

# Berechnung der Beulspannungen gedrückter Rechteckplatten

Autor(en): **Stüssi, F.**

Objektyp: **Article**

Zeitschrift: **IABSE publications = Mémoires AIPC = IVBH Abhandlungen**

Band (Jahr): **8 (1947)**

PDF erstellt am: **21.07.2024**

Persistenter Link: <https://doi.org/10.5169/seals-8894>

## **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern.

Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden.

Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

## **Haftungsausschluss**

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

# BERECHNUNG DER BEULSPANNUNGEN GEDRÜCKTER RECHTECKPLATTEN

CALCUL DES CONTRAINTES DE VOILEMENT DANS LES PLAQUES RECTANGULAIRES COMPRIMÉES

CALCULATING THE BUCKLING STRESSES OF PRESSED RECTANGULAR SLABS

Prof. Dr. F. STÜSSI, Generalsekretär für Stahlbau der I. V. B. H.,  
Eidg. Techn. Hochschule Zürich.

## 1. Problemstellung

Wir betrachten eine an den Längsrändern beliebig gelagerte und durch beliebig verteilten Längsdruck  $\sigma_x \cdot h$  beanspruchte Rechteckplatte der Stärke  $h$  (Fig. 1). Bei einer Ausbeulung  $w$  der Platte treten Ablenkungskräfte  $p_a$  des Längsdruckes,

$$p_a = -\sigma_x \cdot h \cdot \frac{\partial^2 w}{\partial x^2},$$

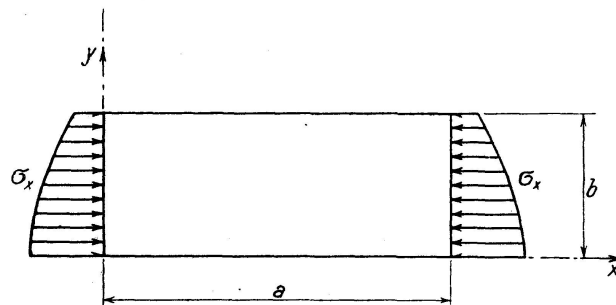


Fig. 1.

auf, die mit den elastischen Widerständen  $p_i$  der Platte im Gleichgewicht sein müssen; für elastisches Beulen lautet diese Gleichgewichtsbedingung<sup>1)</sup>

$$\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2 \cdot \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \cdot \partial y^2} + \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} + \frac{\sigma_x \cdot h}{N} \cdot \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = 0, \quad (1)$$

wenn wir mit  $N$  die Biegesteifigkeit der Platte,

$$N = \frac{E \cdot I \cdot h^3}{12 \cdot (1 - \nu^2)}, \quad (2)$$

bezeichnen. Setzen wir, was wohl für alle praktischen Anwendungsfälle zutreffend sein dürfte, gelenkig gelagerte Querränder voraus, so kann beim zu untersuchenden Fall des Längsdruckes für Gleichung (1) der Lösungsansatz<sup>1)</sup>

<sup>1)</sup> S. z. B.: S. TIMOSHENKO, Theory of Elastic Stability, New York 1936.

$$w = Y \cdot \sin \frac{m \pi x}{a} \quad (3)$$

angeschrieben werden; die von der Verteilung des Längsdruckes und Auflagerungsart der Längsränder abhängige Funktion  $Y$  stellt die Form der Ausbeulung über die Plattenbreite  $b$  dar. Durch Einsetzen der Ausbeulung  $w$  nach Gleichung (3) und ihrer Ableitungen in die Gleichgewichtsbedingung (1) erhalten wir, unter Einführung der Bezeichnungen

$$\frac{\partial^2 Y}{\partial y^2} = Y'', \quad \frac{\partial^4 Y}{\partial y^4} = Y''''.$$

die Ausgangsgleichung unseres Beulproblems zu

$$\frac{m^4 \cdot \pi^4}{a^4} \cdot Y - 2 \cdot \frac{m^2 \cdot \pi^2}{a^2} \cdot Y'' + Y'''' = \frac{m^2 \cdot \pi^2}{a^2} \cdot \frac{\sigma_x \cdot h}{N} \cdot Y. \quad (4)$$

Wir drücken nun die Längsspannung  $\sigma_x$  in der Form

$$\sigma_x = \varphi \cdot k \cdot \sigma_E = \varphi \cdot k \cdot \frac{\pi^2 N}{h \cdot b^2} \quad (5)$$

aus, wobei der Zahlenfaktor  $k$  den sogenannten Beulwert bedeutet und die Verteilzahl  $\varphi$  die Verteilung der Spannungen  $\sigma_x$  über die Plattenbreite  $b$  charakterisiert; mit den Abkürzungen

$$\beta = \frac{m \cdot b}{a} \quad \text{und} \quad \mu = \frac{\pi^2 \beta^2}{b^2}$$

erhalten wir aus Gleichung (4) die Grundgleichung unseres Problems in der Form

$$Y'''' - 2\mu \cdot Y'' + \mu^2 \cdot Y = \varphi \cdot k \cdot \frac{\mu^2}{\beta^2} \cdot Y. \quad (6)$$

Die Lösung dieser Beulgleichung liefert den Beulwert  $k$ . Eine mathematische Lösung ist nur für die einfachsten Grundfälle leicht möglich. Wir stellen uns im Folgenden die Aufgabe, ein baustatisches Lösungsverfahren anzugeben, das für beliebige Verteilung  $\varphi$  des Längsdruckes und für beliebige Lagerung der Längsränder stets in der gleichen Form anwendbar ist.

