen, fällt der Umstand, daß man sie in manchen Fällen nicht alle bestimmen kann, nicht sehr schwer ins Gewicht. Die damit zusammenhängende Unbestimmtheit der τ wirkt sich aber sehr unangenehm aus, da dadurch die gesamte Schubspannungsverteilung auf den Querschnitt ebenfalls nicht bestimmbar ist. Diese kann man auf Grund der vorangegangenen Betrachtungen vielmehr nur dann ermitteln,

⁴) Die Belastungsglieder sind der Einfachheit halber nicht mit angeschrieben.

wenn die Längenänderungen Δ oder der Einfluß der Q auf die Durchbiegungen ξ oder aber beide Umstände nicht unterdrückt.

Kann man die Längsspannungen σ_x auf einen von der Auffassung als Faltwerk unabhängigen Weg bestimmen, wie dies z. B. bei einer ebenen Spannungsverteilung zutrifft, so lassen sich die von der Torsion und der Querkraftbiegung herrührenden Schubspannungen mit Hilfe der Bredt'schen Formeln auf bekannte Weise ermitteln, indem man die Hohlträger als mehrzellige Querschnitte auffaßt. Bei diesen Berechnungen wird aber die Unveränderlichkeit der Querschnitte vorausgesetzt. Ebenso bleibt die Art und Weise, wie die Torsions- und Biegemomente und die Querkräfte in die einzelnen Querschnitte eingetragen werden, unberücksichtigt. Dieser Umstand sowie die Verformung der Querschnitte spielt aber bei den Querschnitten

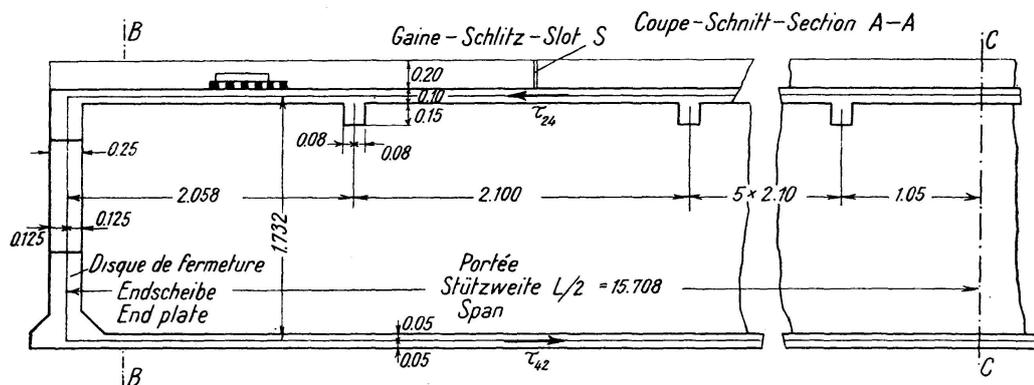


Fig. 7 b

mit großer Breite und geringer Höhe schon eine Rolle. Nachdem man auf diese Weise die Schubspannungen ermittelt hat, ergeben sich aus den Gl. (8c) und (36a, b) die p . Dabei ist zu berücksichtigen, daß die Querkräfte der einzelnen Scheiben in einem Querschnitt mit der in diesem wirkenden gesamten Querkraft des Gesamtsystems ein Gleichgewichtssystem bilden müssen. Nachdem bekanntlich ein solches drei Bedingungen erfüllen muß, sind drei von den Gl. (8c) voneinander abhängig und dürfen bei der Auszählung nicht berücksichtigt werden. So stehen z. B. bei dem Tragwerk der Fig. 7a zunächst 11 Gleichungen (8c) und 14 Gl. (36a, b), insgesamt also 25 Gleichungen den 22 unbekanntem p gegenüber. Da von den Gl. (8c) jedoch 3 voneinander abhängig sind, sind von den 25 Bedingungen 3 zu streichen, so daß 22 Unbekannten 22 Gleichungen gegenüber stehen⁵⁾.

E. Anwendung.

a) 1. Beispiel.

Wir werden für den in Fig. (7a) und (7b) mit seinen Maßen und Elastizitätskonstanten dargestellten Hohlträger die Berechnung für eine längs der Knotenlinie 2 angreifende, zur Symmetrieachse $C-C$ symmetrischen Linienlast durchführen. Die Beteiligung der beiden Kragarme an der Faltwerkswirkung wird durch Anordnung der Schlitze s unterbunden. Die querlaufenden Rippen der oberen Platte, welche diese knicksteif machen und in annähernd quadratische Felder unterteilen, haben nur auf die zu den Scheibenachsen senkrecht laufenden Dehnungen Δ einen geringen Einfluß, den wir

⁵⁾ Bezüglich der Auszählung der Unbekannten siehe auch Abschnitt E.

ohne weiteres vernachlässigen können. Die Anzahl der unbekannt p beträgt 22. Diese lassen sich aber mit Hilfe der Gl. (36) auf $2s - 2r = 22 - 14 = 8$ verringern. Um die Rechnung zu vereinfachen, machen wir von der Symmetrie des Tragwerkes um dessen Achse $A-A$ Gebrauch und zerlegen die Belastung $2P\sqrt{3}$ entsprechend der Fig. (8b) und (8c) in einen symmetrischen Teil $+P\sqrt{3}$, $+P\sqrt{3}$ und in einen antisymmetrischen Teil $-P\sqrt{3}$, $+P\sqrt{3}$. Da das Kräftespiel für den ersten Fall um $I-I$ spiegelgleich und im zweiten Fall um die Achse $I'-I'$ gegenspiegelgleich ist, treten für jeden der beiden Lastfälle nur mehr 11 unbekannte Funktionen p auf. Benutzen wir hier die Gl. (36a) und (36b), so kann man von diesen Querbelastungen je Belastungsfall 7 weitere eliminieren, so daß nur mehr die in Fig. (8b) und (8c) stark ausgezogenen p als unbekannte Funktionen je Lastfall übrig bleiben, d. h. die 8 Elastizitätsgleichungen zerfallen in zwei je viergliedrige Gruppen.

Die stark ausgezogenen p stellen die Richtung der Wirkung dar, die die Scheiben auf die Knoten ausüben. Die positiven ξ -Richtungen sind in Fig. (7a) angegeben.

Wir behandeln zuerst den symmetrischen Lastfall. Da für diesen auch die ε um $I-I$ symmetrisch sind, lauten hiefür die nach Gl. (30) gebildeten Kontinuitätsbedingungen 1. Art mit

$$\beta_1 = \frac{1}{mbE} \quad \text{und} \quad \beta_2 = \frac{3}{2h^2bE}$$

$$4\varepsilon_1'' + \varepsilon_2'' + \varepsilon_3'' = -\beta_1(p_{21}'' + p_{34}'') - \beta_2(-p_{21} - p_{34}) \quad (41a)$$

$$\varepsilon_1'' + 9\varepsilon_2'' + \varepsilon_3'' + \varepsilon_4'' = -\beta_1(4P'' + 2p_{21}'' + 3p_{22}'', -p_{34}'') - \beta_2(2P + p_{21} + p_{34}) \quad (41b)$$

$$\varepsilon_1'' + \varepsilon_2'' + 6\varepsilon_3'' + \varepsilon_4'' = -\beta_1(P'' - p_{21}'' + p_{22}'', + 2p_{34}'' + p_{43}'') - \beta_2(-P + p_{21} - p_{22}'', + p_{34} - p_{43}) \quad (41c)$$

$$\varepsilon_2'' + \varepsilon_3'' + 4\varepsilon_4'' = -\beta_1(P'' + p_{21}'' - p_{22}'', + p_{34}'' + 2p_{43}'') - \beta_2(-P - p_{21} + p_{22}'', - p_{34} + p_{43}). \quad (41d)$$

Löst man diese nach ε'' auf, so wird

$$4 \cdot 186 \varepsilon_1'' = -\beta_1(204p_{21}'' - 105p_{22}'', + 168p_{34}'' - 6p_{43}'' - 99P'') - \beta_2(-264p_{21} + 45p_{22}'', - 264p_{34} + 45p_{43} - 21P) \quad (42a)$$

$$4 \cdot 186 \varepsilon_2'' = -\beta_1(144p_{21}'' + 276p_{22}'', - 144p_{34}'' - 48p_{43}'' + 324P'') - \beta_2(120p_{21} - 12p_{22}'', + 120p_{34} - 12p_{43} + 204P) \quad (42b)$$

$$4 \cdot 186 \varepsilon_3'' = -\beta_1(-216p_{21}'' + 144p_{22}'', + 216p_{34}'' + 72p_{43}'' + 72P'') - \beta_2(192p_{21} - 168p_{22}'', + 192p_{34} - 168p_{43} - 120P) \quad (42c)$$

$$4 \cdot 186 \varepsilon_4'' = -\beta_1(204p_{21}'' - 291p_{22}'', + 168p_{34}'' + 366p_{43}'' + 87P'') - \beta_2(-264p_{21} + 231p_{22}'', - 264p_{34} + 231p_{43} - 207P). \quad (42d)$$

Da alle Winkel gleich 60° sind und außerdem $\xi_{24} = -\xi_{2'4}$ und $\Delta_{42} = \Delta_{42'}$ ist, lauten die nach Gl. (32) gebildeten Kontinuitätsgleichungen 2. Art

$$\xi_{13} + \xi_{34} + \xi_{32} - \Delta_{31} - \Delta_{34} + \Delta_{32} = 0 \quad \text{Knoten 3} \quad (43a)$$

$$\xi_{24} + \xi_{23} - \Delta_{22'} + \Delta_{24} - \Delta_{23} + \xi_{22'} = 0 \quad \text{Knoten 2 (342')} \quad (43b)$$

$$\xi_{24} + \xi_{12} + \xi_{23} + \Delta_{24} + \Delta_{21} - \Delta_{23} = 0 \quad \text{Knoten 2 (134)} \quad (43c)$$

$$\xi_{34} + \Delta_{43} = 0, \quad \text{Knoten 4} \quad (43d)$$

worin $\xi_{22}' = 0$ zu setzen ist. Wir wollen nun zunächst wohl die Längenänderungen Δ , nicht aber den Einfluß der Querkräfte Q auf die Durchbiegungen ξ berücksichtigen. Außerdem nehmen wir für die Achsverformung ξ die vereinfachte Gl. (26'')⁶). Leitet man Gl. (43a), b, c, d) vier mal nach x ab und setzt in sie die vier mal differenzierten Gl. (16a, b) und die zwei mal differenzierten Gl. (26'') ein, so wird

$$(-\varepsilon_1'' + \varepsilon_2'' + \varepsilon_3'' - \varepsilon_4'') + \beta_3(\varepsilon_1'''' - \varepsilon_2'''' + 3\varepsilon_3'''' + \varepsilon_4''') + \beta_4(7\varepsilon_1^{VI} - 7\varepsilon_2^{VI} + 9\varepsilon_3^{VI} + 7\varepsilon_4^{VI}) + \\ + \beta_5(p_{21}'''' - p_{22'}'''' + 9p_{34}'''' + p_{43}'''' - P''''') + \beta_6(7p_{21}^{VI} - 7p_{22'}^{VI} + 27p_{34}^{VI} + 7p_{43}^{VI} - 7P^{VI}) = 0 \quad (44a)$$

$$(-\varepsilon_3'' + \varepsilon_4'' + 2h\xi_{22}''') + \beta_3(3\varepsilon_2'''' + \varepsilon_3'''' - \varepsilon_4'''' + \varepsilon_4''') + \beta_4(9\varepsilon_2^{VI} + 7\varepsilon_3^{VI} - 7\varepsilon_4^{VI} + 7\varepsilon_{2'}^{VI}) + \\ + \beta_5(-6p_{21}'''' + 9p_{22'}'''' - p_{34}'''' + p_{22'}'''' - p_{42}''') + \beta_6(-18p_{21}^{VI} + 27p_{22'}^{VI} - 7p_{2'}^{VI} - 7p_{42}^{VI} - 7p_{34}^{VI}) = 0 \quad (44b)$$

$$(\varepsilon_1'' - \varepsilon_2'' - \varepsilon_3'' - \varepsilon_4'') + \beta_3(-\varepsilon_1'''' - 3\varepsilon_2'''' + \varepsilon_3'''' - \varepsilon_4''') + \beta_4(-7\varepsilon_1^{VI} - 9\varepsilon_2^{VI} + 7\varepsilon_3^{VI} - 7\varepsilon_4^{VI}) + \\ + \beta_5(-9p_{21}'''' + 6p_{22'}'''' - p_{34}'''' - p_{42}''') + \beta_6(-27p_{21}^{VI} + 18p_{22'}^{VI} - 7p_{34}^{VI} - 7p_{42}^{VI}) = 0 \quad (44c)$$

$$(\varepsilon_3'' - \varepsilon_4'') + \beta_3(-\varepsilon_3'''' - 3\varepsilon_4''') + \beta_4(-7\varepsilon_3^{VI} - 9\varepsilon_4^{VI}) + \\ + \beta_5(-p_{34}'''' - 3p_{43}''') + \beta_6(-7p_{34}^{VI} - 9p_{43}^{VI}) = 0, \quad (44d)$$

wenn $\beta_3 = \frac{h^2}{2m}$; $\beta_4 = \frac{h^4}{24}$; $\beta_5 = -\frac{h^2}{2bE}\left(1 - \frac{1}{m^2}\right)$; $\beta_6 = \frac{h^4}{24mbE}$

und $\xi_{22'} = 0$; $\varepsilon_2 = \varepsilon_{2'}$; $p_{22'} = p_{2'2}$; $p_{42} = 0$ ist.

