

# Die genaue Membranentheorie der prismatischen Faltwerke

Autor(en): **Gruber, Ernst**

Objektyp: **Article**

Zeitschrift: **IABSE publications = Mémoires AIPC = IVBH Abhandlungen**

Band (Jahr): **11 (1951)**

PDF erstellt am: **22.07.2024**

Persistenter Link: <https://doi.org/10.5169/seals-11431>

## **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern.

Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden.

Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

## **Haftungsausschluss**

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

# Die genaue Membranentheorie der prismatischen faltwerke

*La théorie exacte des membranes dans le cas des poutres-cloisons prismatiques*

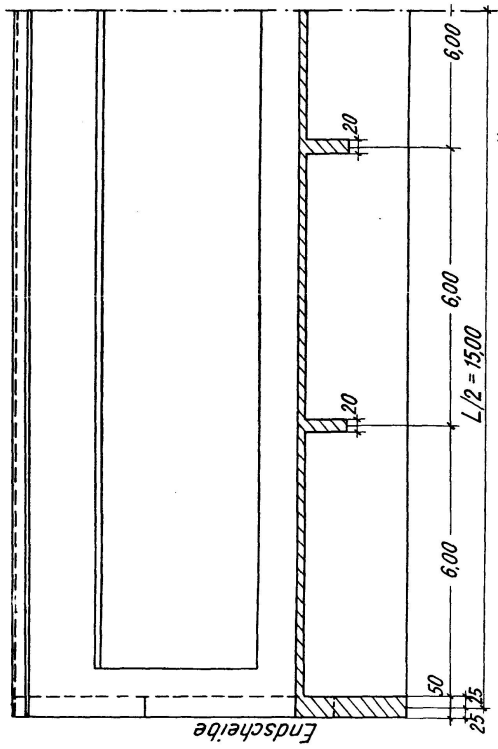
*The exact membrane theory of prismatical structures composed of thin plates*

Dr. Ing. habil. ERNST GRUBER, Eldingen

## A. Allgemeines

Faltwerke sind schalenartige Gebilde, die sich nur aus ebenflächigen Teilen zusammensetzen. Bilden mehrere von diesen die Mantelfläche eines geraden Prismas, so spricht man von prismatischen Faltwerken. In Figur 1, die ein derartiges, als Sheddach geformtes Gebilde darstellt, ist ein rechteckiges Faltwerksglied der Mantelfläche durch Einzeichnung eines Elementarelementes hervorgehoben (Fig. 1 d). Schneidet man aus diesem ein Volumselement  $d/dx/dy$  heraus (Fig. 2 a) und nimmt, wie es in der allgemeinen Plattentheorie üblich ist, die Verteilung der Spannungen über die Plattendicke  $d$  als geradlinig an, so werden die in der Figur 2 b dargestellten inneren Kräfte frei. Da bei Faltwerken die Verhältnisse  $\frac{L}{d}$  und  $\frac{d}{2h}$  immer sehr klein sind, ist auch die Drillingssteifigkeit der einzelnen Faltwerkscheiben sehr gering, weshalb die Momente  $M_y^{(T)}$  und  $M_x^{(T)}$  mit genügender Genauigkeit ganz unterdrückt werden können. Ist außerdem  $\frac{2h}{L}$  kleiner als ungefähr  $1/2$  bis  $1/3$ , so wird die Biegesteifigkeit der Platte über die Stützweite  $L$  so gering, daß die dazugehörigen inneren Kraftwirkungen  $M_{xy}$  und  $Q_{yz}$  fast vollkommen verschwinden. Durch die Stützung der Platten an den Endscheiben können jedoch in den, den Letzteren unmittelbar anliegenden Faltwerksteilen, diese  $M_{xy}$  und  $Q_{yz}$  auch größere Werte erreichen. Da aber Kraftwirkungen, die in der Nähe der Auflager ihren Sitz haben, auf die Mitte eines Tragwerkes sehr wenig Einfluß ausüben, ist diese Störung auf das Gesamtergebnis fast vollkommen belanglos. Trotzdem ist es oft ratsam, diese örtlich begrenzte Anomalie bei den Anschlüssen der dünnen Faltwerksscheiben an die starken Endscheiben konstruktiv zu berücksichtigen, besonders dann, wenn diese Verbindungen kantensteif ausgeführt werden. Greifen die äußeren Lasten nur längs der Schnittlinien der Scheibenmittelebenen an und sind die einzelnen Scheiben längs dieser Knotenlinien  $n$  nur





$L = 30,00m$   
 Querdehnungszahl  $m = 6$   
 Elastizitätskoeffizient  $1,000,000t/m^2$   
 Schnitt a-b