## 2. Die baustatische Lösung der Grundgleichung

Eine baustatische Lösung der Grundgleichung (6) ergibt sich daraus, daß wir in der Baustatik den Zusammenhang zwischen einer Funktion  $Y$  und ihrer zweiten Ableitung  $Y''$  sehr einfach durch die Seilpolyongleichung ausdrücken können. Bei gleichen Intervallen  $\Delta y$  und wenn wir den Verlauf der stetigen Funktionen  $Y''$  und  $Y''''$  je über ein Doppelfeld parabelförmig voraussetzen, lauten die uns hier interessierenden Seilpolyongleichungen (Parabelformeln) für einen Knotenpunkt  $m$ <sup>2)</sup>

$$Y_{m-1} - 2Y_m + Y_{m+1} = \frac{\Delta y^2}{12} \cdot (Y''_{m-1} + 10Y''_m + Y''_{m+1}) \quad (7a)$$

<sup>2)</sup> S. z. B.: F. Stüssi, Baustatik I, Basel 1946.

$$\text{und} \quad Y''_{m-1} - 2Y''_m + Y''_{m+1} = \frac{\Delta y^2}{12} \cdot (Y''''_{m-1} + 10Y''''_m + Y''''_{m+1}); \quad (7b)$$

die beiden Seiten dieser Gleichungen stellen je  $\Delta y$ -fache Knotenlasten dar.

Damit sind die Hilfsmittel zur Lösung der Beulgleichung (6) eigentlich schon bereitgestellt, und auch das Lösungsverfahren ist damit im Grunde genommen schon gegeben: wir schätzen eine mit den Randbedingungen verträgliche und der Belastungsverteilung  $\varphi$  möglichst gut entsprechende Kurve  $Y$  und berechnen dazu die ( $\frac{1}{N}$ -fachen) inneren und äußeren Belastungen

$$p_i = Y'''' - 2\mu \cdot Y'' + \mu^2 \cdot Y, \quad (8a)$$

$$p_a = \varphi \cdot k \cdot \frac{\mu^2}{\beta^2} \cdot Y = k \cdot p_{0a}. \quad (8b)$$

Aus der Gleichsetzung  $p_i = p_a$  erhalten wir den Wert der Beulzahl  $k$ , der allerdings solange nur ein Annäherungswert sein wird, als die Gleichgewichtsbedingung  $p_i = p_a$  nicht in allen Punkten  $m$  erfüllt ist. Um die Gleichgewichtsbetrachtung schon mit einem möglichst zutreffenden Verlauf von  $Y$  durchführen zu können, setzen wir zunächst

$$p_i = \varphi \cdot Y_0, \quad (9)$$

wobei  $Y_0$  eine geschätzte  $Y$ -Kurve ist; bestimmen wir daraus entsprechend Gleichung (8a) eine neue Kurve  $Y$ , so stellt diese schon eine bessere Annäherung an die Lösungskurve der Beulgleichung (6) dar und wir werden deshalb auch den Beulwert  $k$  mit besserer Genauigkeit erhalten. Eine weitere Verbesserung der Genauigkeit ergibt sich aus einer Energiebetrachtung oder auch aus einer Wiederholung der Berechnung, ausgehend von der verbesserten Kurve  $Y$ .

Unsere Aufgabe besteht somit nun zunächst darin, aus der geschätzten inneren Belastung  $p_i$  nach Gleichung (9) die verbesserte Kurve  $Y$  zu finden, die mit ihren Ableitungen die Gleichung (8a) befriedigen muß. Zu diesem Zwecke formen wir Gleichung (8a) mit Hilfe der Gleichungen (7) in ein (fünfgliedriges) Gleichungssystem um.