Bildet man durch Differentiation der Gl. (42) die ε'''' und ε^{VI} , setzt diese und die ε'' in die Gl. (44) ein und addiert die erste zur dritten und die zweite zur vierten Gleichung, so ergeben sich die folgenden vier simultanen, linearen, nicht homogenen Differentialgleichungen sechster Ordnung

$$-108 \frac{h^2}{m} p_{21}'' + \left(1452 - \frac{1128}{m^2}\right) h^4 p_{21}'''' - 190 \frac{h^6}{m} p_{21}^{VI} \\ + 234 \frac{h^2}{m} p_{22'}'' + \left(-852 + \frac{1062}{m^2}\right) h^4 p_{22'}'''' + 214,5 \frac{h^6}{m} p_{22'}^{VI} \\ + 1322 \frac{h^2}{m} p_{34}'' + \left(-1452 + \frac{1128}{m^2}\right) h^4 p_{34}'''' + 189,25 \frac{h^6}{m} p_{34}^{VI} \\ - 234 \frac{h^2}{m} p_{43}'' + \left(-108 + \frac{66}{m^2}\right) h^4 p_{43}'''' + 310 \frac{h^6}{m} p_{43}^{VI} = \\ = -486 \frac{h^2}{m} P'' + \left(-348,125 - \frac{66}{m^2}\right) h^4 P'''' + 24,5 \frac{h^6}{m} P^{VI} \quad (45a)$$

$$-576 \frac{h^2}{m} p_{21}'' + \left(924 - \frac{1156}{m^2}\right) h^4 p_{21}'''' - 259 \frac{h^6}{m} p_{21}^{VI} \\ 345 \frac{h^2}{m} p_{22'}'' + \left(-1738,5 - \frac{34,725}{m^2}\right) h^4 p_{22'}'''' + 338 \frac{h^6}{m} p_{22'}^{VI} \\ - 626 \frac{h^2}{m} p_{34}'' + \left(180 - \frac{60}{m^2}\right) h^4 p_{34}'''' - 113 \frac{h^6}{m} p_{34}^{VI} \\ 364 \frac{h^2}{m} p_{43}'' + \left(679 - \frac{144}{m^2}\right) h^4 p_{43}'''' - 1,5 \frac{h^6}{m} p_{43}^{VI} = \\ = 616,5 \frac{h^2}{m} P'' + \left(305,5 + \frac{237}{m^2}\right) h^4 P'''' + 79 \frac{h^6}{m} P^{VI} \quad (45b)$$

⁶) Da Massenkräfte nicht vorhanden sind, lautet diese einfach $\xi'' = \frac{1}{2h}(-\varepsilon_r + \varepsilon_s)$.

$$\begin{aligned}
& 630 p_{21} - 375 \frac{h^2}{m} p_{21}'' + \left(1550,25 - \frac{1410}{m^2} \right) h^4 p_{21}'''' - 300,5 \frac{h^6}{m} p_{21}^{VI} \\
& - 342 p_{22'} + 561 \frac{h^2}{m} p_{22'}'' + \left(-1022,25 + \frac{1180}{m^2} \right) h^4 p_{22'}'''' + 252 \frac{h^6}{m} p_{22'}^{VI} \\
& 630 p_{34} - 267 \frac{h^2}{m} p_{34}'' + \left(62,25 - \frac{264}{m^2} \right) h^4 p_{34}'''' - 118 \frac{h^6}{m} p_{34}^{VI} \\
& - 342 p_{43} - 15 \frac{h^2}{m} p_{43}'' + \left(93,75 + \frac{36}{m^2} \right) h^4 p_{43}'''' + 33 \frac{h^6}{m} p_{43}^{VI} \\
= & - 234 P - 393 \frac{h^2}{m} P'' + \left(-33,75 - \frac{222}{m^2} \right) h^4 P'''' - 48,5 \frac{h^6}{m} P^{VI} \quad (45c)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
- 342 p_{21} - 15 \frac{h^2}{m} p_{21}'' + \left(-32,25 + \frac{99}{m^2} \right) h^4 p_{21}'''' + 6,75 \frac{h^6}{m} p_{21}^{VI} \\
299,25 p_{22'} - 20,625 \frac{h^2}{m} p_{22'}'' + \left(28,21875 - \frac{182,25}{m^2} \right) h^4 p_{22'}'''' - 33,5625 \frac{h^6}{m} p_{22'}^{VI} \\
- 342 p_{34} - 299 \frac{h^2}{m} p_{34}'' + \left(153,75 - \frac{6}{m^2} \right) h^4 p_{34}'''' - 45,5 \frac{h^6}{m} p_{34}^{VI} \quad (45d) \\
299,25 p_{43} + 343,875 \frac{h^2}{m} p_{43}'' + \left(586,21875 - \frac{265,5}{m^2} \right) h^4 p_{43}'''' - 60,375 \frac{h^6}{m} p_{43}^{VI} \\
= 65,25 P + 270,375 \frac{h^2}{m} P'' + \left(84,46875 - \frac{83,25}{m^2} \right) h^4 P'''' - 26,8125 \frac{h^6}{m} P^{VI},
\end{aligned}$$

welche für jede in den Knotenlinien 2 und 2' angreifende, zur Achse I—I symmetrischen Linienlast $+P\sqrt{3}$, $+P\sqrt{3}$ gelten.

Für die antisymmetrische Belastung ist das Querbelastungsschema bis auf den Wert von p_{42} , welcher jetzt statt Null gleich $-2p_{43}$ wird, das gleiche wie bei der symmetrischen Belastung, wie dies in den Fig. (8b) und (8c) dargestellt ist. Da außerdem $\varepsilon_4 = 0$ wird, ergeben sich für diesen Belastungsfall die Kontinuitätsbedingungen 1. Art zu

$$4 \varepsilon_1'' + \varepsilon_2'' + \varepsilon_3'' = -\beta_1 (p_{21}'' + p_{34}'') - \beta_2 (-p_{21} - p_{34}) \quad (46a)$$

$$\begin{aligned}
\varepsilon_1'' + 7 \varepsilon_2'' + \varepsilon_3'' = -\beta_1 (2p_{21}'' + p_{22}'', -p_{34}'' - 2p_{43}'' + 4P'') - \\
-\beta_2 (p_{21} + 2p_{22'} + p_{34} + 2p_{43} + 2P) \quad (46b)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\varepsilon_1'' + \varepsilon_2'' + 6 \varepsilon_3'' = -\beta_1 (-p_{21}'' + p_{22}'', + 2p_{34}'' + p_{43}'' + P'') - \\
-\beta_2 (p_{21} - p_{22'} + p_{34} - p_{43} - P), \quad (46c)
\end{aligned}$$

deren Auflösungen nach den ε''

$$\begin{aligned}
153 \varepsilon_1'' = -\beta_1 (37 p_{21}'' - 11 p_{22}'', + 34 p_{34}'' + 4 p_{43}'' - 26 P'') - \\
-\beta_2 (-52 p_{21} - 4 p_{22'} - 52 p_{34} - 4 p_{43} - 4 P) \quad (47a)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
153 \varepsilon_2'' = -\beta_1 (44 p_{21}'' + 20 p_{22}'', -34 p_{34}'' - 49 p_{43}'' + 89 P'') - \\
-\beta_2 (25 p_{21} + 49 p_{22'} + 25 p_{34} + 49 p_{43} + 49 P) \quad (47b)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
153 \varepsilon_3'' = -\beta_1 (-39 p_{21}'' + 24 p_{22}'', + 51 p_{34}'' + 33 p_{43}'' + 15 P'') - \\
-\beta_2 (30 p_{21} - 33 p_{22'} + 30 p_{34} - 33 p_{43} - 33 P) \quad (47c)
\end{aligned}$$

lauten. Infolge der oben festgelegten Übereinstimmung der Querbelastungsschemata ist die erste, zweite und dritte Kontinuitätsbedingung 2. Art gleich-

lautend mit den entsprechenden Bedingungen Gl. (43a, b, c) der symmetrischen Belastung, nur ist jetzt $\xi_{22'} \neq 0$. Infolge der Gegensymmetrie wird $\xi_{24} = \xi_{2'4}$, $\varepsilon_2 = -\varepsilon_{2'}$, $p_{22'} = -p_{2'2}$ und $\Delta_{42} = -\Delta_{42'}$. Es ergibt sich also die noch fehlende vierte Kontinuitätsbedingung 2. Art in der Form

$$2\xi_{24} + \xi_{34} - 2\Delta_{42} + \Delta_{43} = 0 \quad (\text{Knoten } 4). \quad (43d')$$

Da nach Gl. (26'')
$$\xi_{22'}'''' = \frac{2\varepsilon_2''}{2h} \quad (44')$$

und nach der zum Knoten 4 gehörigen Gl. (36a)

$$p_{42} = -2p_{43} \quad (44'')$$

wird, folgen aus der Übereinstimmung der drei ersten Kontinuitätsbedingungen mit Gl. (43a, b, c) die den Gl. (44a, b, c) entsprechenden Gl. (44a', b', c'), indem man in Gl. (44a, b, c) die Gl. (44') und (44'') einführt und $\varepsilon_4 = 0$, $\varepsilon_2 = -\varepsilon_{2'}$, $p_{22'} = -p_{2'2}$ setzt. In analoger Weise wie beim symmetrischen Lastfall ergibt sich aus Gl. (43d') die der Gl. (44d) korrespondierende Beziehung zu

$$\begin{aligned} & (-2\varepsilon_2'' + \varepsilon_3'') + \beta_3 (2\varepsilon_2'''' - \varepsilon_3''') + \beta_4 (14\varepsilon_2^{VI} - 7\varepsilon_4^{VI}) + \\ & + \beta_5 (2p_{21}'''' - 2p_{22'}'''' - p_{34}'''' - 15p_{43}'''' + 2P''''') + \\ & + \beta_6 (14p_{21}^{VI} - 14p_{22'}^{VI} - 7p_{34}^{VI} - 45p_{43}^{VI} + 14P^{VI}). \end{aligned} \quad (44d')$$

Bildet man aus den Gl. (47) die ε'''' und ε^{VI} , setzt diese und die ε'' in die Gl. (44a', b', c', d') ein, addiert wieder die erste zur dritten und die zweite zur vierten Gleichung, so folgen auch für diesen Belastungsfall die vier simultanen Differentialgleichungen sechster Ordnung

$$\begin{aligned} & -7,5 \frac{h^2}{m} p_{21}'' + \left(303,5 - \frac{223}{m^2} \right) h^4 p_{21}'''' - 36,083 \frac{h^6}{m} p_{21}^{VI} \\ & 123 \frac{h^2}{m} p_{22'}'' + \left(-150,25 + \frac{187,25}{m^2} \right) h^4 p_{22'}'''' + 33,72916 \frac{h^6}{m} p_{22'}^{VI}, \\ & -7,5 \frac{h^2}{m} p_{34}'' + \left(-308,5 + \frac{221}{m^2} \right) h^4 p_{34}'''' + 35,416 \frac{h^6}{m} p_{34}^{VI} \\ & 123 \frac{h^2}{m} p_{43}'' + \left(-73,75 + \frac{32,75}{m^2} \right) h^4 p_{43}'''' + 39,60416 \frac{h^6}{m} p_{43}^{VI} = \\ & = -123 \frac{h^2}{m} P'' + \left(-79,25 - \frac{35,75}{m^2} \right) h^4 P'''' - 2,35416 \frac{h^6}{m} P^{VI} \end{aligned} \quad (48a)$$

$$\begin{aligned} & -37,5 \frac{h^2}{m} p_{21}'' + \left(140,5 - \frac{197}{m^2} \right) h^4 p_{21}'''' - 27,416 \frac{h^6}{m} p_{21}^{VI} \\ & -73,5 \frac{h^2}{m} p_{22'}'' + \left(-254 + \frac{209,5}{m^2} \right) h^4 p_{22'}'''' + 12,4583 \frac{h^6}{m} p_{22'}^{VI}, \\ & -37,5 \frac{h^2}{m} p_{34}'' + \left(64 - \frac{42,5}{m^2} \right) h^4 p_{34}'''' - 33,2916 \frac{h^6}{m} p_{34}^{VI} \\ & -73,5 \frac{h^2}{m} p_{43}'' + \left(472,75 - \frac{448,25}{m^2} \right) h^4 p_{43}'''' - 82,47916 \frac{h^6}{m} p_{43}^{VI} = \\ & = 73,5 \frac{h^2}{m} P'' + \left(101 + \frac{12,5}{m^2} \right) h^4 P'''' - 14,9583 \frac{h^6}{m} P^{VI} \end{aligned} \quad (48b)$$