Fig. 1b

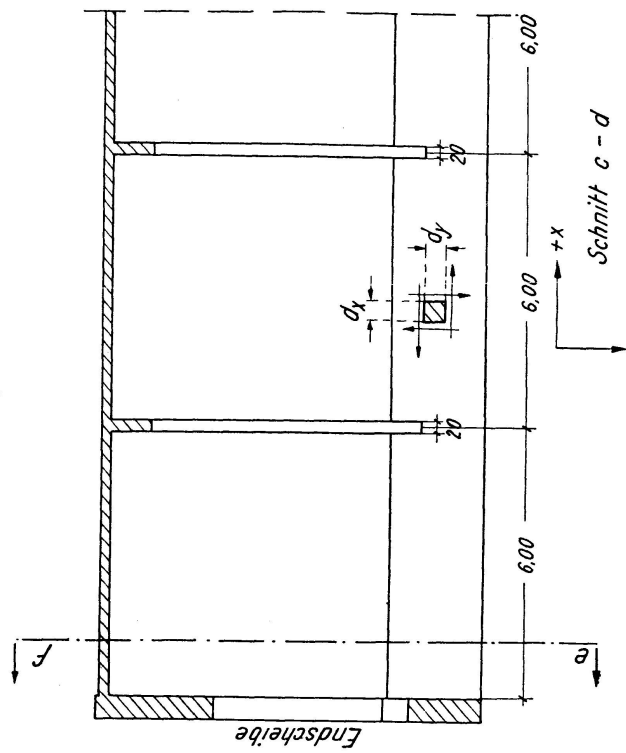


Fig. 1d

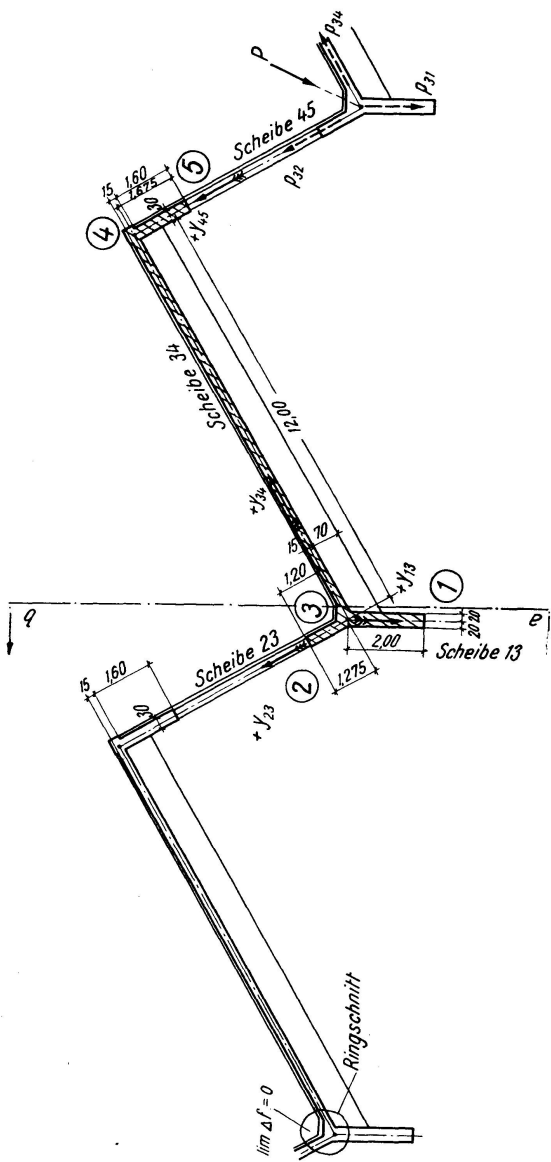


Fig. 1a

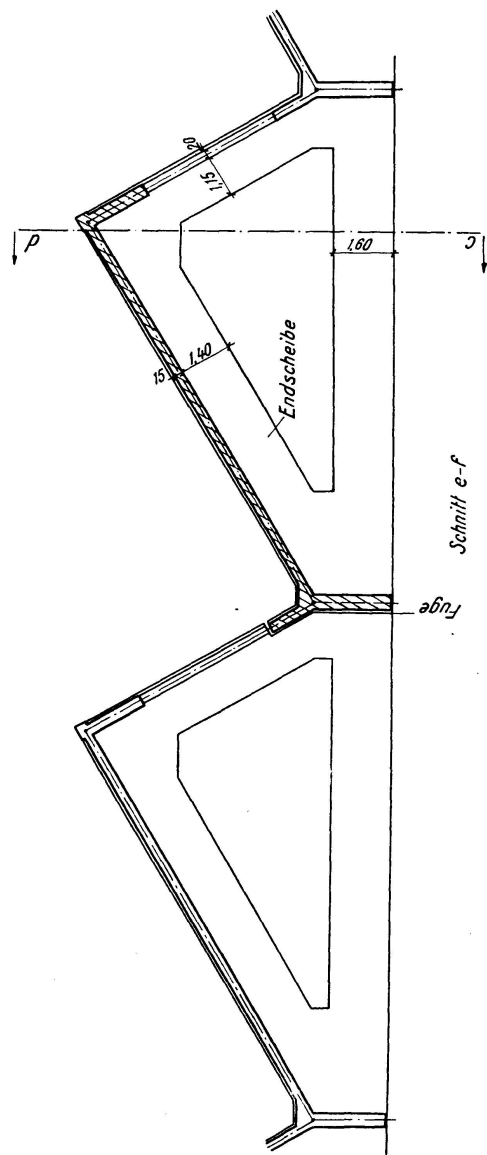


Fig. 1c

Schnitt e-f

durch scharnierartige Gelenke miteinander verbunden, so entfallen außerdem die  $M_{yx}$  und  $Q_{xz}$ , so daß nur mehr die in der Mittelebene wirkenden Membranenspannungen  $Q_{xy} = Q_{yx} = Q = \tau \cdot d$ ,  $s_x = \sigma_x \cdot d$  und  $s_y = \sigma_y \cdot d$  übrig bleiben.

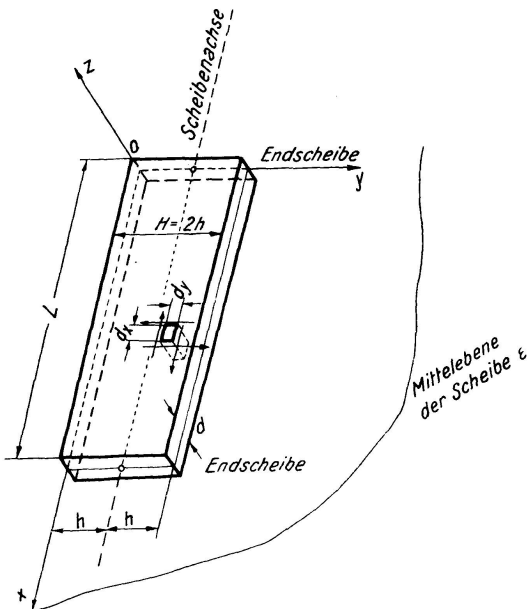


Fig. 2a

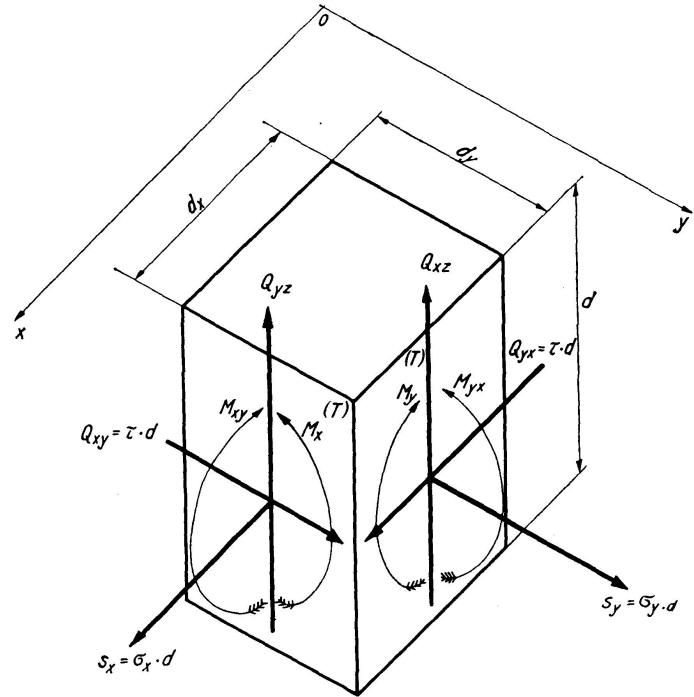


Fig. 2b

Aus konstruktiven Gründen bildet man jedoch die Kanten nicht gelenkig, sondern steif aus, d.h. die  $M_{yx}$  und  $Q_{xz}$  verschwinden nicht mehr ganz. Dadurch tritt eine Trübung der sonst klar vorhandenen Membranwirkung auf, die um so erheblicher wird, je mehr die  $M_{yx}$  und  $Q_{xz}$  von Null abweichen. Da diese einerseits mit der Scheibendicke  $d$  abnehmen und andererseits um so kleiner werden, je kleiner die elastischen Gestaltsänderungen der zu den Endscheiben parallelliegenden Querschnitte des Faltwerkes sind, tritt bei steifen Knoten die Membranwirkung um so vollkommener ein, je dünner die einzelnen Scheiben und je starrer die Faltwerksquerschnitte sind. Letzteres ist der Fall, wenn unter anderem

1. die Tragwerke durch Querscheiben genügend versteift oder
2. die Querschnitte als in sich geschlossene Formen ausgebildet werden, wie z. B.
  - a) als einfache Ringe oder
  - b) als ein- oder mehrteilige Zellenwerke.

Bei den Letzteren tritt diese Wirkung besonders dann stark zu Tage, wenn die Achsfigur des Zellwerksquerschnittes die Form eines unverschieblichen Fachwerkes hat.