Wir bilden zunächst die  $\Delta y$ -fachen Knotenlasten zur Belastung  $p = p_i$  nach Gleichung (8a):

$$\begin{aligned} & \frac{\Delta y^2}{12} \cdot (Y''''_{m-1} + 10Y''''_m + Y''''_{m+1}) - 2\mu \cdot \frac{\Delta y^2}{12} \cdot (Y''_{m-1} + 10Y''_m + Y''_{m+1}) \\ & + \mu^2 \cdot \frac{\Delta y^2}{12} \cdot (Y_{m-1} + 10Y_m + Y_{m+1}) = \frac{\Delta y^2}{12} (p_{m-1} + 10p_m + p_{m+1}). \end{aligned}$$

Subtrahieren wir davon die Gleichung (7b)

$$\frac{\Delta y^2}{12} (Y''''_{m-1} + 10 \cdot Y''''_m + Y''''_{m+1}) - (Y''_{m-1} - 2Y''_m + Y''_{m+1}) = 0$$

und addieren die  $2\mu$ -fache Gleichung (7a), so erhalten wir

$$\begin{aligned} Y''_{m-1} - 2Y''_m + Y''_{m+1} - 2\mu (Y_{m-1} - 2Y_m + Y_{m+1}) + \mu^2 \cdot \frac{\Delta y^2}{12} (Y_{m-1} + 10Y_m + Y_{m+1}) \\ = \frac{\Delta y^2}{12} (p_{m-1} + 10p_m + p_{m+1}). \end{aligned}$$

Wir multiplizieren diese Gleichung mit  $\frac{\Delta y^2}{12}$  und erhalten durch Subtraktion von Gleichung (7a) mit der Abkürzung

$$u \cdot \frac{\Delta y^2}{12} = \frac{\pi^2 \cdot \beta^2}{b^2} \cdot \frac{\Delta y^2}{12} = \gamma$$

die Hilfsgleichung

$$-Y_m'' \cdot \Delta y^2 + (1-2\gamma) \cdot (Y_{m-1} - 2Y_m + Y_{m+1}) + \gamma^2 \cdot (Y_{m-1} + 10Y_m + Y_{m+1}) = \frac{\Delta y^4}{144} (p_{m-1} + 10p_m + p_{m+1}) \quad (10)$$

Wir müssen nun noch den Wert  $Y_m''$  eliminieren; dies gelingt uns mit Hilfe von Gleichung (7a), wenn wir die Gleichung (10) für die Knotenpunkte  $m-1$  und  $m+1$  je einfach, für den Knotenpunkt  $m$  dagegen zehnfach anschreiben, und wir erhalten das gesuchte Gleichungssystem zu

$$\begin{aligned} & Y_{m-2} \cdot (1-2\gamma + \gamma^2) - Y_{m-1} \cdot (4+16\gamma - 20\gamma^2) + Y_m \cdot (6+36\gamma + 102\gamma^2) - Y_{m+1} \cdot (4+16\gamma - 20\gamma^2) \\ & + Y_{m+2} \cdot (1-2\gamma + \gamma^2) = \frac{\Delta y^4}{144} \cdot (p_{m-2} + 20p_{m-1} + 102p_m + 20p_{m+1} + p_{m+2}) \quad (11) \end{aligned}$$

Wir haben nun noch die zugehörigen Randbedingungen zu ermitteln.

### 3. Die Randbedingungen

Wir beschränken uns hier darauf, die Ergänzungsgleichungen für die wichtigsten Randbedingungen als Beispiele abzuleiten.

#### a) Gelenkig gelagerter Längsrand:

Bei unverschieblich gestütztem Längsrand  $A$  ist  $w_A = 0$  und damit auch

$$\underline{Y_A = 0}. \quad (12a)$$

Wenn der Rand frei drehbar ist, so ist  $M_{yA} = 0$ ; mit

$$M_y = -N \cdot \left( \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \nu \cdot \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right)$$

wird, wegen  $\frac{\partial^2 w_A}{\partial x^2} = 0$ ,

$$Y_A'' = 0.$$

Um in der Hilfsgleichung (10) den Wert  $Y_m''$  zu eliminieren, schreiben wir sie für Punkt 1 zehnfach und für Punkt 2 einfach; mit Hilfe von Gleichung (7a) finden wir die für Punkt 1 gültige Gleichung zu:

$$Y_1 \cdot (5+38\gamma + 101\gamma^2) - Y_2 \cdot (4+16\gamma - 20\gamma^2) + Y_3 \cdot (1-2\gamma + \gamma^2) = \frac{\Delta y^4}{144} (101 \cdot p_1 + 20p_2 + p_3) \quad (12b)$$

#### b) Starr eingespannter Längsrand:

Hier ist, neben  $w_A = 0$ , bzw.  $Y_A = 0$ , noch die Randbedingung

$$w'_A = 0 \quad \text{bzw.} \quad Y'_A = 0$$

zu beachten. Die Endtangente der Kurve  $Y$  können wir bei parabelförmigem Verlauf der zugehörigen „Belastungskurve“  $Y''$  anschreiben zu

$$Y'_A = \frac{-Y_A + Y_1}{\Delta y} - \frac{\Delta y}{24} (7Y''_A + 6Y''_1 - Y''_2); \quad (13)$$

die Randbedingung  $Y'_A = 0$  lautet somit

$$-\Delta y^2 (7Y''_A + 6Y''_1 - Y''_2) - 24Y_A + 24Y_1 = 0. \quad (13a)$$

Um die Werte  $Y''$  mit Hilfe der (siebenfachen) Gleichung (7a) eliminieren zu können, addieren wir zu Gleichung (13a) die 64-fache Gleichung (10) für Punkt 1 und die achtfache für Punkt 2 und finden damit die Gleichung für Punkt 1 nach Ordnen zu

$$Y_1 \cdot (18 + 60\gamma + 162\gamma^2) - Y_2(9 + 24\gamma - 36\gamma^2) + Y_3(2 - 4\gamma + 2\gamma^2) = \frac{\Delta y^2}{144} (162p_1 + 36p_2 + 2p_3). \quad (14)$$