$$\begin{aligned}
& 80,25 p_{21} - 18,625 \frac{h^2}{m} p_{21}'' + \left(333,34375 - \frac{292,25}{m^2} \right) h^4 p_{21}'''' - 66,72916 \frac{h^6}{m} p_{21}^{VI} \\
& 15 p_{22'} + 93,5 \frac{h^2}{m} p_{22'}'' + \left(-209,375 + \frac{235,75}{m^2} \right) h^4 p_{22'}'''' + 56,02083 \frac{h^6}{m} p_{22'}^{VI} \\
& 80,25 p_{34} - 11,125 \frac{h^2}{m} p_{34}'' + \left(27,34375 - \frac{68}{m^2} \right) h^4 p_{34}'''' - 31,16 \frac{h^6}{m} p_{34}^{VI} \\
& 15 p_{43} + 56 \frac{h^2}{m} p_{43}'' + \left(-56,375 + \frac{32,5}{m^2} \right) h^4 p_{43}'''' + 31,2083 \frac{h^6}{m} p_{43}^{VI} \\
= & -15 P - 111,925 \frac{h^2}{m} P'' + \left(-20,125 - \frac{56,5}{m^2} \right) h^4 P'''' - 10,7083 \frac{h^6}{m} P^{VI} \quad (48c)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& 15 p_{21} + 56 \frac{h^2}{m} p_{21}'' + \left(-80,875 + \frac{44,75}{m^2} \right) h^4 p_{21}'''' + 26,10416 \frac{h^6}{m} p_{21}^{VI} \\
& 98,25 p_{22'} - 41,125 \frac{h^2}{m} p_{22'}'' + \left(47,84375 - \frac{80,5}{m^2} \right) h^4 p_{22'}'''' - 46,9583 \frac{h^6}{m} p_{22'}^{VI} \\
& 15 p_{34} - 67 \frac{h^2}{m} p_{34}'' + \left(33,875 - \frac{8,5}{m^2} \right) h^4 p_{34}'''' - 4,9583 \frac{h^6}{m} p_{34}^{VI} \\
& 98,25 p_{43} - 114,625 \frac{h^2}{m} p_{43}'' + \left(545,09375 - \frac{541}{m^2} \right) h^4 p_{43}'''' - 124,3 \frac{h^6}{m} p_{43}^{VI} \\
= & -98,25 P - 32,375 \frac{h^2}{m} P'' + \left(105,15625 - \frac{35,75}{m^2} \right) h^4 P'''' - 20,85416 \frac{h^6}{m} P^{VI}, \quad (48d)
\end{aligned}$$

welche für jede in den Knoten 2 und 2' angreifende, zur Achse I—I' anti-symmetrischen Linienlast $\pm P\sqrt{3}$ gelten.

Die nächste Aufgabe besteht in der Integration des Systems der Gl. (45). Hiezu entwickeln wir die Linienbelastung P in die Fourier'sche Reihe

$$P = \sum_{k=1}^{k=\infty} P_k \sin \frac{k\pi}{L} x. \quad (49)$$

Belasten wir nun das Tragwerk nur mit dem k -ten Glied $P_k \sin \frac{k\pi}{L} x$ dieser Entwicklung, so erhalten wir die dazugehörigen Störungsglieder der linearen Differentialgleichungen (45), indem wir in deren rechten Seiten dieses Glied mit seinen Ableitungen

$$P_k^{(2n)} = (-1)^n P_k \left(\frac{k\pi}{L} \right)^{2n} \sin \frac{k\pi}{L} x; \quad (n = 1, 2, 3)$$

einsetzen. Nehmen wir nun als zugehörige Lösungen der unbekanntten Funktionen p_{21} , $p_{22'}$, p_{34} und p_{43} die Glieder

$$A_k \sin \frac{k\pi}{L} x; \quad B_k \sin \frac{k\pi}{L} x; \quad C_k \sin \frac{k\pi}{L} x; \quad D_k \sin \frac{k\pi}{L} x$$

an, d. h. wir substituieren diese Ansätze mit ihren Ableitungen

$$(-1)^n A_k \left(\frac{k\pi}{L} \right)^{2n} \sin \frac{k\pi}{L} x; \quad (-1)^n B_k \left(\frac{k\pi}{L} \right)^{2n} \sin \frac{k\pi}{L} x;$$

$$(-1)^n C_k \left(\frac{k\pi}{L} \right)^{2n} \sin \frac{k\pi}{L} x; \quad (-1)^n D_k \left(\frac{k\pi}{L} \right)^{2n} \sin \frac{k\pi}{L} x$$

in die linken Seiten der Gl. (45), so ergeben sich nach Kürzung durch $\sin \frac{k\pi}{L} x$ vier lineare Gleichungen für die Beiwerte A_k, B_k, C_k, D_k . Führt man diesen Vorgang für alle Glieder von Gl. (49) durch, so erhalten wir nach dem Superpositionsgesetz die vollständigen Integrale der Gl. (45) in der Form

$$\begin{aligned} p_{21} &= \sum_1^{\infty} A_k \sin \frac{k\pi}{L} x; & p_{22'} &= \sum_1^{\infty} B_k \sin \frac{k\pi}{L} x; \\ p_{34} &= \sum_1^{\infty} C_k \sin \frac{k\pi}{L} x; & p_{43} &= \sum_1^{\infty} D_k \sin \frac{k\pi}{L} x. \end{aligned} \quad (50)$$

Die Lösung der Gl. (48) geschieht auf dieselbe Weise.

Berücksichtigt man, daß für jede zur Achse $C-C$ symmetrische Belastung die Glieder mit geradem k Null werden, so ergibt sich auf diese Weise für $k = 1, 3, 5$ die Lösung der Gl. (45) zu

$$\begin{aligned} p_{21} &= 3,605199 P_1 \sin \frac{\pi}{L} x - 0,096506 P_3 \sin \frac{3\pi}{L} x - 0,302948 P_5 \sin \frac{5\pi}{L} x \\ p_{22'} &= 4,469606 \quad " \quad + 0,106536 \quad " \quad - 0,162651 \quad " \quad " \\ p_{34} &= -4,257498 \quad " \quad - 0,522686 \quad " \quad - 0,193059 \quad " \quad " \\ p_{43} &= -5,003027 \quad " \quad - 0,603425 \quad " \quad - 0,187633 \quad " \quad " \end{aligned} \quad (51)$$

und entsprechend die der Gl. (48) zu

$$\begin{aligned} p_{21} &= -0,3512399 P_1 \sin \frac{\pi}{L} x - 0,34093950 P_3 \sin \frac{3\pi}{L} x - 0,33050826 P_5 \sin \frac{5\pi}{L} x \\ p_{22'} &= -0,82596959 \quad " \quad - 0,80828891 \quad " \quad - 0,73478157 \quad " \quad " \\ p_{34} &= +0,35210622 \quad " \quad + 0,33802644 \quad " \quad + 0,28038403 \quad " \quad " \\ p_{43} &= -0,17309484 \quad " \quad - 0,16766555 \quad " \quad - 0,12830188 \quad " \quad " \end{aligned} \quad (52)$$

Setzt man die Gl. (51) mit ihren zweiten Ableitungen in die Gl. (42) ein und integriert diese unter Verwendung von

$$\int dx \int \sin \frac{k\pi}{L} x dx = - \left(\frac{L}{k\pi} \right)^2 \sin \frac{k\pi}{L} x + C_1 x + C_2$$

zwei mal nach x , so ergeben sich die ε für die symmetrische Belastung. Da für $x = 0$ und $x = L$, $\varepsilon = 0$ und $\sin \frac{k\pi}{L} x = 0$ wird, verschwinden alle dabei auftretenden Integrationskonstanten C_1 und C_2 . Es folgt also

$$\begin{aligned} E \varepsilon_1 &= 257,8506 P_1 \sin \frac{\pi}{L} x + 27,4812 P_3 \sin \frac{3\pi}{L} x + 8,0659 P_5 \sin \frac{5\pi}{L} x \\ " \varepsilon_2 &= 258,5340 \quad " \quad + 29,1968 \quad " \quad + 11,2586 \quad " \quad " \\ " \varepsilon_3 &= -310,1536 \quad " \quad - 34,6841 \quad " \quad - 12,7698 \quad " \quad " \\ " \varepsilon_4 &= -310,4471 \quad " \quad - 34,7353 \quad " \quad - 12,5847 \quad " \quad " \end{aligned} \quad (53)$$

In gleicher Weise erhalten wir aus den Gl. (52) und (47)

$$\begin{aligned} E \varepsilon_1 &= -0,2383262 P_1 \sin \frac{\pi}{L} x + 0,3073124 P_3 \sin \frac{3\pi}{L} x + 1,0835316 P_5 \sin \frac{5\pi}{L} x \\ " \varepsilon_2 &= -0,0363547 \quad " \quad + 0,4905634 \quad " \quad + 1,4057950 \quad " \quad " \\ " \varepsilon_3 &= -0,3219318 \quad " \quad - 1,2223782 \quad " \quad - 2,6271881 \quad " \quad " \end{aligned} \quad (54)$$

Mit diesen Ergebnissen kann man nach Gl. (7) die Spannungen σ_ξ senkrecht und nach den Gl. (10a, b) die Spannungen σ_x parallel zu den Scheibenachsen ermitteln.

Weiters erhält man aus $\int_0^x \varepsilon dx$ die Längsverschiebungen der Punkte der Knotenlinien im Abstand x vom Auflager $x=0$.

Setzt man die Gl. (51) und (53) mit ihren zweiten Ableitungen in die Gl. (16a, b) und (26'') ein, so folgen für die symmetrische Belastung der Fig. 8b die Verformungen quer zu den Scheibenachsen. Es wird

$$\begin{aligned}
 E \Delta_{22'} &= -7,9069 P_1 \sin \frac{\pi}{L} x - 3,8988 P_3 \sin \frac{3\pi}{L} x - 2,8013 P_5 \sin \frac{5\pi}{L} x \\
 \text{„ } \Delta_{24} &= 2,2015 \quad \text{„} \quad \text{„} \quad + 3,1300 \quad \text{„} \quad \text{„} \quad + 5,2798 \quad \text{„} \quad \text{„} \\
 \text{„ } \Delta_{42} &= 33,7625 \quad \text{„} \quad \text{„} \quad + 5,4811 \quad \text{„} \quad \text{„} \quad + 4,7108 \quad \text{„} \quad \text{„} \\
 \text{„ } \Delta_{23} &= 0,4378 \quad \text{„} \quad \text{„} \quad + 7,3631 \quad \text{„} \quad \text{„} \quad + 7,8063 \quad \text{„} \quad \text{„} \\
 \text{„ } \Delta_{32} &= 68,5467 \quad \text{„} \quad \text{„} \quad + 10,4223 \quad \text{„} \quad \text{„} \quad + 5,2984 \quad \text{„} \quad \text{„} \\
 \text{„ } \Delta_{43} &= 14,6651 \quad \text{„} \quad \text{„} \quad + 0,6580 \quad \text{„} \quad \text{„} \quad - 0,3753 \quad \text{„} \quad \text{„} \\
 \text{„ } \Delta_{34} &= 18,3120 \quad \text{„} \quad \text{„} \quad + 0,6531 \quad \text{„} \quad \text{„} \quad - 0,3848 \quad \text{„} \quad \text{„} \\
 \text{„ } \Delta_{31} &= 2,7918 \quad \text{„} \quad \text{„} \quad - 0,1770 \quad \text{„} \quad \text{„} \quad - 0,2014 \quad \text{„} \quad \text{„} \\
 \text{„ } \Delta_{13} &= -33,3714 \quad \text{„} \quad \text{„} \quad - 3,6477 \quad \text{„} \quad \text{„} \quad - 1,1363 \quad \text{„} \quad \text{„} \\
 \text{„ } \Delta_{21} &= -24,8408 \quad \text{„} \quad \text{„} \quad - 5,5983 \quad \text{„} \quad \text{„} \quad - 3,4799 \quad \text{„} \quad \text{„} \\
 \text{„ } \Delta_{12} &= -42,0787 \quad \text{„} \quad \text{„} \quad - 4,9691 \quad \text{„} \quad \text{„} \quad - 1,7495 \quad \text{„} \quad \text{„}
 \end{aligned} \tag{55}$$

$$\begin{aligned}
 E \xi_{22'} &= 0 \\
 \text{„ } \xi_{24} &= 28434,3 P_1 \sin \frac{\pi}{L} x + 355,18 P_3 \sin \frac{3\pi}{L} x + 47,69 P_5 \sin \frac{5\pi}{L} x \\
 \text{„ } \xi_{23} &= -28434,8 \quad \text{„} \quad \text{„} \quad - 354,89 \quad \text{„} \quad \text{„} \quad - 48,06 \quad \text{„} \quad \text{„} \\
 \text{„ } \xi_{13} &= 28401,2 \quad \text{„} \quad \text{„} \quad + 345,36 \quad \text{„} \quad \text{„} \quad + 41,67 \quad \text{„} \quad \text{„} \\
 \text{„ } \xi_{34} &= -14,641 \quad \text{„} \quad \text{„} \quad - 0,6578 \quad \text{„} \quad \text{„} \quad + 0,3702 \quad \text{„} \quad \text{„} \\
 \text{„ } \xi_{12} &= 34,170 \quad \text{„} \quad \text{„} \quad + 9,5312 \quad \text{„} \quad \text{„} \quad + 6,3854 \quad \text{„} \quad \text{„}
 \end{aligned} \tag{56}$$