Da die  $M_{yx}$  und die  $Q_{xz}$  mit den Scheibendicken sehr rasch abnehmen, diese aber meistens sehr gering sind, kann man auf Grund der vorhergegangenen

Betrachtung wohl sagen, daß die oben erläuterte Membranwirkung fast immer nahezu vollkommen erreicht werden kann. Die Bedingung, daß die Lasten nur längs der Kanten  $n$  angreifen dürfen, muß aber dabei stets erfüllt sein.

Im Gegensatz zu den stetig gekrümmten Schalen sind bei den ebenflächigen Faltwerken die Membranspannungen  $Q$ ,  $s_x$  und  $s_y$  aus den Gleichgewichtsbedingungen allein nicht mehr zu ermitteln. Um die deshalb notwendig werden- den elastizitätstheoretischen Untersuchungen zu umgehen, nahm man bis jetzt immer die Verteilung der zu den Scheibenachsen parallel gerichteten Membranspannungen  $s_x$  von Knotenlinie zu Knotenlinie geradlinig an. Ist die Höhe  $2h$  der betreffenden Scheibe kleiner als  $\frac{L}{6}$  bis  $\frac{L}{7}$ , so stimmt diese Annahme sehr gut mit der Wirklichkeit überein, und zwar um so besser, je schlanker das Verhältnis  $\frac{2h}{L}$  ist. Wird aber  $\frac{2h}{L} > \frac{1}{6}$  bis  $\frac{1}{7}$ , so führt die Annahme der geradlinigen Spannungsverteilung zu unrichtigen Ergebnissen und man muß zur exakten Erfassung der Membrankräfte auf elastizitätstheoretischer Grundlage schreiten.

Wir werden in den nächsten Abschnitten dieser Abhandlung diese Entwicklungen für das prismatische Faltwerk durchführen. Die Behandlung derselben Aufgabe für die pyramidenartigen Faltwerke wird zu einem späteren Zeitpunkt erfolgen<sup>1)</sup>.

### **B. Genaue Ermittlung der inneren Membranspannungen und der Verformungen einer einzelnen Faltwerksscheibe**

Da die  $Q_{xz}$  und die  $M_{yx}$  entsprechend den vorangegangenen Betrachtungen verschwinden sollen, werden von einer Scheibe zur anderen nur die in den Schnittlinien der Scheibenmittelebenen wirkenden Schubkräfte  $t$  übertragen. Weiters zerlegt sich eine in einer beliebigen Knotenlinie angreifende, stetig verteilte Transversallast  $P$  in die ebenfalls stetig verteilten Belastungen  $p_{\nu, \mu}$ , deren Wirkungsebenen ebenfalls mit den Mittelebenen der von dieser Kante ausgehenden Scheiben zusammenfallen. Laufen in letzteren mehr als 2 Faltwerkselemente zusammen, so ist diese Aufteilung statisch unbestimmt<sup>2)</sup>. Löst man durch längs der Knoten  $s$  und  $r$  geführte Schnitte die Scheibe  $sr$  aus dem Faltwerksverband, so werden für deren Ränder  $r$  und  $s$  die inneren Kraft-

<sup>1)</sup> Die Behandlung der pyramidenartigen Faltwerke bei Annahme einer von Knotenlinie zu Knotenlinie geradlinigen Spannungsverteilung wurde vom Verfasser bereits in der Abhandlung „Berechnung pyramidenartiger Scheibenwerke und ihre Anwendung auf Kaminkühler“ behandelt. Sie erschien in Band 2 der „Abhandlungen“ der Internationalen Vereinigung für Brücken- und Hochbau, Jahrgang 1934.

<sup>2)</sup> Siehe die Arbeiten des Verfassers „Die Berechnung äußerlich statisch unbestimmter Scheibenwerke“, Band 3 der „Abhandlungen“ der Internationalen Vereinigung für Brücken- und Hochbau, Jahrgang 1935, und „Hohlträger als Faltwerke“, Band 7 der „Abhandlungen“ der Internationalen Vereinigung für Brücken- und Hochbau, 1944.