Für den Randpunkt gilt Gleichung (12a), d. h. für den Randpunkt ist keine Gleichung anzuschreiben.

### c) Freier Längsrand:

An einem freien Längsrand ist

$$M_y = 0 \quad \text{und} \quad Q_y - \frac{\partial M_{xy}}{\partial x} = 0;$$

dies führt zu den Bedingungen

$$\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \nu \cdot \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = 0 \quad \text{bzw.} \quad \underline{Y''_A - \nu \cdot \mu \cdot Y_A = 0} \quad (15a)$$

und

$$\frac{\partial^3 w}{\partial y^3} + (2 - \nu) \cdot \frac{\partial^3 w}{\partial x^2 \cdot \partial y} = 0 \quad \text{bzw.} \quad \underline{Y'''_A - (2 - \nu) \cdot \mu \cdot Y'_A = 0}. \quad (15b)$$

Da in der Nähe eines freien Randes (im Gegensatz zu einem eingespannten Rand) die Krümmungen der Kurve  $Y$  klein sind, dürfen wir zur Bestimmung der ungeraden Ableitungen von  $Y$  etwas einfacher als nach Gleichung (13) hier linearen Belastungsverlauf annehmen und schreiben

$$Y'_A \cdot \Delta y = -Y_A + Y_1 - \frac{\Delta y^2}{12} (4Y''_A + 2Y''_1),$$

$$Y'''_A \cdot \Delta y = -Y'''_A + Y'''_1 - \frac{\Delta y^2}{12} (4Y'''_A + 2Y'''_1).$$

Setzen wir diese beiden Werte in Gleichung (15b) ein, so erhalten wir

$$-Y'''_A + Y'''_1 - \frac{\Delta y^2}{12} (4Y'''_A + 2Y'''_1) - (2 - \nu) \cdot \mu \cdot [-Y_A + Y_1 - \frac{\Delta y^2}{12} (4Y''_A + 2Y''_1)] = 0.$$

Wir eliminieren die Werte  $Y'''_A$  mit Hilfe der Gleichung (8a), darauf  $Y'''_1$  mit Gleichung (15a) und  $Y''_1$  mit Gleichung (10) und finden nach einfacher Zwischenrechnung die Bestimmungsgleichung für  $Y_A$ :

$$Y_A \cdot [1 + \gamma \cdot (22 - 26\nu) + \gamma^2 \cdot (49 - 2\nu\gamma + 4\nu - 48\nu^2)] - Y_1 \cdot [2 + \gamma(20 - 16\nu) - \gamma^2(34 - 20\nu\gamma - 8\nu)] \\ + Y_2 \cdot [1 - \gamma(2 + 2\nu) + \gamma^2(1 - 2\nu\gamma + 4\nu)] = \frac{\Delta y^4}{144} \cdot [p_A \cdot (49 - 2\nu\gamma) + p_1 \cdot (34 - 20\nu\gamma) + p_2 \cdot (1 - 2\nu\gamma)] \quad (16a)$$

Für den Punkt 1 ergibt sich entsprechend die Gleichung

$$-Y_A [2 + \gamma \cdot (20 - 12\nu) - 10\gamma^2] + Y_1 \cdot (5 + 38\gamma + 101\gamma^2) - Y_2 \cdot (4 + 16\gamma - 20\gamma^2) + Y_3 \cdot (1 - 2\gamma + \gamma^3) \\ = \frac{\Delta y^4}{144} \cdot (10p_A + 101 \cdot p_1 + 20p_2 + p_3). \quad (16b)$$

Die Querdehnungszahl  $\nu$  wirkt sich somit auf die Randbedingungen bei freiem Längsrand komplizierend aus; immerhin ist die Komplikation nur eine äußerliche oder sogar mehr scheinbare, denn sie erschwert wohl etwas die Berechnung der Vorzeichen der Gleichung 16a, auf die Auflösung des Gleichungssystems jedoch hat sie überhaupt keinen grundsätzlichen Einfluß.

#### 4. Energiebetrachtung

Es ist seit den grundsätzlichen Untersuchungen von S. TIMOSHENKO bekannt, daß eine Energiebetrachtung bei Stabilitätsproblemen auch dann schon eine sehr gute Annäherung an den genauen Wert der kritischen Belastung liefert, wenn der Verlauf der Formänderungskurven erst angenähert bekannt ist.