Substituiert man dagegen die Gl. (52) und (54) mit ihren zweiten Ableitungen in die Gl. (16a, b) und (26''), so erhält man die Verformungen quer zu den Scheibenachsen für die antisymmetrische Belastung der Fig. 8c. Es ergibt sich

$$\begin{aligned}
 E \Delta_{22'} &= -3,9617 P_1 \sin \frac{\pi}{L} x - 3,9289 P_3 \sin \frac{3\pi}{L} x - 3,6682 P_5 \sin \frac{5\pi}{L} x \\
 \text{„ } \Delta_{24} &= 11,4609 \quad \text{„} \quad \text{„} \quad + 11,3627 \quad \text{„} \quad \text{„} \quad + 10,7307 \quad \text{„} \quad \text{„} \\
 \text{„ } \Delta_{42} &= 6,0393 \quad \text{„} \quad \text{„} \quad + 5,9677 \quad \text{„} \quad \text{„} \quad + 5,3252 \quad \text{„} \quad \text{„} \\
 \text{„ } \Delta_{23} &= 2,9609 \quad \text{„} \quad \text{„} \quad + 3,0126_5 \quad \text{„} \quad \text{„} \quad + 3,5429 \quad \text{„} \quad \text{„} \\
 \text{„ } \Delta_{32} &= -1,2249 \quad \text{„} \quad \text{„} \quad - 0,7862 \quad \text{„} \quad \text{„} \quad - 0,3200 \quad \text{„} \quad \text{„} \\
 \text{„ } \Delta_{43} &= -0,3852 \quad \text{„} \quad \text{„} \quad - 0,3476 \quad \text{„} \quad \text{„} \quad - 0,2069 \quad \text{„} \quad \text{„} \\
 \text{„ } \Delta_{34} &= 2,1682 \quad \text{„} \quad \text{„} \quad + 2,2011 \quad \text{„} \quad \text{„} \quad + 1,9987 \quad \text{„} \quad \text{„} \\
 \text{„ } \Delta_{31} &= 2,5534 \quad \text{„} \quad \text{„} \quad + 2,5966 \quad \text{„} \quad \text{„} \quad + 2,3013 \quad \text{„} \quad \text{„} \\
 \text{„ } \Delta_{13} &= 0,8970 \quad \text{„} \quad \text{„} \quad + 0,8243 \quad \text{„} \quad \text{„} \quad + 0,6190 \quad \text{„} \quad \text{„} \\
 \text{„ } \Delta_{21} &= -2,5132 \quad \text{„} \quad \text{„} \quad - 2,5429 \quad \text{„} \quad \text{„} \quad - 2,5703 \quad \text{„} \quad \text{„} \\
 \text{„ } \Delta_{12} &= -0,8069 \quad \text{„} \quad \text{„} \quad - 0,8746 \quad \text{„} \quad \text{„} \quad - 0,9481 \quad \text{„} \quad \text{„}
 \end{aligned} \tag{57}$$

$$\begin{aligned}
 E \xi_{22'} &= 3,6355 P_1 \sin \frac{\pi}{L} x - 5,4507 P_3 \sin \frac{3\pi}{L} x - 5,6232 P_5 \sin \frac{5\pi}{L} x \\
 \text{„ } \xi_{24} &= -1,8177 \quad \text{„} \quad \text{„} \quad + 2,7254 \quad \text{„} \quad \text{„} \quad - 2,8116 \quad \text{„} \quad \text{„} \\
 \text{„ } \xi_{23} &= -14,2789 \quad \text{„} \quad \text{„} \quad - 9,5163 \quad \text{„} \quad \text{„} \quad - 8,0660 \quad \text{„} \quad \text{„} \\
 \text{„ } \xi_{13} &= 4,1803 \quad \text{„} \quad \text{„} \quad + 8,4983 \quad \text{„} \quad \text{„} \quad + 7,4214 \quad \text{„} \quad \text{„} \\
 \text{„ } \xi_{34} &= 16,0966 \quad \text{„} \quad \text{„} \quad + 6,7910 \quad \text{„} \quad \text{„} \quad + 5,2544 \quad \text{„} \quad \text{„} \\
 \text{„ } \xi_{12} &= 10,0986 \quad \text{„} \quad \text{„} \quad + 1,0181 \quad \text{„} \quad \text{„} \quad + 0,6445 \quad \text{„} \quad \text{„} \quad (58)
 \end{aligned}$$

Um die Lösungen zu vervollständigen, haben wir noch die Schubspannungen zu ermitteln. Man erhält sie mit Benutzung von

$$\int \sin \frac{k\pi}{L} x = -\frac{L}{k\pi} \cos \frac{k\pi}{L} x + C$$

durch einmalige Integration der Gl. (12a) und (12b). Die dabei auftretenden Konstanten werden wegen $\cos \frac{k\pi}{L} x = 0$ und $\tau = 0$ für $x = \frac{L}{2}$ wieder alle Null. Man erhält für den Belastungsfall Fig. 8b

$$\begin{aligned}
 \tau_{24} &= -0,12583 P_1 \cos \frac{\pi}{L} x + 10,59797 P_3 \cos \frac{3\pi}{L} x + 6,37181 P_5 \cos \frac{5\pi}{L} x \\
 \tau_{42} &= -5,29002 \quad \text{„} \quad \text{„} \quad + 9,41463 \quad \text{„} \quad \text{„} \quad + 6,56514 \quad \text{„} \quad \text{„} \\
 \tau_{34} &= -69,20280 \quad \text{„} \quad \text{„} \quad - 12,08576 \quad \text{„} \quad \text{„} \quad - 6,49105 \quad \text{„} \quad \text{„} \\
 \tau_{43} &= -5,29062 \quad \text{„} \quad \text{„} \quad + 9,41571 \quad \text{„} \quad \text{„} \quad + 6,56689 \quad \text{„} \quad \text{„} \\
 \tau_{22'} &= 26,75733 \quad \text{„} \quad \text{„} \quad + 8,82296 \quad \text{„} \quad \text{„} \quad + 5,46661 \quad \text{„} \quad \text{„} \\
 \tau_{23} &= 127,08406 \quad \text{„} \quad \text{„} \quad - 8,38250 \quad \text{„} \quad \text{„} \quad - 7,02325 \quad \text{„} \quad \text{„} \\
 \tau_{32} &= 131,05120 \quad \text{„} \quad \text{„} \quad - 7,77173 \quad \text{„} \quad \text{„} \quad - 7,60101 \quad \text{„} \quad \text{„} \\
 \tau_{12} &= 206,30812 \quad \text{„} \quad \text{„} \quad + 6,78826 \quad \text{„} \quad \text{„} \quad + 1,43462 \quad \text{„} \quad \text{„} \\
 \tau_{21} &= 153,94859 \quad \text{„} \quad \text{„} \quad - 10,15723 \quad \text{„} \quad \text{„} \quad - 7,92471 \quad \text{„} \quad \text{„} \\
 \tau_{13} &= 206,30720 \quad \text{„} \quad \text{„} \quad + 6,78826 \quad \text{„} \quad \text{„} \quad + 1,43461 \quad \text{„} \quad \text{„} \\
 \tau_{31} &= 200,22535 \quad \text{„} \quad \text{„} \quad + 4,31376 \quad \text{„} \quad \text{„} \quad - 1,11040 \quad \text{„} \quad \text{„} \quad (59)
 \end{aligned}$$

und für den Lastfall Fig. 8c

$$\begin{aligned}
 \tau_{24} &= 56,21010 P_1 \cos \frac{\pi}{L} x + 18,11491 P_3 \cos \frac{3\pi}{L} x + 9,98643 P_5 \cos \frac{5\pi}{L} x \\
 \tau_{42} &= 56,57061 \quad \text{„} \quad \text{„} \quad + 19,34360 \quad \text{„} \quad \text{„} \quad + 12,35021 \quad \text{„} \quad \text{„} \\
 \tau_{34} &= -26,24611 \quad \text{„} \quad \text{„} \quad - 8,57101 \quad \text{„} \quad \text{„} \quad - 4,81842 \quad \text{„} \quad \text{„} \\
 \tau_{43} &= -26,24890 \quad \text{„} \quad \text{„} \quad - 8,30651 \quad \text{„} \quad \text{„} \quad - 3,65692 \quad \text{„} \quad \text{„} \\
 \tau_{22'} &= 82,54072 \quad \text{„} \quad \text{„} \quad + 26,83041 \quad \text{„} \quad \text{„} \quad + 14,68502 \quad \text{„} \quad \text{„} \\
 \tau_{23} &= -43,83510 \quad \text{„} \quad \text{„} \quad - 14,38995 \quad \text{„} \quad \text{„} \quad - 8,42672 \quad \text{„} \quad \text{„} \\
 \tau_{32} &= -43,83394 \quad \text{„} \quad \text{„} \quad - 14,28720 \quad \text{„} \quad \text{„} \quad - 8,13130 \quad \text{„} \quad \text{„} \\
 \tau_{12} &= -17,60221 \quad \text{„} \quad \text{„} \quad - 5,64001 \quad \text{„} \quad \text{„} \quad - 2,81981 \quad \text{„} \quad \text{„} \\
 \tau_{21} &= -17,50454 \quad \text{„} \quad \text{„} \quad - 5,67482 \quad \text{„} \quad \text{„} \quad - 3,73395 \quad \text{„} \quad \text{„} \\
 \tau_{13} &= -17,60223 \quad \text{„} \quad \text{„} \quad - 5,64063 \quad \text{„} \quad \text{„} \quad - 2,82060 \quad \text{„} \quad \text{„} \\
 \tau_{31} &= -17,58782 \quad \text{„} \quad \text{„} \quad - 5,71234 \quad \text{„} \quad \text{„} \quad - 3,31213 \quad \text{„} \quad \text{„} \quad (60)
 \end{aligned}$$

Die Vorzeichen dieser Schubspannungen sind dann positiv, wenn sie dem in Fig. 3a dargestellten Spannungsspiel entsprechen. Dabei ist die Scheibe

aus dem Falwerk zu lösen und so in die Zeichenebene zu legen, daß der Koordinatenanfangspunkt $x=0$ links liegt und die in Fig. 7a festgelegte positive ξ -Richtung nach abwärts weist.

Die bis jetzt entwickelten Resultate dieses Abschnittes gelten für jede zur Achse $C-C$ symmetrische Belastung. Handelt es sich um einen besonderen Fall, so sind die dazu gehörigen Beiwerte P_k der Belastungsentwicklung Gl. (49) zu bestimmen und in die Gl. (51–60) einzusetzen. Diese Belastungskoeffizienten ergeben sich bei Berücksichtigung der ersten drei Glieder für eine in Tragwerksmitte angreifende Einzellast G zu

$$P_1 = \frac{2G}{L}; \quad P_3 = -\frac{2G}{L}; \quad P_5 = \frac{2G}{L},$$

für eine Gleichlast p werden sie hingegen

$$P_k = \frac{4}{\pi} \cdot \frac{1}{k} p \quad (k=1, 3, 5). \quad (61)$$

Wir wollen für die letztere alle Spannungen und Verformungen in Tragwerksmitte bestimmen, d. h. wir setzen in Gl. (51–60) für die P_1 , P_3 und P_5 die P_k der Gl. (61) und für $x = \frac{L}{2}$. Um ein Bild darüber zu bekommen, inwieweit die Gleichlast p durch die drei ersten Glieder der Lastentwicklung ersetzt wird, wurde in Fig. 8a der Wert von

$$p = \frac{4}{\pi} p \sum_{k=1}^{k=3} \frac{1}{k} \sin \frac{k\pi}{L} x \quad (62)$$

aufgetragen. Für die in dieser Figur stark ausgezogene Belastungskurve sind also die nachfolgenden Lösungen exakt, für die Gleichlast p hingegen, stellen sie eine sehr gute Näherung dar, die durch Entwicklung weiterer Glieder beliebig weit getrieben werden kann. In den Fig. 8b und 8c sind die Werte für die Querbewegungen, Längsdehnungen und Längsspannungen, in den Fig. 8d und 8e hingegen die Werte für die gesamten Verformungen Δ und ξ für den symmetrischen und antisymmetrischen Lastfall in Tragwerksmitte dargestellt. Die Schubspannungen an den Scheibenrändern ergeben sich für den symmetrischen Lastfall zu

$$\begin{aligned} \tau_{24} &= -2,3841 \text{ t/m}^2; & \tau_{22'} &= 24,9097 \text{ t/m}^2; & \tau_{21} &= 155,7494 \text{ t/m}^2 \\ \tau_{42} &= -7,1152 \text{ "}; & \tau_{23} &= 128,4736 \text{ "}; & \tau_{13} &= 204,3314 \text{ "} \\ \tau_{34} &= -66,4724 \text{ "}; & \tau_{32} &= 132,1216 \text{ "}; & \tau_{31} &= 198,5654 \text{ "} \\ \tau_{43} &= -7,1158 \text{ "}; & \tau_{12} &= 204,3323 \text{ "}; & & \end{aligned} \quad (63)$$

und für den antisymmetrischen Lastfall zu

$$\begin{aligned} \tau_{24} &= 52,1691 \text{ t/m}^2; & \tau_{22'} &= 76,5342 \text{ t/m}^2; & \tau_{21} &= -16,3597 \text{ t/m}^2 \\ \tau_{42} &= 52,5927 \text{ "}; & \tau_{23} &= -40,7237 \text{ "}; & \tau_{13} &= -16,2861 \text{ "} \\ \tau_{34} &= -24,3528 \text{ "}; & \tau_{32} &= -40,6978 \text{ "}; & \tau_{31} &= -16,3461 \text{ "} \\ \tau_{43} &= -24,2115 \text{ "}; & \tau_{12} &= -16,2862 \text{ "}. & & \end{aligned} \quad (64)$$

Durch algebraische Addition der beiden in den Fig. 8b und 8c dargestellten Belastungsfälle ergeben sich die Werte für die längs der Knotenlinie 2 angreifende Linienlast $2P\sqrt{3}$. Aus den zur Gl. (62) gehörigen Ergebnissen ist ersichtlich, daß diese noch nicht mit $\frac{4}{\pi}$ vervielfältigt sind. Um die end-

gültigen Resultate für die nach Gl. (62) dargestellten Gleichlasten p zu erhalten, sind die in den Fig. 8b, c, d, e und den Gl. (63) und (64) angegebenen Zahlenwerte noch mit $\frac{4}{\pi\sqrt{3}}p$ zu multiplizieren.

b) 2. Beispiel.