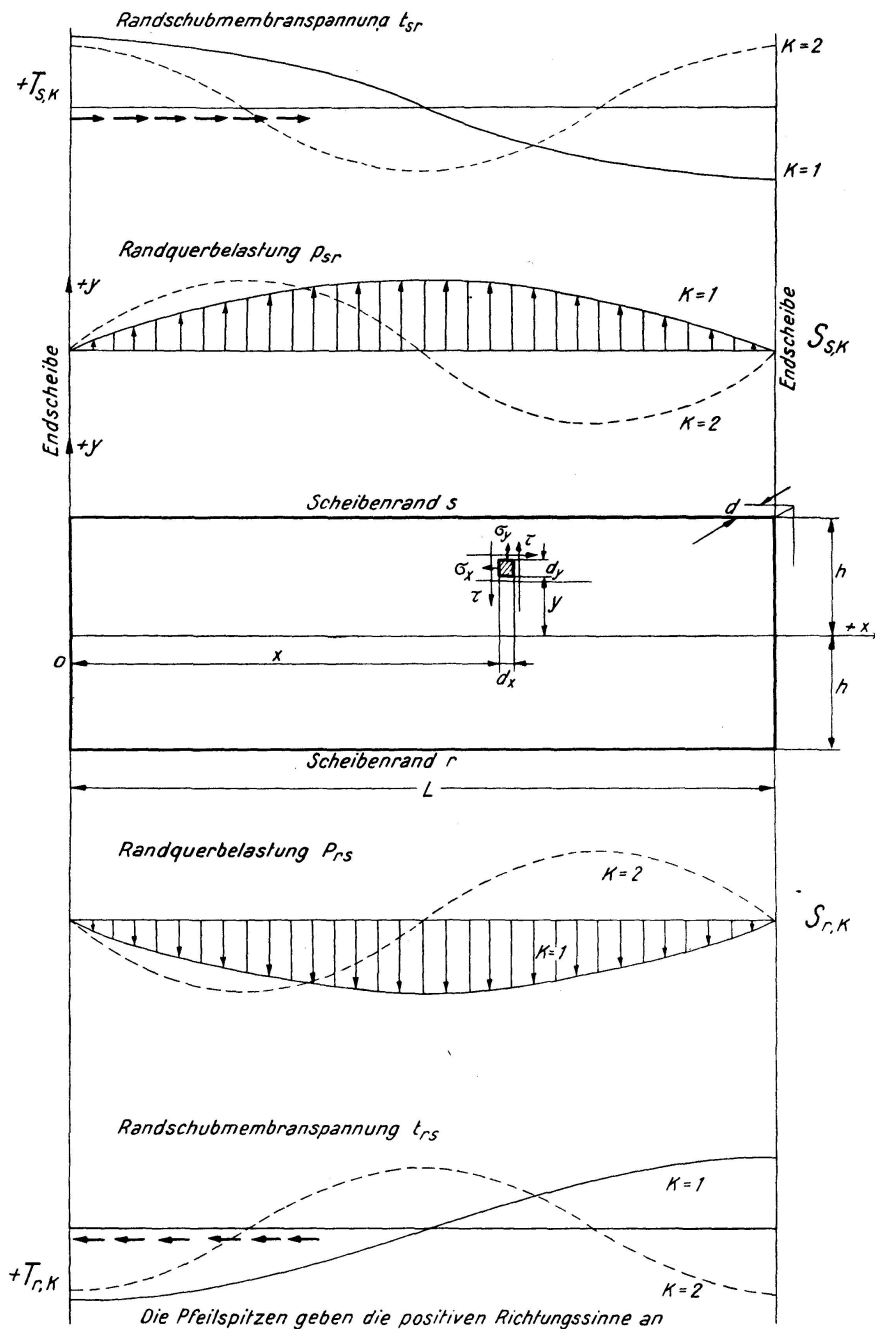


Fig. 3

wirkungen  $t_s$ ,  $p_s$ ,  $t_r$  und  $p_r$  frei und erscheinen als äußere, in der Mittelebene wirkende Belastungen (Fig. 3). Diese erzeugen den ebenen Spannungszustand  $\sigma_x$ ,  $\sigma_y$ ,  $\tau$ , für welchen wir die dazugehörige Airy'sche Spannungsfunktion zu ermitteln haben. Diese muß zunächst die bekannte partielle Differentialgleichung 4ter Ordnung

$$\left( \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} \right)^2 = 0^3 \quad (1)$$

<sup>3)</sup> Massenkkräfte sollen keine vorhanden sein.

befriedigen. Mit den nun folgenden Spannungen

$$\sigma_y = \frac{\partial^2 F}{\partial x^2}; \quad \sigma_x = \frac{\partial^2 F}{\partial y^2}; \quad \tau = -\frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} \quad (2)$$

ergeben sich die Randbedingungen für die Scheibe  $rs$  in der Form

$$\sigma_y \cdot d = \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} \cdot d = p_s \quad \text{für } y = +h \quad (3a)$$

$$\tau \cdot d = -\frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} \cdot d = t_s$$

$$\sigma_y \cdot d = \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} \cdot d = p_r \quad \text{für } y = -h \quad (3b)$$

$$\tau \cdot d = -\frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} \cdot d = t_r$$

$$\sigma_x = \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} = 0 \quad \text{für } x = 0 \text{ und } x = L \quad (3c)$$