Auf unsere baustatische Darstellungsweise des Beulproblems der gedrückten Platte übertragen, bedeutet eine Energiebetrachtung nun nichts anderes, als daß wir den Gleichgewichtszustand  $p_i = p_a$  durch die Gleichheit von innerer und äußerer Formänderungsarbeit ausdrücken. Die Belastung  $p \cdot dx \cdot dy$  leistet während der Durchbiegungen  $Y$  eine Arbeit, die gleich der Formänderungsarbeit ist; für einen Plattenstreifen der Länge  $\Delta x = 1$  beträgt somit die innere Formänderungsarbeit

$$A_i = \int^b Y \cdot p_i \cdot dy = \int^b \varphi \cdot Y \cdot Y_0 \cdot dy;$$

die Arbeit der äußeren Belastung beträgt analog

$$A_a = \int^b Y \cdot p_a \cdot dy = k \cdot \frac{\mu^2}{\beta^2} \cdot \int^b \varphi \cdot Y^2 \cdot dy$$

und die Gleichsetzung  $A_i = A_a$  liefert die Beulzahl  $k$  zu

$$k = \frac{\beta^2}{\mu^2} \cdot \frac{\int^b \varphi \cdot Y \cdot Y_0 \cdot dy}{\int^b \varphi \cdot Y^2 \cdot dy} = \frac{\int^b Y \cdot p_i \cdot dy}{\int^b Y \cdot p_{oa} \cdot dy}. \quad (17)$$

Da Zähler und Nenner ähnlich verlaufen, können die beiden Integrale immer mit genügender Genauigkeit mit Hilfe der SIMPSONSchen Regel als Flächen berechnet werden. Es empfiehlt sich, die Beulzahl  $k$  stets nach Gleichung (17) zu berechnen, weil wir uns damit meistens eine Wiederholung der Berechnung ersparen können.

### 5. Berechnungsbeispiele

Die folgenden Beispiele sollen einerseits das entwickelte Berechnungsverfahren illustrieren und andererseits einige Hinweise auf die erreichbare Genauigkeit bzw. auf die zur Erreichung einer bestimmten Genauigkeit erforderliche Felderzahl  $n = \frac{b}{\Delta y}$  geben.

a) Biegung, Längsränder gelenkig,  $\beta = 1.5$ :

Bei diesem Belastungsfall besitzt die Verteilungszahl  $\varphi$  wechselndes Vorzeichen; wir rechnen  $\varphi$  auf der Druckseite positiv. Teilen wir die Breite  $b$  in 10 gleiche Teile  $\Delta y$  ein, so ist mit  $\beta = 1.5$  (für  $\frac{a}{b} = m \cdot \frac{2}{3}$  erhalten wir den kleinsten Beulwert  $k$ )

$$\gamma = \frac{\pi^2 \cdot \beta^2}{b^2} \cdot \frac{\Delta y^2}{12} = \frac{\pi^2 \cdot 1,5^2}{12 \cdot 10^2} = 0,0185055$$

$$\gamma^2 = 0,00034245$$

und wir erhalten folgende Vorzahlen des Gleichungssystems (11) bzw. der Gleichung (12b):

$$\begin{aligned} 6 + 36 \gamma + 102 \gamma^2 &= 6,7011, & 5 + 38 \gamma + 101 \gamma^2 &= 5,7378, \\ 4 + 16 \gamma - 20 \gamma^2 &= 4,2893, & 1 - 2 \gamma + \gamma^2 &= 0,9633. \end{aligned}$$

Wir schätzen nun eine Verformungskurve  $Y_0$  (in Tabelle 1 aus einem ersten Rechnungsgang übernommen) und bestimmen dazu die Belastungen  $p_i = \varphi \cdot Y_0$  und daraus die Belastungsglieder  $\Sigma p_i$  des Gleichungssystems (11) bzw. (12b).

Tabelle 1.

	$Y_0$	$\varphi$	$p_i$	$\Sigma p_i$	$Y_s$	$Y_A$	$Y$	$p_{oa}$	$\frac{Y}{Y_{max}}$
A	0	1,0	0		0	0	0	$\cdot 10^{-3}$	0
1	0,532	0,8	0,4256	54,078	79,32	67,38	146,70	17,862	0,5314
2	0,891	0,6	0,5346	71,220	138,89	106,73	245,62	22,430	0,8898
3	1,000	0,4	0,4000	55,502	171,84	104,21	276,05	16,806	1,0000
4	0,896	0,2	0,1792	26,726	184,41	63,24	247,65	7,538	0,8971
5	0,674	0	0	2,152	187,00	0	187,00	0	0,6774
6	0,434	-0,2	-0,0868	-10,658			121,17	-3,688	0,4389
7	0,240	-0,4	-0,0960	-12,829			67,63	-4,117	0,2450
8	0,106	-0,6	-0,0636	- 9,070			32,16	-2,937	0,1165
9	0,036	-0,8	-0,0288	- 4,277			11,94	-1,454	0,0433
B	0	-1,0	0				0	0	0
							$\frac{\Delta y^4}{144}$		