Das folgende Zahlenbeispiel soll beim gleichen Tragwerk für dieselben Belastungen den Einfluß des Schubmoduls G zeigen. Um diesen Einfluß besonders deutlich hervortreten zu lassen, werden im Gegensatz zur vorigen Aufgabe die Längenänderungen Δ quer zu den Scheibenachsen gleich Null gesetzt. Außerdem wird durch die Annahme $m = \infty$ auch der Einfluß der Querdehnungszahlen m ausgeschaltet, so daß die Auswirkung des Schubmoduls so ungestört als möglich zu Tage treten kann. Da sich der Einfluß der Δ und der ξ erst bei den Kontinuitätsbedingungen 2. Art geltend macht, bleibt der Rechnungsgang bis einschließlich der Aufstellung der Kontinuitätsbedingungen 1. Art unverändert. Die explizite Darstellung der ε'' erhält man also für den symmetrischen bzw. für den antisymmetrischen Belastungsfall, indem man in den Gl. (42a, b, c, d) bzw. (47a, b, c), wegen $m = \infty$, $\beta_1 = 0$ setzt. So wie im vorigen Beispiel bedienen wir uns auch hier für die ξ'' der vereinfachten Gl. (26'). Wir behandeln so wie früher den Belastungsfall Fig. 8b zuerst. Die dazugehörigen Kontinuitätsbedingungen 1. Art erhalten wir, indem wir in den Gl. (43a, b, c, d) die $\Delta = 0$ setzen und daran anschließend die Gl. (26') substituieren. Da Massenkräfte nicht vorhanden sind, wird dabei $m_{rs} = n_{rs} = g_v = 0$. Es folgt also nach Multiplikation mit $2h$

$$(-\varepsilon_1'' + \varepsilon_2'' + \varepsilon_3'' - \varepsilon_4'') + \beta_7(-p_{21}'' + p_{22}'' + 3p_{34}'' - p_{43}'' + P'') = 0 \quad (65a)$$

$$(-\varepsilon_3'' + \varepsilon_4'' + 2h\xi_{22}''') + \beta_7(-2p_{21}'' + 3p_{22}'' + p_{34}'' + p_{42}'' - p_{2,2}'') = 0 \quad (65b)$$

$$(\varepsilon_1'' - \varepsilon_2'' - \varepsilon_3'' + \varepsilon_4'') + \beta_7(-3p_{21}'' + 2p_{22}'' + p_{34}'' + p_{42}'') = 0 \quad (65c)$$

$$(\varepsilon_3'' - \varepsilon_4'') + \beta_7(p_{34}'' - p_{43}'') = 0, \quad (65d)$$

worin $\beta_7 = \frac{2}{bE}$; $\xi_{22}''' = 0$; $p_{22'} = p_{2,2}$; $p_{42} = 0$ zu setzen ist. Addiert man wieder die erste Gleichung zur dritten und die zweite zur vierten, ersetzt hierauf unter Bedachtnahme auf $\beta_1 = 0$ die ε'' durch die Gl. (42a, b, c, d), so wird nach den Gl. (37a) mit dem der Annahme $m = \infty$ entsprechenden Verhältnis $\frac{E}{G} = 2$

$$-4p_{21}'' + 3p_{22}'' + 4p_{34}'' - p_{43}'' = -P'' \quad (66a)$$

$$-2p_{21}'' + 2p_{22}'' + 2p_{34}'' - p_{43}'' = 0 \quad (66b)$$

$$\begin{aligned} &(-840p_{21} + 456p_{22} - 840p_{34} + 456p_{43}) - \\ &- 992(-3p_{21}'' + 2p_{22}'' + p_{34}'') = 312P \end{aligned} \quad (66c)$$

$$\begin{aligned} &(456p_{21} - 399p_{22} + 456p_{34} - 399p_{43}) - \\ &- 992(p_{34}'' - p_{43}'') = -87P. \end{aligned} \quad (66d)$$

Löst man diese Differentialgleichungen zweiter Ordnung wieder mit Hilfe von Fourier'schen Reihen auf, so erhalten wir für die ersten Glieder der unbekanntenen Belastungsfunktionen p

$$p_{21} = -0,02511 P_1 \sin \frac{\pi}{L} x \quad (67 a)$$

$$p_{22'} = +0,23038 \quad " \quad " \quad (67 b)$$

$$p_{34} = -0,64030 \quad " \quad " \quad (67 c)$$

$$p_{43} = -0,67962 \quad " \quad " \quad (67 d)$$

aus welchen sich nach Gl. (42a, b, c, d) die Längsdehnungen ε der Knotenlinien zu

$$E \varepsilon_1 = 262,90 P_1 \sin \frac{\pi}{L} x \quad (68 a)$$

$$" \varepsilon_2 = 263,40 \quad " \quad " \quad (68 b)$$

$$" \varepsilon_3 = -316,97 \quad " \quad " \quad (68 c)$$

$$" \varepsilon_4 = -314,41 \quad " \quad " \quad (68 d)$$

und mit den Gl. (12a) und (12b) die dazugehörigen Schubspannungen τ ergeben. Es wird

$$\tau_{24} = +30,152 P_1 \cos \frac{\pi}{L} x; \quad \tau_{22'} = +26,335 P_1 \cos \frac{\pi}{L} x;$$

$$\tau_{42} = +25,036 \quad " \quad " \quad ; \quad \tau_{23} = -23,766 \quad " \quad " \quad ;$$

$$\tau_{34} = -38,074 \quad " \quad " \quad ; \quad \tau_{32} = -18,414 \quad " \quad " \quad ;$$

$$\tau_{43} = +25,064 \quad " \quad " \quad ; \quad \tau_{12} = +25,049 \quad " \quad " \quad ;$$

$$\tau_{21} = -27,576 P_1 \cos \frac{\pi}{L} x;$$

$$\tau_{13} = +25,051 \quad " \quad " \quad ;$$

$$\tau_{31} = +19,654 \quad " \quad " \quad . \quad (69)$$

Aus Gl. (26') erhalten wir schließlich die Durchbiegungen der Scheibenachsen in der Form

$$E \cdot \xi_{22'} = 0; \quad E \cdot \xi_{13} = 29633,8 P_1 \sin \frac{\pi}{L} x;$$

$$" \xi_{24} = 29426,6 P_1 \sin \frac{\pi}{L} x; \quad " \xi_{34} = 0;$$

$$" \xi_{23} = -29633,6 \quad " \quad " \quad ; \quad " \xi_{12} = 0. \quad (70)$$

Andere Verformungen sind nicht vorhanden, da $m = \infty$ und die $\Delta = 0$ sind.

Da die Belastungsschemata der p für die symmetrische und für die antisymmetrische Belastung in derselben Weise übereinstimmen wie beim ersten Zahlenbeispiel, sind auch bei dieser Aufgabe die ersten drei Kontinuitätsbedingungen 2. Art mit denjenigen der symmetrischen Belastung gleichlautend. Die noch fehlende vierte Gleichung folgt aus der Gl. (43d'), indem man darin die $\Delta = 0$ setzt. Setzt man wieder

$$\xi_{22'}'''' = \frac{2 \varepsilon_2''}{2h} \quad (65')$$

und

$$p_{42} = -2 p_{43} \quad (65'')$$

so folgen aus der soeben festgestellten Übereinstimmung der drei ersten Kontinuitätsbedingungen 2. Art die den Gl. (65a, b, c) entsprechenden Gl. (65a', b', c'), indem man in den Gl. (65a, b, c) die Gl. (65') und (65'') einsetzt und $\varepsilon_4 = 0$; $\varepsilon_2 = -\varepsilon_{2'}$; $p_{2'2} = -p_{22'}$ setzt. Die der Gl. (65d) entsprechende Gl. (65d') erhalten wir auf dieselbe Weise wie beim symmetrischen Lastfall. Es wird

$$(-2\varepsilon_2'' + \varepsilon_3'') + \frac{2}{bE}(-2p_{21}'' + 2p_{22'}'' + p_{34} - 5p_{43}'' - 2P'') = 0. \quad (65d)$$

Addiert man wieder die Gl. (65a') zur Gl. (65c') und die Gl. (65b') zur Gl. (65d') und setzt dann mit $\beta_1 = 0$ die Gl. (47a, b, c) in die so erhaltenen Beziehungen ein, so ergeben sich, und zwar wieder entsprechend den Gl. (37a) die für den antisymmetrischen Lastfall geltenden Differentialgleichungen

$$-4p_{21}'' + 3p_{22'}'' + 4p_{34}'' - 3p_{43}'' = -P'' \quad (71a)$$

$$-4p_{21}'' + 6p_{22'}'' + 2p_{34}'' - 7p_{43}'' = +2P'' \quad (71b)$$

$$(107p_{21} + 20p_{22'} + 107p_{34} + 20p_{43}) - \\ + 204(-3p_{21}'' + 2p_{22'}'' + p_{34}'' - 2p_{43}'') = -20P \quad (71c)$$

$$(20p_{21} + 131p_{22'} + 20p_{34} + 131p_{43}) - \\ + 204(-2p_{21}'' + 2p_{22'}'' + p_{34}'' - 5p_{43}'') = -131P + 408P''. \quad (71d)$$

Löst man diese wieder mit Hilfe von Sinusreihen auf, so ergeben sich die ersten Glieder der unbekanntenen Belastungsfunktionen zu

$$p_{21} = +0,32051 P_1 \sin \frac{\pi}{L} x; \quad (72a)$$

$$p_{22'} = -0,23223 \quad " \quad " \quad ; \quad (72b)$$

$$p_{34} = -0,32614 \quad " \quad " \quad ; \quad (72c)$$

$$p_{43} = -0,76110 \quad " \quad " \quad . \quad (72d)$$

Daraus folgen mit Hilfe der Gl. (47a, b, c) die Längsdehnungen ε in der Form

$$E \cdot \varepsilon_1 = 2,60862 P_1 \sin \frac{\pi}{L} x \quad (73a)$$

$$" \quad \varepsilon_2 = 1,82432 \quad " \quad " \quad (73b)$$

$$" \quad \varepsilon_3 = -3,81371 \quad " \quad " \quad (73c)$$

woraus sich nach Gl. (12a) und (12b) die Schubspannungen τ ergeben. Es wird

$$\begin{aligned} \tau_{24} &= + 1,3165 P_1 \cos \frac{\pi}{L} x; & \tau_{23} &= - 6,0622 P_1 \cos \frac{\pi}{L} x; \\ \tau_{42} &= + 1,4662 \quad " \quad " \quad ; & \tau_{32} &= - 5,8622 \quad " \quad " \quad ; \\ \tau_{34} &= - 22,0020 \quad " \quad " \quad ; & \tau_{12} &= + 16,2602 \quad " \quad " \quad ; \\ \tau_{43} &= - 21,8085 \quad " \quad " \quad ; & \tau_{21} &= + 15,8171 \quad " \quad " \quad ; \\ \tau_{22'} &= + 23,2839 \quad " \quad " \quad ; & \tau_{13} &= + 16,2601 \quad " \quad " \quad ; \\ \tau_{31} &= + 16,1399 P_1 \cos \frac{\pi}{L} x. & & \end{aligned} \quad (74)$$

Die Durchbiegungen ξ der einzelnen Scheiben erhält man wieder nach Gl. (26') zu

$$\begin{aligned} E \cdot \xi_{22'} &= + 282,03 P_1 \sin \frac{\pi}{L} x; \\ " \quad \xi_{24} &= + 121,76 \quad " \quad " \quad ; \\ " \quad \xi_{23} &= - 403,00 \quad " \quad " \quad ; \\ " \quad \xi_{13} &= + 647,27 \quad " \quad " \quad ; \\ " \quad \xi_{34} &= - 244,28 \quad " \quad " \quad ; \\ " \quad \xi_{12} &= + 281,30 \quad " \quad " \quad . \end{aligned} \quad (75)$$

Weitere Glieder werden für dieses Zahlenbeispiel nicht mehr entwickelt, da einerseits durch diese keine weiteren prinzipiellen Fragen geklärt werden können und andererseits die Frage der allgemeinen Konvergenz bereits in der vorhergehenden Aufgabe beantwortet wurde⁷⁾. Trägt man die Durchbiegungen ξ , wie dies in der Fig. 8f geschehen ist, zeichnerisch auf, so ergibt sich, daß der gesamte Faltwerksquerschnitt in seiner Gestalt unverändert bleibt, wie dies ja zufolge der Annahmen $\Delta = 0$, $m = \infty$ sein muß. Um die endgültigen Resultate für die ersten Glieder einer Gleichlast p zu erhalten, sind entsprechend dem ersten Zahlenbeispiel die Koeffizienten der Gl. (67a, b, c, d), (68a, b, c, d), (69), (70), (72a, b, c, d), (73a, b, c, d), (74) und (75) mit $\frac{4p}{\pi\sqrt{3}}$ zu multiplizieren.