$$d \int_{-h}^{+h} \tau dy = A_0 \quad (3d)$$

$$d \int_{-h}^{+h} \tau dy = A_L, \quad (3e)$$

wobei  $A_0$  und  $A_L$  die Auflagerdrücke an den beiden Endscheiben bedeuten. Hierbei ist zu beachten, daß die  $\sigma_x$ ,  $\sigma_y$  und die  $\tau$  auf die Flächeneinheit und die  $p_s$ ,  $p_r$ ,  $t_s$  und  $t_r$  auf die Längeneinheit der Abszisse  $x$  bezogen sind. Entwickelt man die Randlasten  $p_s$ ,  $p_r$ ,  $t_s$  und  $t_r$  sowie die Linienlast  $P$  wie folgt in Fourier'sche Reihen

$$p_s = d \sum_0^{\infty} k S_{sk} \sin \frac{k \pi}{L} x \quad (4a)$$

$$p_r = d \sum_0^{\infty} k S_{rk} \sin \frac{k \pi}{L} x \quad (4b)$$

$$t_s = d \sum_0^{\infty} k T_{sk} \sin \frac{k \pi}{L} x \quad (4c)$$

$$t_r = d \sum_0^{\infty} k T_{rk} \sin \frac{k \pi}{L} x \quad (4d)$$

$$P = d \sum_0^{\infty} k P_k \sin \frac{k \pi}{L} x \quad (4e)$$

und belastet die Scheibe nur mit den  $k$ ten Gliedern dieser Entwicklungen, so führt, wie die weitere Rechnung zeigen wird, der für die dazugehörige Spannungsfunktion gewählte Ansatz

$$F_k = Y_k \sin \frac{k \pi}{L} x \quad (5)$$

zu einer Lösung, die man allen Randbedingungen anpassen kann (Fig. 3). Hierbei bedeutet  $Y_k$  eine noch zu bestimmende reine Funktion von  $y$ . Setzt man Gl. (5) in Gl. (1) ein, so folgt nach Kürzung durch  $\sin \frac{k\pi}{L} x$  für  $Y_k$  die gewöhnliche lineare homogene Differentialgleichung 4ter Ordnung.

$$Y_k^{IV} - 2\alpha_k^2 Y_k'' + \alpha_k^4 = 0; \quad \alpha_k = \frac{k\pi}{L}. \quad (6)$$

Da die zum üblichen Ansatz  $Y_k = e^{\rho_k x}$  gehörige charakteristische Gleichung  $(\rho_k^2 - \alpha_k^2)^2 = 0$  die beiden Doppelwurzeln  $\rho_{1k} = +\alpha_k$ ;  $\rho_{2k} = -\alpha_k$  hat, erhalten wir das allgemeine Integral von Gl. (6) in der Form

$$Y_k = \left( U_{1k} + \frac{y}{h} U_{2k} \right) \text{Sin } \alpha_k y + \left( U_{3k} + \frac{y}{h} U_{4k} \right) \text{Cos } \alpha_k y. \quad (7)$$

Bringt man nun mit Hilfe der Gl. (5) die in Gl. (2) dargestellten Spannungen in die Form

$$\sigma_{xk} = Y_k'' \sin \alpha_k x \quad (8a)$$

$$\sigma_{yk} = -\alpha_k^2 Y_k \sin \alpha_k x \quad (8b)$$

$$\tau_k = -\alpha_k Y_k' \cos \alpha_k x, \quad (8c)$$

so folgen daraus mit Hilfe der Gl. (4) die den Gl. (3a) und (3b) entsprechenden 4 Randbedingungen

$$Y_k(+h) = -\frac{1}{\alpha_k^2} S_{sk}; \quad Y_k(-h) = -\frac{1}{\alpha_k^2} S_{rk} \quad (9a, b)$$

$$Y_k(+h) = -\frac{1}{\alpha_k} T_{sk}; \quad Y_k'(-h) = -\frac{1}{\alpha_k} T_{rk}, \quad (9c, d)$$

aus denen sich die 4 Integrationskonstanten  $U_{1,k}$ ,  $U_{2,k}$ ,  $U_{3,k}$  und  $U_{4,k}$  der allgemeinen Lösung (7) zu

$$U_{1k} = \frac{1}{2\alpha_k^2 \left( 1 - \frac{\text{Sin } 2\alpha_k h}{2\alpha_k h} \right)} \left[ (S_{sk} - S_{rk}) \left( \text{Sin } \alpha_k h + \frac{\text{Cos } \alpha_k h}{\alpha_k h} \right) - (T_{sk} + T_{rk}) \text{Cos } \alpha_k h \right] \quad (10a)$$

$$U_{2k} = \frac{1}{2\alpha_k^2 \left( 1 + \frac{\text{Sin } 2\alpha_k h}{2\alpha_k h} \right)} [(S_{sk} + S_{rk}) \text{Sin } \alpha_k h - (T_{sk} - T_{rk}) \text{Cos } \alpha_k h] \quad (10b)$$