$$\Sigma = 1,2642$$

$$\Sigma = 52,440 \cdot 10^{-3}$$

Es ändert am Ergebnis der Rechnung nichts, wenn wir als Belastungsglieder des Gleichungssystems einfach die Summen  $\Sigma p_i$  statt der mit  $\frac{\Delta y^2}{144}$  multiplizierten Summen einführen; wir haben nur daran zu denken, daß unsere  $Y$ -Werte noch mit diesem Faktor zu multiplizieren sind.



Da unser Gleichungssystem symmetrisch ist (gleiche Lagerungsart beider Ränder), können wir die Belastungen in symmetrische und antimetrische Anteile aufspalten und brauchen dann das Gleichungssystem nur je bis zur Plattenmitte aufzulösen.

Tabelle 2 zeigt das in Matrixform angeschriebene Gleichungssystem und seine Auflösung nach dem abgekürzten GAUSS'schen Algorithmus; die antimetrische Gleichung für Punkt 4 ist der Tabelle unten angefügt; für die Punkte 1, 2 und 3 besitzen symmetrisches und antimetrisches Gleichungssystem gleiche Vorzeichen.

Tabelle 2.

	$Y_1$	$Y_2$	$Y_3$	$Y_4$	$Y_m$	Belastungsgl.	
						sym.	antim.
1	5,7378	-4,2893	0,9633			24,901	29,177
2	-4,2893	6,7011	-4,2893	0,9633		31,075	40,145
		-3,2065	0,7201			18,615	21,811
	—	3,4946	-3,5692	0,9633		49,690	61,956
3	0,9633	-4,2893	6,7011	-4,2893	0,9633	21,337	34,166
		0,7201	-0,1617	0,9839		-4,181	-4,898
			-3,6454			50,751	63,279
	—	—	2,8940	-3,3054	0,9633	67,907	92,547
4 sym.		0,9633	-4,2893	7,6644	-4,2893	8,034	
			0,9839	-0,2655	1,1002	-13,697	
		—	—	-3,7753		77,561	
				3,6236	-3,1891	71,898	
m			1,9266	-8,5786	6,7011	2,152	
				2,2005	-0,6431	-45,207	
				6,3781	-5,6133	126,552	
			—	—	0,4465	83,497	
4 anti- metr.		0,9633	-4,2893	5,7378			18,692
			0,9839	-0,2655			-17,078
		—	—	-3,7753			105,703
				1,6970			107,317

Die symmetrischen und antimetrischen Lösungswerte  $Y$  sind in Tabelle 1 eingetragen und superponiert; daraus ergibt sich mit

$$u^2 \cdot \frac{\Delta y^4}{144} = \gamma^2$$

die Belastung  $p_{0a}$ , wobei  $\frac{\gamma^2}{\beta^2} = 0.00015220$ .

Bilden wir einfache Ordinatensummen, so ist

$$k = \frac{1,2642}{0,05244} = 24,11$$

während die genauere Berechnung nach Gleichung (17) den Wert

$$k = \frac{495,18}{20,763} = 23,85$$

liefert; dieser Wert dürfte sicher auf drei Stellen genau sein. Da die beiden  $k$ -Werte nicht weit auseinanderliegen, ist eine Wiederholung der Berechnung überflüssig. Zum gleichen Schluß führt auch der Vergleich der in der letzten Kolonne der Tabelle 1 eingetragenen reduzierten Werte von  $Y$  mit dem geschätzten Wert  $Y_0$ .

Bei gelenkig gelagerten Rändern genügt somit auch bei ungleichmäßiger Verteilung des Längsdruckes die Einteilung der Plattenbreite  $b$  in 10 Teile  $\Delta y$  zur Erreichung einer genügenden Genauigkeit.

In Fig. 2 ist der Verlauf der Kurven  $Y$  und  $p_i = p_a = p$  veranschaulicht.

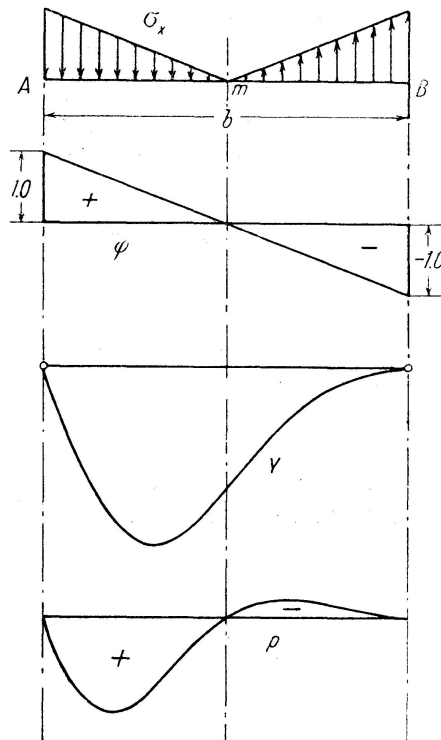


Fig. 2.