Eine im üblichen Sinne durchgeführte schlichte Superposition der Ergebnisse des 1. und 2. Zahlenbeispiels ist unzulässig.

F. Schlußbetrachtungen.

a) Konvergenz.

Zunächst erkennt man, daß die Konvergenz der Lösungen des ersten Beispiels eine sehr gute ist. So nehmen die Beiwerte der ε -Entwicklungen für zwei an den Knoten 2 und 2' in $x = \frac{L}{2}$ angreifende gleich große Einzellasten ungefähr wie die Quadrate und für zwei an denselben Knoten angreifende Gleichlasten p ungefähr wie die Kuben der reziproken ungeraden Zahlen ab, so daß bei Berücksichtigung von drei Gliedern in den Längsspannungen σ_x im ersten Fall nur ein Fehler von $\pm 5\%$ und im zweiten Fall von nur $\pm 1\%$ verbleibt. Für die zugehörigen antisymmetrischen Laststellungen konvergieren die Lösungen in der Regel etwas besser wie die Lastentwicklungen der Gl. (49) selbst. Je geringer der Einfluß der Querverformungen Δ gegenüber den Achsdurchbiegungen ξ ist, umso besser entspricht die Abnahme der obigen Beiwerte der Abnahme der Quadrate und Kuben der reziproken ungeraden Zahlen bzw. der der Lastentwicklung Gl. (49). Wie sich aus den Gl. (55) und (56) ergibt, ist auch die Konvergenz der Verformungsbeiwerte der symmetrischen Belastung der Fig. 8b eine sehr gute. Der übrig bleibende Fehler beträgt bei den Δ für Einzellasten in $x = \frac{L}{2}$ durchschnittlich $\pm 10\%$ und für Gleichlasten durchschnittlich $\pm 5\%$.

Die Werte für die Achsdurchbiegungen ξ nehmen noch viel rascher ab. Die Abweichungen vom wahren Grenzwert betragen für die letzteren bei drei Gliedern für Einzellasten im Durchschnitt nur $\pm 0,2\%$ und für Gleichlasten im Durchschnitt sogar nur $\pm 0,04\%$. Da die Δ gegenüber den ξ klein sind, ist der Genauigkeitsgrad der letzteren für die Verformungen der Scheibenränder maßgebend. Für den antisymmetrischen Lastfall der Fig. 8c ist die Schnelligkeit der Annäherung an die Grenzwerte der Δ und ξ so wie bei den ε durchschnittlich dieselbe, wie bei der Lastentwicklung Gl. (49) selbst. Die Konvergenz der Reihenentwicklung für die Schubspannungen ist ebenfalls sehr gut. Auch hier betragen bei Berücksichtigung von drei Gliedern die übrig bleibenden Fehler bei dem symmetrischen Lastfall im Mittel nur $\pm 5\%$ bzw. $\pm 1\%$ und beim antisymmetrischen Lastfall im Mittel $\pm 10\%$.

⁷⁾ Siehe Abschnitt F.

bezw. $\pm 2\%$, wobei die ersten Zahlen für Einzellasten in $x = \frac{L}{2}$ und die zweiten Zahlen für Gleichlasten gelten.

Ist die Belastung zur Tragswerksachse $C-C$ gegenspiegelgleich, so verschwinden im Gegensatz zu vorhin die Glieder mit ungeradem k . Der Grad der Konvergenz der übrig bleibenden Glieder mit geradem k ist im wesentlichen genau so groß wie bei Belastungen, welche zur Achse $C-C$ symmetrisch sind. Nur treten an Stelle der reziproken Werte der ungeraden Zahlen jetzt die reziproken Werte der geraden Zahlen. Da die Amplituden für die Glieder mit geradem k kleiner sind als bei den Gliedern mit ungeradem k , verringern sich auch die im vorigen Absatz angegebenen Fehlergrenzen entsprechend. Da jede beliebige Linearlast aus der algebraischen Addition eines zur Achse $C-C$ symmetrischen und eines zur Achse $C-C$ antisymmetrischen Lastfalles folgt, sind auch die Konvergenzverhältnisse für jeden Lastfall befriedigend geklärt. Aus Raummangel wird die Berechnung für die Glieder mit geradem k hier nicht wiedergegeben. Durch eine notwendig werdende Berücksichtigung des Einflusses der Q auf die ξ wird diese gute Konvergenz nicht beeinträchtigt.

b) 1. Beispiel.

Die Empfindlichkeit der Rechnung ist umso größer, je geringer der Einfluß der Querverformungen Δ ist. Sie ist bei dem symmetrischen Lastfall kleiner als bei dem antisymmetrischen, weshalb auch bei letzterem mehr Dezimalstellen berücksichtigt werden mußten.

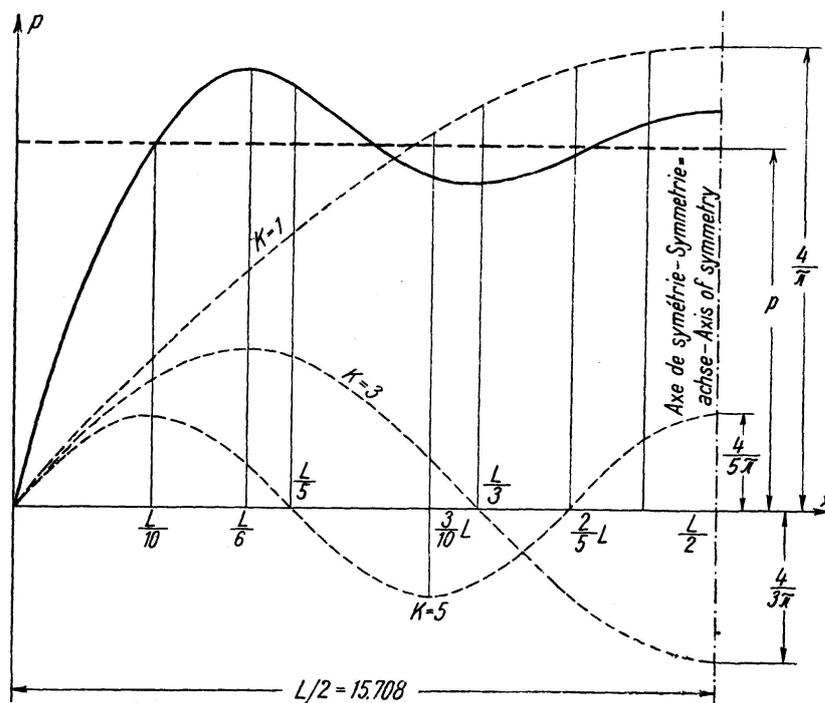


Fig. 8 a

Der Einfluß der Querverformungen Δ ist beim symmetrischen Lastfall gegenüber den Achsendurchbiegungen ξ sehr klein und könnte vernachlässigt werden. Für die antisymmetrische Belastung ist er jedoch sehr groß und darf unter keinen Umständen außer Acht gelassen werden.

Betrachtet man die Fig. 8b, so findet man, daß für die spiegelgleiche Belastung die Verteilung der bezogenen Längsdehnungen ε und der Längsspannungen σ_x mit einer nahezu vollständigen Genauigkeit eben ist, was bei der in Fig. 8c dargestellten gegenspiegelgleichen Belastung durchaus nicht der Fall ist. Da jedoch die σ_x der Fig. 8b ungefähr 100—300 mal so groß sind als die entsprechenden σ_x der Fig. 8c, folgt, daß die Spannungsverteilung für eine allein im Knoten 2 angreifende Linienlast $+2P\sqrt{3}$ ebenfalls eine nahezu vollkommen ebene ist, d. h. der in Fig. 7a und 7b dargestellte Hohlträger verteilt die Lasten in der Querrichtung fast vollkommen gleichmäßig, ganz gleichgültig, in welchem Knoten die Kräfte angreifen.

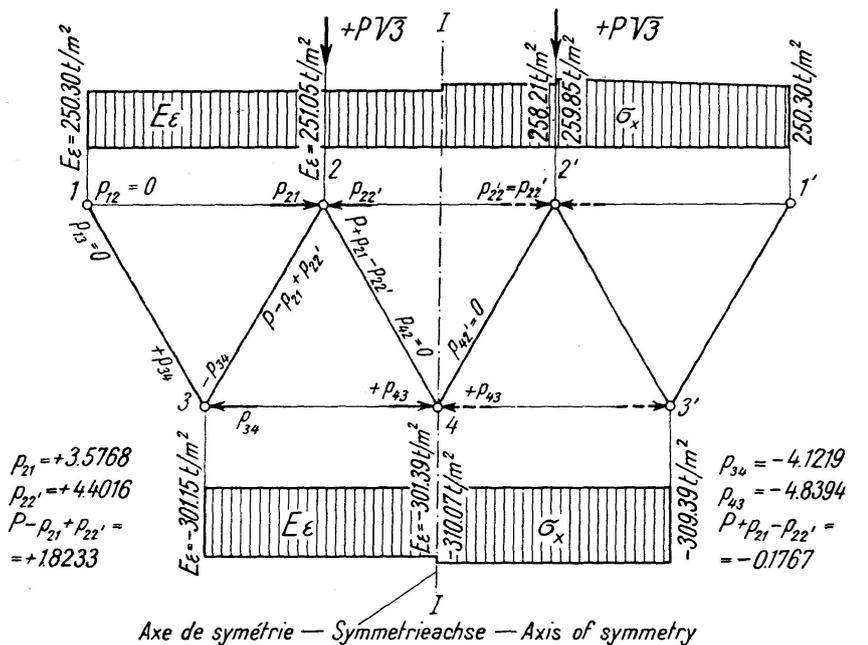


Fig. 8 b

In den Fig. 8d und 8e ist die Verformung des Querschnittes in $x = \frac{L}{2}$ für den symmetrischen und für den antisymmetrischen Lastfall dargestellt. Wie aus diesen Figuren ersichtlich ist, senkt sich dieser Querschnitt zufolge der ersten Belastung parallel zu sich selbst. Zufolge der zweiten Belastung tordiert der Querschnitt leicht im entgegengesetzten Sinne des Uhrzeigers, verschiebt sich etwas nach links und verkrümmt seinen Obergurt s-förmig. Charakteristisch ist die Quetschung der linken und die Zerrung der rechten Trägerhälfte. Da die in der Fig. 8d angegebenen Durchbiegungen ungefähr 1000 mal so groß sind als die der Fig. 8e, senkt sich auch für eine im Knoten 2 allein angreifende Last der Querschnitt nahezu parallel zu sich selbst, tordiert nur leicht im entgegengesetzten Sinne des Uhrzeigers und verschiebt sich nur etwas nach links, was der gleichmäßigen Längsspannungsverteilung für denselben Belastungsfall entspricht. Damit ist klar erwiesen, daß es sich hier um ein Tragwerk mit wirklich idealen Querverteilungseigenschaften handelt.

Während für den antisymmetrischen Lastfall die zuletzt behandelten statischen Wirkungsgrößen bedeutend kleiner sind als für den symmetrischen Lastfall, trifft dies für die an den Scheibenrändern angreifenden Schubspan-

nungen durchaus nicht zu. Im Gegenteil, es sind, wie aus den Gl. (59) und (60) hervorgeht, die Schubspannungen in beiden Fällen von nahezu gleicher Größenordnung. Man kann also bei der Berechnung der Schubspannungen solcher Tragwerke den Einfluß der durch die antisymmetrische Belastung hervorgerufenen Torsion nicht vernachlässigen. Die hervorragenden querverteilenden Eigenschaften werden eben gerade durch das Auftreten der großen Schubspannungen beim antisymmetrischen Lastfall bedingt. Dieses Verhalten ist durchaus verständlich. Die Natur gibt nichts umsonst. Die überaus günstige Querverteilung wird eben durch eine gründliche Mobilisation der Schubwiderstände erkauft. Setzt man $m = \infty$, so reduzieren sich die Gl. (45) und (48) auf Differentialgleichungen vierter Ordnung, in welchen