$$U_{3k} = \frac{1}{2\alpha_k^2 \left( 1 + \frac{\text{Sin } 2\alpha_k h}{2\alpha_k h} \right)} \left[ -(S_{sk} + S_{rk}) \left( \text{Cos } \alpha_k h + \frac{\text{Sin } \alpha_k h}{\alpha_k h} \right) + (T_{sk} - T_{rk}) \text{Sin } \alpha_k h \right] \quad (10c)$$

$$U_{4k} = \frac{1}{2\alpha_k^2 \left( 1 - \frac{\text{Sin } 2\alpha_k h}{2\alpha_k h} \right)} [-(S_{sk} - S_{rk}) \text{Cos } \alpha_k h + (T_{sk} + T_{rk}) \text{Sin } \alpha_k h] \quad (10d)$$

ergeben. Dabei wurde die erste Ableitung von  $Y_k$  in der Form

$$Y_k' = \left[ \frac{U_{2k}}{h} + \alpha_k \left( U_{3k} + \frac{y}{h} U_{4k} \right) \right] \mathfrak{S}in \alpha_k y \\ + \left[ \frac{U_4}{h} + \alpha_k \left( U_{1k} + \frac{y}{h} U_{2k} \right) \right] \mathfrak{C}os \alpha_k y \quad (11)$$

benutzt, aus welcher sich durch nochmalige Differentiation und nach einigen Umformungen die zweite Ableitung von  $Y_k$  zu

$$Y_k'' = \alpha_k^2 Y_k + \underbrace{\frac{2\alpha_k}{h} (U_{4k} \mathfrak{S}in \alpha_k y + U_{2k} \mathfrak{C}os \alpha_k y)}_{\Phi_k}. \quad (12)$$

ergibt.

Da  $\sin \alpha_k x$  für  $x=0$  und  $x=L$  Null wird, werden nach Gl. (8a) die  $\sigma_x$  an diesen Stellen ebenfalls Null, so daß auch die Randbedingungen Gl. (3c) erfüllt sind. Aus

$$\int_{-h}^{+h} \tau dy = -\alpha_k \cos \alpha_k x \int_{-h}^{+h} Y_k' dy = \frac{S_{sk} - S_{rk}}{\alpha_k} \cos \alpha_k x$$

ergeben sich für  $x=0$  und  $x=L$  die Auflagerdrücke

$$A_0 = \frac{S_{sk} - S_{rk}}{\alpha_k} d; \quad A_L = \frac{S_{sk} - S_{rk}}{\alpha_k} d (-1)^k. \quad (13)$$

Errechnet man andererseits diese aus den durch die  $k$ ten Glieder gebildeten Belastungen nach dem Hebelgesetz auf gewöhnliche Weise, so gelangt man wieder zu den Werten der Gl. (13). In diesen erscheinen die zu den Schubbelastungen  $t_s, t_r$  gehörigen Reihenkoeffizienten  $T_{s,k}$  und  $T_{r,k}$  (Gl. (4c) und (4d)) überhaupt nicht, da sich entsprechend der Form der dazugehörigen Cos-Wellen die Schubspannungen längs eines Scheibenrandes gegenseitig aufheben und daher an den Endscheiben keine Auflagerdrücke erzeugen können (Fig. 3). Somit sind auch die beiden letzten Randbedingungen (3d) und (3e) erfüllt.

Hiebei wurde aber für die Auswertung dieser Gl. (3d) und (3c) die durch die Gl. (8c) festgelegte Verteilung der Schubspannungen zu Grunde gelegt. Dies ist im allgemeinen zunächst nicht zulässig, da die letztere an den Auflagern von der Lagerungsart der einzelnen Scheiben an den Endquerschnitten wesentlich abhängt. Da aber nach dem St. Venant'schen Prinzip solche örtlich bedingten Abweichungen in der Spannungsverteilung auf in der Nähe der Endquerschnitte liegende Bereiche beschränkt bleiben, wirkt sich diese, für die Auflagerrandbedingungen getroffene Näherung, in der Praxis kaum aus. In diesem Sinne können dann *alle* Randbedingungen als erfüllt betrachtet werden.

Die Gl. (7) stellt also dann im Zusammenhang mit den Gl. (10a, b, c, d) eine Lösung für die mit dem  $k$ ten Glied belasteten Scheibe  $sr$  dar, die nur in der Nähe der Auflager etwas von der Wahrheit abweicht.