b) Gleichmäßiger Druck, Längsränder eingespannt,  
 $\beta = 1.5$ :

Auch für diesen Fall ergibt sich für  $\beta = 1.5$  annähernd der kleinste Beulwert. Die Vorzeichen der Gleichung (14) für Punkt 1 betragen mit  $\gamma = 0.0185055$ :

$$\begin{aligned} 18 + 60\gamma + 162\gamma^2 &= 19,1658 \\ 9 + 24\gamma - 36\gamma^2 &= 9,4318 \\ 2 - 4\gamma + 2\gamma^2 &= 1,9267. \end{aligned}$$

Die Vorzeichen der übrigen Gleichungen (Zwischenknotenpunkte) sind die gleichen wie im letzten Beispiel. Tabelle 3 zeigt die Durchführung der Berechnung (mit Ausnahme der Auflösung des Gleichungssystems, die analog Tabelle 2 durchgeführt wird), wobei aus Symmetriegründen nur die halbe Plattenbreite zu berücksichtigen ist.

Tabelle 3.

	$Y_0 - p_i$	$\Sigma p_i$	$Y$	$p_{oa}$	$\frac{Y}{Y_{max}}$
$A$	0		0	0	0
1	0,14	44,68	130,2	0,01982	0,1383
2	0,42	60,76	397,8	0,06055	0,4225
3	0,71	100,36	672,6	0,10237	0,7143
4	0,92	129,38	870,3	0,13246	0,9242
$m$	1,00	140,22	941,6	0,14332	1,0000

Gleichung (17) liefert  $k = 6.96$ ; eine Wiederholung der Berechnung mit 16 statt mit 10 Feldern liefert den Beulwert zu  $k = 6.97$ , der praktisch genau sein dürfte. Es ist nun auch möglich, aus den berechneten  $Y$ -Werten mit Hilfe der Seilpolygongleichungen (7a) und (7b) die zugehörigen Ableitungen  $Y''$  und  $Y''''$  zu berechnen und damit die Beiträge der einzelnen Glieder der Gleichung (8a) an den Beulwert mit Gleichung (17) zu bestimmen. Damit kann für das untersuchte Beispiel der Beulwert  $k$  in der allgemeineren Form

$$k = \beta^2 + 2,39 + \frac{5,24}{\beta^2}$$

angeschrieben werden; damit ergibt sich mit praktisch durchaus genügender Genauigkeit der Verlauf von  $k$  bei veränderlichem Seitenverhältnis  $\beta$ . Der Kleinstwert  $k_{min} = 6.97$  ergibt sich dabei für  $\beta^4 = 5.24$ ,  $\beta = 1.513$  oder  $\frac{1}{\beta} = 0,66$ .

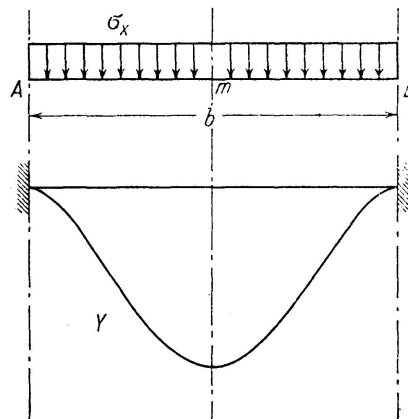


Fig. 3.

Fig. 3 zeigt die Form der Ausbiegungskurve  $Y$ ; die scharfe Krümmung an der Einspannstelle läßt auf große Einspannmomente und damit auf große Veränderlichkeit der Kurven  $Y''$  und damit  $Y''''$  schließen, so daß die Notwendigkeit einer verhältnismäßig engen Feldteilung zur Erreichung einer großen Genauigkeit verständlich ist.

- c) Gleichmäßiger Druck, ein Längsrand frei, einer gelenkig,  $\beta = 1$ .

Da in diesem Fall keine scharfen Krümmungen zu erwarten sind, wählen wir absichtlich eine extrem große Feldweite,  $\Delta y = \frac{b}{4}$ ; damit wird für  $\beta = 1$

$$\gamma = \frac{\pi^2 \cdot \beta^2}{12 \cdot 4^2} = 0,051404, \quad \gamma^2 = 0,0026424.$$

Die Querdehnungszahl  $\nu$  setzen wir zu  $\nu = 0.25$ , um das Rechnungsergebnis mit dem Wert nach TIMOSHENKO<sup>1)</sup> vergleichen zu können. Die Berechnung ist in den beiden Tabellen 4 und 5 zusammengestellt.

Tabelle 4.