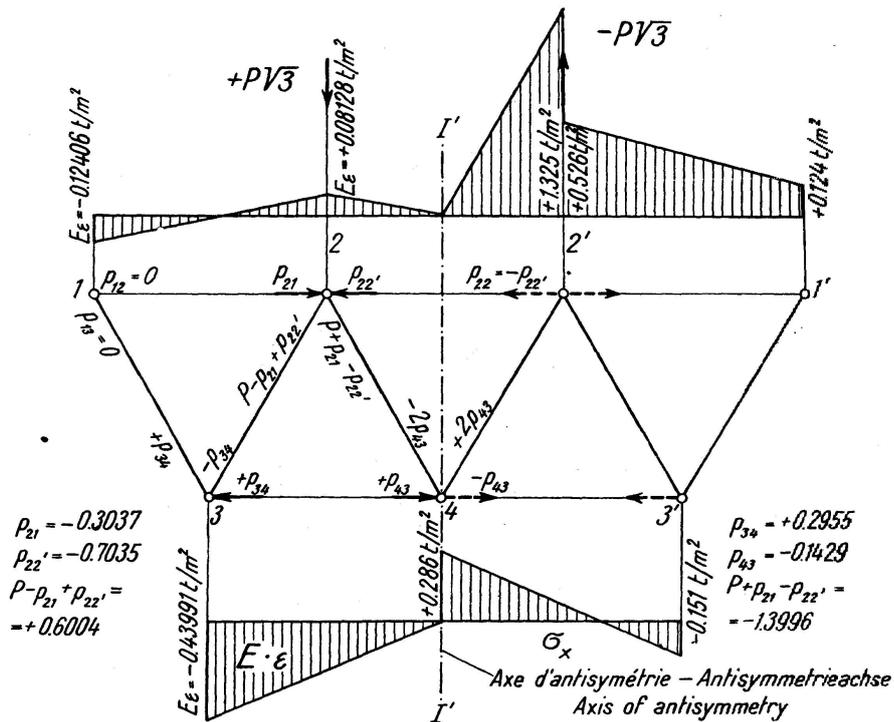


Fig. 8 c

entsprechend der Fußnote der Gl. (37b) die Glieder der zweiten Ableitungen fehlen. Vernachlässigt man auch noch den Einfluß der Δ , so degenerieren, da die p^{VI} mit den Δ verschwinden, die Gl. (45) und (48) auf je zwei lineare Gleichungen mit vier Unbekannten. Aus diesen sind aber die p nicht bestimmbar. Wählt man ein zweites mal den im Abschnitt D gezeigten, über die Kontinuitätsbedingungen 1. Art führenden Weg und setzt in den Gl. (41) $m = \infty$, so werden die rechten Seiten der ersten plus zweiten und der dritten plus vierten Gleichung gleich $-\beta_2 \cdot 2P$ bzw. gleich $+\beta_2 \cdot 2P$, d. h. es sind für $m = \infty$ nur zwei von den Gl. (41) voneinander unabhängig. Diese beiden reichen aber für die Bestimmung der vier unbekanntenen p ebenfalls nicht aus. Führt man innerhalb der Gl. (41) die eben angegebenen Additionen durch und setzt entsprechend der nach dem Lehrsatz Seite 152 vorhandenen ebenen Verteilung $\epsilon_1 = \epsilon_2 = a$ und $\epsilon_3 = \epsilon_4 = b$, so folgt $15a + 3b = -2\beta_2 P$; $3a + 12b = 2\beta_3 P$, woraus sich $\frac{\epsilon_1}{\epsilon_3} = \frac{\epsilon_2}{\epsilon_4} = -\frac{5}{6}$ ergibt, was mit der Schwerpunktlage des Querschnittes genau und mit den in der Fig. 8b an-

gegebenen Ergebnissen hervorragend übereinstimmt. Setzt man in Gl. (46) $m = \infty$ und addiert die doppelte dritte zur einfachen zweiten Gleichung, so ist die rechte Seite dieser Kombination gleich der dreifachen negativen rechten Seite der ersten Gleichung, d. h. es sind hier für $m = \infty$ von den Gl. (46) nur zwei voneinander unabhängig, was für die Bestimmung der vier unbekannt p wieder nicht hinreicht. Addiert man zur Summe der ersten und zweiten Gleichung die doppelte Summe der ersten und dritten, so folgt $15\varepsilon_1 + 12\varepsilon_2 + 16\varepsilon_3 = 0$, woraus sich $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = \varepsilon_3 = 0$ ergibt, ein Ergebnis, welches mit der Gleichgewichtsbetrachtung am Tragwerksabschnitt übereinstimmt, da die σ_x infolge der Antimetrie alle um eine lotrechte Achse drehen, die parallel zu den Lasten und Auflagerreaktionen verläuft,

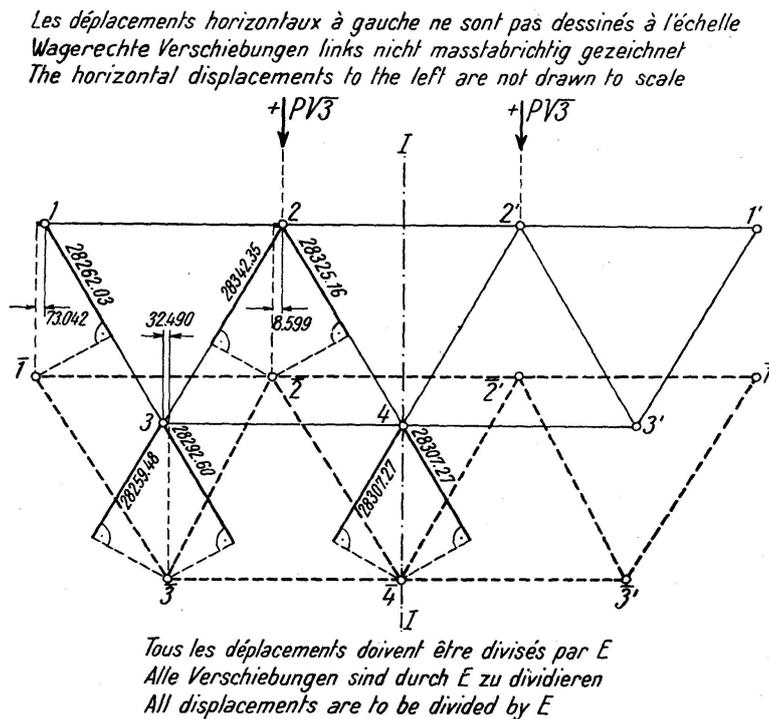


Fig. 8 d

das heißt die σ_x müssen verschwinden. Die in einem Querschnitt liegenden Q gehorchen drei ebenen Gleichgewichtsbedingungen, welche jedoch infolge der Gl. (8c) schon in den allgemeinen Gl. (36a) und (36b) enthalten sind. Sie liefern also keine neuen Bedingungsgleichungen für die p . Man sieht also, daß sich die im Abschnitt D allgemein aufgestellte Behauptung, die p und τ seien bei Unterdrückung der Δ und des Einflusses der Querkräfte Q auf die Durchbiegungen ξ nicht eindeutig bestimmbar, bei dem in diesem Abschnitt behandelten Beispiel voll bestätigt.

In den Gl. (59) sind die τ_{23} bis τ_{31} und τ_{34} gegenüber den anderen τ sehr groß. Diese Erscheinung findet ihre Erklärung in der Bildung einer sich über 3 2 2' 3' erstreckenden Sprengwerkswirkung. Alle innerhalb dieses Trapezes liegenden τ sind klein, die am Rande und außerhalb liegenden sehr groß. Beim antimetrischen Lastfall verteilen sich die τ , wie aus den Gl. (60) ersichtlich ist, so, daß die den Lastangriffspunkten am nächstliegenden die größten Werte erhalten.

Wir machen noch darauf aufmerksam, daß bei den Verformungen quer zur Tragswerksachse der Einfluß der Poisson'schen Zahl oft größer ist, als der Einfluß der Querbelastungen p selbst, sodaß, wie dies aus der Fig. 8d ersichtlich ist, die Obergurtnoten 1, 2, 2', 1' von der Mitte nach außen rücken, obwohl die Querbelastungen p_{21} und $p_{22'}$ in den Scheiben 12 und 22' Druck erzeugen. Die umgekehrte Erscheinung kann beim Untergurt festgestellt werden.

c) 2. Beispiel.

Zunächst erkennen wir, daß für beide Belastungsfälle die Elastizitätsgleichungen die Gestalt von linearen Differentialgleichungen 2. Ordnung, so wie wir es auf Seite 151 allgemein bewiesen haben, annehmen. Im Gegensatz zur vorigen Aufgabe ist für beide Belastungsfälle die Empfindlichkeit der Rechnung gleich gering. Aus den Gl. (68a, b, c, d) ergibt sich,

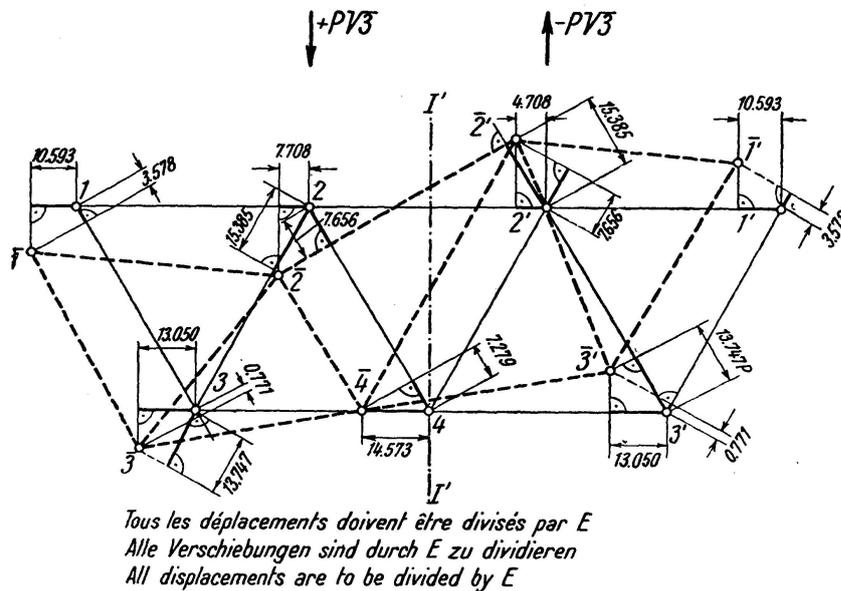


Fig. 8 e

daß auch hier für die symmetrische Last die Verteilung der Längsspannungen und der Längsdehnungen eine fast ebene ist. Weiters folgt aus den Gl. (70), daß infolge der Berücksichtigung des Einflusses der Querkräfte Q auf die Durchbiegungen ξ diese gegenüber dem 1. Beispiel um etwa 3% größer werden. Dasselbe gilt von den Längsdehnungen ε . Für diese beiden Wirkungsgrößen ist also der Einfluß des Schubmoduls sehr gering. Ganz anders verhält es sich jedoch damit bei den Schubspannungen τ , deren Größe und Verteilung eine vollständig andere wird. Die vorhin dargelegte sprengwerkartige Wirkung entfällt. Die Gesamtquerkraft des Faltschnittes wird von den aufrechtstehenden Scheiben übernommen, wobei die mittleren, das sind die dem Lastangriff naheliegenden, Elemente etwas mehr abbekommen als die seitlichen.

Betrachten wir nun den antimetrischen Lastfall, so ersehen wir aus den Gl. (73a, b, c), daß bei Berücksichtigung des Einflusses des Schubmoduls G auf die ξ , selbst bei Vernachlässigung der Δ und der Einwirkung der Poisson'schen Zahlen, die Faltschnittes nicht eben bleiben, son-

dem sich in geringem Maße verwölben. Setzt man in den Gl. (65a' b', c', d') die $\varepsilon=0$, so erhalten wir vier lineare algebraische Gleichungen mit den vier Unbekannten p_{12} , $p_{22'}$, p_{34} und p_{13} . Löst man diese nach den p auf, so ergeben sich Werte, welche die Gl. (47a, b, c) nicht befriedigen, wenn man in den letzteren β_1 und ε Null setzt. Da die Gl. (47a, b, c) letzten Endes der Ausdruck für die Gleichgewichtsbedingungen Gl. (27) sind, ergibt sich, daß es selbst für den Fall der reinen Torsion ohne Längsdehnungen keine allen Bedingungen genügende Lösung gibt. Ein Ebenbleiben der Falwerkquerschnitte ist eben, wie wir es bereits auf Seite 152 allgemein gezeigt haben, nur dann möglich, wenn (außer der notwendigen und hinreichenden Bedingung, daß das Falwerk im Querschnitt die Figur eines stabilen Fachwerkes aufweisen muß) der Einfluß der Querkräfte Q und der Poisson'schen Zahl auf die Durchbiegungen ξ verschwindet und die $\Delta=0$ werden.