	$Y_0 = p_i$	$\Sigma p_i$	$Y$	$p_{0a}$	$\frac{Y}{Y_{max}}$
A	0		0	0	0
1	0,25	36,00	71,5	0,1890	0,2801
2	0,50	72,00	137,7	0,3639	0,5393
3	0,75	96,00	196,0	0,5179	0,7675
B	1,00	74,525	255,4	0,6748	1,0000

Tabelle 5.

	$Y_1$	$Y_2$	$Y_3$	$Y_B$	$\Sigma p_i$
1	7,2202	-4,7696	0,8998		36,00
2	-4,7696	8,1199	-4,7696	0,8998	72,00
3	0,8998	-4,7696	7,2202	-2,8475	96,00
B		0,8767	-2,7386	1,9209	74,525

Gleichung (17) liefert  $k = 1.437$ ; trotz der sehr groben Feldteilung und der primitiv als Gerade angenommenen Kurve  $Y_0$  weicht dieser Wert nur um 0.2 % von dem von S. TIMOSHENKO angegebenen Wert  $k = 1.440$  ab (Kurve  $Y$  siehe Fig. 4).

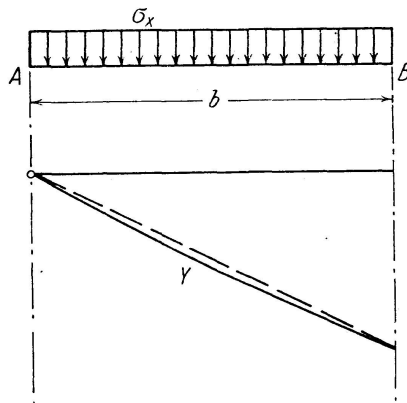


Fig. 4.

Mit diesen Beispielen dürfte die Leistungsfähigkeit des angegebenen baustatischen Berechnungsverfahrens genügend nachgewiesen sein.

### 6. Schlußbemerkungen

Das vorgelegte baustatische Verfahren zur Berechnung der Beulspannungen gedrückter Rechteckplatten läßt sich ohne grundsätzliche Schwierigkeit auch auf Platten mit elastischer Einspannung und nachgiebiger Randstützung erweitern; es ändern dabei nur die die Randbedingungen ausdrückenden Randgleichungen. Ebenso läßt sich das Verfahren sehr einfach auf die Berechnung der Platte mit Längsaussteifungen erweitern; zu den Widerständen  $p_i$  der Platte tritt noch die Reaktion der Aussteifung (als Einzellast) hinzu. Daß dabei die  $Y''$ -Kurve an der Aussteifungsstelle einen Knick aufweist, ist in den Seilpolygongleichungen (7) leicht zu berücksichtigen. Von wesentlichem Vorteil scheint mir dabei bei dem neuen Verfahren zu sein, daß es die Belastungskurven  $p_i$  bzw.  $p_a$  direkt und anschaulich liefert, so daß daraus sofort angegeben werden kann, an welcher Stelle

(nämlich an der Stelle  $p_{max}$ ) eine Aussteifung am wirksamsten ist. Auf eine Erweiterung des Verfahrens zur Untersuchung der Beulspannungen im plastischen Bereich soll an anderer Stelle zurückgekommen werden.

### Zusammenfassung

Es wird ein baustatisches Verfahren zur Berechnung der Beulspannungen längsgedrückter Rechteckplatten angegeben, das bei beliebigen Randbedingungen und bei beliebiger Verteilung des Längsdruckes anwendbar ist. Das Verfahren ist grundsätzlich ein Iterationsverfahren, doch ist in Kombination mit einer Energiebetrachtung eine praktisch genügende Genauigkeit der Beulwerte meist in einem einzigen Rechnungsgang erreichbar. Da das Verfahren sehr gut konvergiert, dürfte auch in Ausnahmefällen eine zweite Rechnung praktisch immer genügen.

### Résumé

L'auteur indique une méthode d'ordre statique pour le calcul des contraintes critiques de voilement dans les dalles rectangulaires minces soumises à une compression longitudinale. Cette méthode peut être appliquée à des conditions marginales arbitraires et pour une répartition également arbitraire de la compression longitudinale. Il s'agit, en principe, d'une méthode d'itération. Toutefois, lorsque l'on fait intervenir la considération d'énergie, on obtient généralement en un seul processus de calcul une précision suffisante pour la pratique. Cette méthode présentant une excellente convergence, un deuxième calcul est toujours suffisant, en pratique, pour les cas exceptionnels.

### Summary

A statical method for calculating the buckling stresses in longitudinally pressed rectangular plates is here given, which is applicable with any desired edge conditions and with any desired distribution of the longitudinal pressure. The method is fundamentally a tentative method, but in combination with a consideration of the energy, a practically sufficiently accurate determination of the buckling values can generally be obtained in one single calculating operation. Since the method converges very well, a second calculation should practically always be sufficient even in exceptional cases.