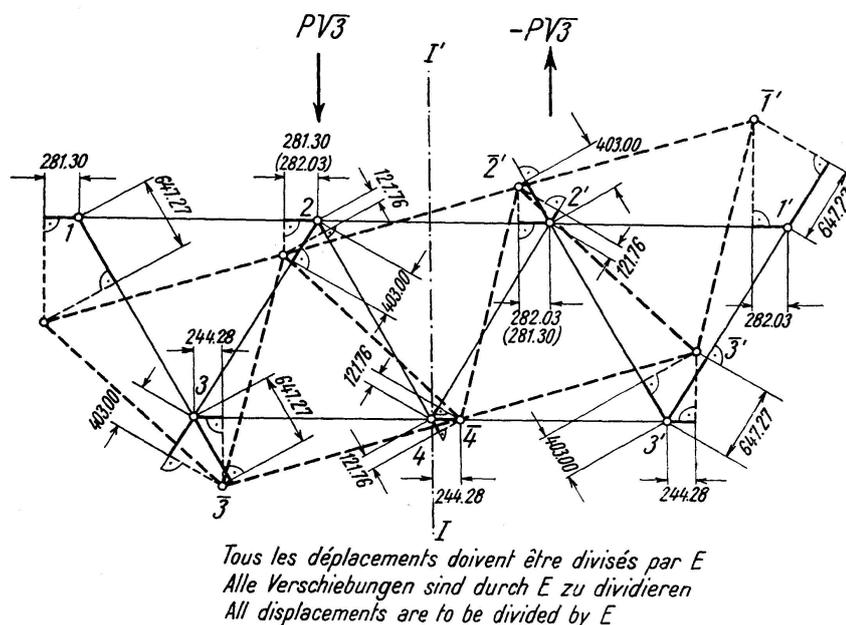


Fig. 8 f

Aus den Gl. (75) ersehen wir, daß die zum antimetrischen Lastfall gehörigen Durchbiegungen ungefähr 40 bis 50 mal so groß sind als beim gleichen Lastfall des 1. Beispiels. Da sie aber gegenüber den Durchbiegungen des symmetrischen Lastfalls nur ungefähr 1% betragen, wird sich auch bei diesem Beispiel der Mittelquerschnitt des Falwerkes nahezu vollkommen parallel zu sich selbst nach abwärts verschieben, so daß bei diesem Hohlträger auch bei Berücksichtigung des Einflusses der Q auf die Durchbiegungen ξ praktisch eine vollkommene Querverteilung der Lasten eintritt. Aus den Gl. (74) erkennt man, daß sich auch für den antimetrischen Lastfall die Größe und Verteilung der Schubspannungen τ gegenüber dem 1. Beispiel vollständig ändert. Während im 1. Beispiel hauptsächlich die dem Kräftepaar benachbarten Scheiben die größten Schubspannungen erhielten, wird bei dieser Aufgabe das Torsionsmoment hauptsächlich von den äußeren Scheiben aufgenommen, während die Füllungsscheiben nur geringe Scherspannungen erleiden. Abschließend können wir also sagen, daß die Berücksichtigung des Einflusses des Schubmoduls G

die Längsspannungen, Längsdehnungen und Durchbiegung nur sehr wenig beeinflusst. Diese Wirkungsgrößen vermehren sich z. B. in dieser Aufgabe um nur ungefähr 1%. Bei der Berechnung der Schubspannungen ist aber die Einschaltung des Moduls G unbedingt erforderlich. Weiters bemerken wir, daß, wie sich aus den Gl. (67a, b, c, d) und (72a, b, c) ergibt, bei Berücksichtigung des Einflusses von G die Querbelastungen p beim symmetrischen Lastangriff auf ungefähr $1/10$ sinken, beim antimetrischen Fall jedoch in der gleichen Größenordnung verbleiben.

d) Wahl der Rechnungsart.

Das erste Zahlenbeispiel sollte den Einfluß der Dehnungen Δ quer zu den Scheibenachsen und der Poisson'schen Querdehnungszahlen m demonstrieren. Man erkennt sehr leicht, daß dieser in dem vorliegenden Beispiel so klein ist, daß man ihn hätte ruhig vernachlässigen können. Dies trifft aber nur für Hohlträger zu, deren Querschnittsbreite im Vergleich zur Querschnittshöhe nicht allzu groß ist, wie dies bei dem in Fig. 7a dargestellten Tragwerk zutrifft. Der geringe Einfluß der Δ und der m stimmt mit der geringen Verformbarkeit des Querschnittes vollständig überein (Fig. 8d und 8e). Bei Hohlträgern, deren Querschnittsbreite im Vergleich zur Querschnittshöhe sehr groß ist, ist die Verformbarkeit in der Querrichtung jedoch schon so groß, daß der Einfluß der Δ und der m nicht mehr vernachlässigt werden darf. Erinnern wir uns noch der großen Bedeutung des Schubmoduls G für die Berechnung der Schubspannungen τ , so können wir folgendes aussagen:

1. Hohlträger mit wenig verformbaren Querschnitten können nach dem in Beispiel 2 eingeschlagenen Weg berechnet werden.
2. Die Berechnung von Hohlträgern mit stark verformbaren Querschnitten muß jedoch unter Berücksichtigung der Längenänderungen Δ quer zu den Scheibenachsen, der Querdehnungszahlen m und der Schubmodule G durchgeführt werden.

Ist das Verhältnis $\frac{2h}{L}$ der einzelnen Scheiben gedrungen, so ist es manchmal ratsam, für die Durchbiegungen ξ die genaue Form Gl. (26) zu benutzen.

Wir erwähnen noch, daß, wie sich aus Beispiel 2 ergibt, bei Berücksichtigung des Schubmoduls G die Querbelastungen p bestimmbar sind, auch dann, wenn die Δ und m unterdrückt werden.

e) Allgemeines.

Hohlträger mit rahmenartigem Querschnitt (Fig. 1) haben bei weitem keine so günstige Querverteilung als Faltwerke, welche im Querschnitt die Figur eines stabilen Fachwerkes aufweisen. Man muß bei diesem die günstige Querverteilung durch Einbau von steifen Querrahmen erzwingen.

Durch diese Studie ist auch die Torsions- und Schubtheorie der dünnwandigen, offenen und geschlossenen Querschnitte und zwar mit und ohne Querschnittsverwölbung einer vollständigen Behandlung zugeführt. Es ist hier im Gegensatz zu den bisherigen diesbezüglichen Untersuchungen der Einfluß der Querschnittsverformung und die Art und Weise, wie die Torsionsmomente bzw. Querkräfte in die Querschnitte eingeführt werden, berücksichtigt. Außerdem sind die quer zu den Scheibenachsen verlaufenden Spannungen berechenbar.

In dieser Abhandlung ist die Verteilung der Längsspannungen σ_x innerhalb der einzelnen Scheiben als geradlinig angenommen. Handelt es sich um Faltwerke, die aus Scheiben mit gedrungenem Verhältnis $\frac{2h}{L}$ zusammengesetzt sind, so ist die Verteilung der Längsspannungen mit Hilfe von Airy'schen Spannungsfunktionen genau zu erfassen. Die daraus resultierende exakte Membrantheorie der Faltwerke wird der Gegenstand einer meiner weiteren Abhandlungen sein.

Zusammenfassung.

In dieser Arbeit werden die Hohlträger als Faltwerke aufgefaßt. Man kommt dadurch dem tatsächlichen Verhalten solcher Tragwerke am nächsten. Zuerst wird die allgemeine Theorie der gelenkigen, mehrteiligen Faltwerke, das sind solche, bei welchen in einem Knoten mehr als zwei Scheiben zusammenstoßen, in einer neuen Form unter Zugrundelegung zweier Kontinuitätsbedingungen wiedergegeben. Dabei wird der Einfluß der Poisson'schen Zahl m , der Einfluß der achsnormalen Normalspannung σ_y , und der der Schubspannungen τ berücksichtigt. Entsprechend der NAVIER'schen Biegelehre wird der Verlauf der achsparallelen Normalspannungen σ_x von Faltwerksknoten zu Faltwerksknoten geradlinig angenommen. Es ergeben sich die dazugehörigen Elastizitätsgleichungen als simultane, lineare Differentialgleichungen sechster Ordnung, welche durch gut konvergierende FOURIER'sche Reihen integriert werden. Bei der Durchführung der beiden Rechenbeispiele wurde vom Belastungsumordnungsverfahren mit Erfolg Gebrauch gemacht. Die Frage, wann bei einem Hohlträger die Verteilung der achsparallelen Spannungen σ_x über den gesamten Faltwerksquerschnitt eine ebene ist, wird eingehend behandelt. Sie tritt mit Ausnahme von speziellen Belastungsfällen nur dann ein, wenn der Faltwerksquerschnitt die Figur eines unverschieblichen Fachwerkes aufweist und wenn der Einfluß der achsnormalen Dehnungen Δ , sowie der Einfluß der Querdehnungszahl m und der der Querkräfte Q auf die Durchbiegungen ξ vernachlässigt wird. Alle Punkte eines Querschnittes solcher Hohlträger senken sich nahezu um das gleiche Maß, ganz gleichgültig, wie die Lasten in der Querrichtung verteilt sind. Es handelt sich somit hier um ein Tragsystem, welches die Lasten in achsnormaler Richtung praktisch vollkommen gleichmäßig verteilt. In dem durchgeführten Rechenbeispiel ist die Abweichung nicht einmal 1%. Bei Torsionsproblemen darf der Einfluß der Querkräfte nicht unterdrückt werden, da man sonst zu ganz falschen Ergebnissen bezüglich der Schubspannungen kommt. Durch diese Studie ist auch die Torsions- und Schubtheorie der dünnwandigen, offenen und geschlossenen Querschnitte und zwar mit und ohne Querschnittsverwölbung einer vollständigen Behandlung zugeführt. Es ist hier, im Gegensatz zu den bisherigen diesbezüglichen Untersuchungen, der Einfluß der Querschnittsverformung und die Art und Weise, wie die Torsionsmomente bzw. Querkräfte in das Tragwerk eingeführt werden, berücksichtigt. Außerdem sind die quer zu den Scheibenachsen verlaufenden Spannungen berechenbar.

Résumé.

Ce travail contient une théorie des poutres creuses traitées en « toits plissés ». Cette interprétation s'adapte particulièrement bien à l'étude du comportement effectif de tels systèmes. En premier lieu figure la théorie

générale des «toits plissés» multiples articulés; ils sont caractérisés par le fait que le nombre de disques qui se coupent en une arête dépasse deux. La théorie elle-même est nouvelle et repose sur deux conditions de continuité; en plus, elle tient compte de l'influence du nombre m de POISSON, des contraintes σ_y normales à l'axe et des contraintes en cisaillement τ . D'après la théorie de la flexion de NAVIER, la variation des contraintes σ_x parallèles à l'axe peut être supposée linéaire entre chaque arête des «toits plissés». Il en résulte les équations d'élasticité correspondantes sous forme d'équations différentielles linéaires simultanées du 6ème ordre; celles-ci sont intégrées au moyen de séries de FOURIER qui convergent rapidement. Les deux exemples numériques qui suivent mettent en évidence le procédé avantageux de la «superposition des états de charge». La question, à savoir dans quel cas on peut admettre, pour une poutre creuse une répartition plane des contraintes σ_x parallèles à l'axe sur la section totale d'un «toit plissé», est étudiée avec beaucoup de soin. Ceci n'a lieu, exception faite pour quelques cas de charges particuliers, que quand la section du «toit plissé» a la forme d'une poutre réticulée non-déplaçable et à condition que l'on néglige l'influence des extensions Δ normales à l'axe, du nombre de POISSON m et des efforts tranchants Q sur les flexions ξ . Ces conditions remplies, tous les points d'une section s'abaissent approximativement dans la même mesure indépendamment de la répartition en travers des charges. Il s'agit par conséquent ici d'un système qui répartit les charges pratiquement de manière égale en direction perpendiculaire à l'axe. L'exemple numérique traité montre un écart de moins de 1%. S'il s'agit de problèmes de torsion, l'influence des efforts tranchants ne peut être négligé, car cela fausserait complètement les contraintes de cisaillement. Ce mémoire permet de traiter de manière complète la théorie de la torsion et du cisaillement des sections minces, fermées et ouvertes, en tenant compte ou non du bombement de la section. Contrairement aux recherches habituelles, il est tenu compte ici de la déformation de la section et de la manière dont les moments de torsion et les efforts tranchants sont introduits dans le système. De plus, les contraintes transversales aux axes des disques sont accessibles au calcul.

Summary.

In this paper hollow beams are conceived as being made up of a shed-type system. This gives results which approximate most closely to the actual behaviour of such supporting structures. First of all the general theory of a multiple articulated shed-type system, — that is to say of one in which more than two plates meet together at an assemblage point, — is given in a new form based on two conditions of continuity. Consideration is also taken of the effect of the POISSON number m , of the stresses σ_y normal to the axis, and of the shear stresses τ . According to the NAVIER theory of bending, the variation in the normal stresses σ_x parallel to the axis, from one assemblage point to another of the shed-type system, is assumed to be rectilinear. From this are obtained the respective elasticity equations in the form of simultaneous, linear differential equations of the 6th order, which are integrated by means of quickly converging FOURIER series. In calculating the two numerical examples here given, successful use is made of the method of superposing the loaded states. A careful examination is made regarding the question as to when plane distribution occurs in a hollow beam of the stresses σ_x parallel to the axis over

the whole cross-section of the shed-type system. With the exception of quite special cases of loading, this happens only when the cross-section of the shed-type system has the form of a non-displaceable lattice-work system and when the influence of the extensions Δ normal to the axis, as well as the influence of the coefficient m of transverse extensions and the influence of the transverse forces Q on the deflections ξ are neglected. Every point in a cross-section of such hollow beams is lowered by approximately the same amount, no matter how the loads are distributed in the transverse direction. Here, consequently, we have a supporting system which distributes the loads practically quite uniformly in a direction normal to the axis. The deviation from this uniformity is less than 1% in the given numerical example. In the case of torsional problems the influence of the transverse forces may not be neglected, otherwise quite erroneous conclusions would be drawn with respect to the shearing stresses. By means of this investigation the theory of torsion and shear in thin-walled open and closed cross-sections can be fully dealt with, account being taken, or not, of the hogging of the cross-section. Here, in contrast to the manner of research hitherto usual, consideration is paid to the influence of deformation of the cross-section and the way in which the twisting moments or transverse forces are introduced into the supporting system. In addition, it is possible to calculate the stresses running transverse to the axes of the plates.

Leere Seite
Blank page
Page vide