Um die inneren Kraftwirkungen  $p$  und  $t$ , die die einzelnen Scheiben erst zu einem Faltwerk verbinden, bestimmen zu können, müssen wir die Verformungen einer Scheibe angeben können. Zunächst ergibt sich die bezogene Dehnung in Richtung der  $x$ -Achse zu

$$\epsilon_{xk} = \frac{\partial \xi_k}{\partial x} = \frac{1}{E} \left( \sigma_{xk} - \frac{\sigma_{yk}}{m} \right), \quad (14)$$

woraus mit Hilfe der Gl. (8a, b), Gl. (7) und Gl. (12)

$$\epsilon_{xk} = \frac{\partial \xi_k}{\partial x} = \frac{1}{E} \left( \alpha_k^2 \frac{m+1}{m} Y_k + \Phi_k \right) \sin \alpha_k x \quad (15)$$

wird. Bestimmt man nun den Wert dieser Funktion an der Stelle  $y$ , so ergibt sich, daß die waagrechten Dehnungen einer jeden im Abstand  $y$  zur  $x$ -Achse parallel verlaufenden Geraden den Verlauf einer Sinuslinie folgen. Für den oberen bzw. unteren Scheibenrand folgt also mit  $y = \pm h$

$$\begin{aligned} \epsilon_{rk} = \frac{\alpha_k}{E} \left\{ \alpha_k \frac{m+1}{m} [(\pm U_{1k} + U_{2k}) \text{Sin } \alpha_k h + (U_{3k} \pm U_{4k}) \text{Cos } \alpha_k h] \right. \\ \left. + \frac{2}{h} (+U_{2k} \text{Cos } \alpha_k h \pm U_{4k} \text{Sin } \alpha_k h) \right\} \sin \alpha_k x. \end{aligned} \quad (16)$$

Ersetzt man nun die  $U_k$  durch die Gl. (10a, b, c, d), so erhält man nach mehreren Umformungen die Amplituden der vorhin definierten, zu den Rändern  $r$  und  $s$  gehörigen Sinuslinien zu

$$E_{sk} = \frac{1}{N_k E} \left[ a_k S_{sk} - b_k S_{rk} - \frac{1}{k \pi \kappa} (d_k T_{sk} + c_k T_{rk}) \right] \quad (17a)$$

$$E_{rk} = \frac{1}{N_k E} \left[ -b_k S_{sk} + a_k S_{rk} + \frac{1}{k \pi \kappa} (c_k T_{sk} + d_k T_{rk}) \right], \quad (17b)$$

wenn

$$\kappa = \frac{h}{L}; \quad N_k = \left( \frac{\text{Sin } 2k\pi\kappa}{2k\pi\kappa} \right)^2 - 1; \quad a_k = \frac{m+1}{m} + \frac{m-1}{m} \left( \frac{\text{Sin } 2k\pi\kappa}{2k\pi\kappa} \right)^2;$$

$$b_k = 2 \frac{\text{Sin } 2k\pi\kappa}{2k\pi\kappa}; \quad c_k = \text{Cos } 2k\pi\kappa - \frac{\text{Sin } 2k\pi\kappa}{2k\pi\kappa}; \quad d_k = \frac{\text{Sin } 4k\pi\kappa}{4k\pi\kappa} - 1$$

bedeutet. Der Verlauf der Dehnungen selbst ergibt sich dann zu

$$\epsilon_{rk} = \frac{E_{sk}}{r_k} \cdot \sin \alpha_k x. \quad (18)$$

Entsprechend der Gl. (14) und unter nochmaliger Benutzung der Gl. (8a, b), Gl. (7) und Gl. (12) erhält man die bezogene Dehnung in Richtung der  $y$ -Achse zu

$$\epsilon_{yk} = \frac{\partial \eta_k}{\partial y} = \frac{1}{E} \left( \sigma_{yk} - \frac{\sigma_{xk}}{m} \right) = -\frac{1}{E} \left( \frac{m-1}{m} Y_k'' - \Phi_k \right) \sin \alpha_k x. \quad (19)$$

Drücken wir die Schubspannung  $\tau_k$  ebenfalls durch die Verzerrungskomponenten  $\xi$  und  $\eta$  aus, so ergibt sich mit Gl. (8c)



$$\tau_k = -\alpha_k Y_k' \cos \alpha_k x = \frac{m E}{2(m+1)} \left( \frac{\partial \eta_k}{\partial x} + \frac{\partial \xi_k}{\partial y} \right). \quad (20)$$

Differentiert man Gl. (15) einmal partiell nach  $y$  und zieht diesen Wert von der einmal partiell nach  $x$  differenzierten Gl. (20) ab, so folgt

$$\frac{\partial^2 \eta_k}{\partial x^2} = \frac{\sin \alpha_k x}{E} \cdot \frac{d}{dy} \left( \alpha_k^2 \frac{2m+1}{m} Y_k - Y_k'' \right). \quad (21)$$

Die zweimalige partielle Integration dieser Gleichung nach  $x$  ergibt nach vorheriger Zuziehung der Gl. (12)

$$\eta_k(x, y) = -\frac{\sin \alpha_k x}{\alpha_k^2 E} \frac{d}{dy} \left( \alpha_k^2 \frac{m+1}{m} Y_k - \Phi_k \right)_{y=0} + f_1(y) + x f_2(y), \quad (22)$$

wenn  $f_1(y)$  und  $f_2(y)$  willkürliche Funktionen von  $y$  sind. Für  $y=0$  erhalten wir die Biegelinie der Scheibenachse in der Form

$$\eta_k(x, 0) = -\frac{\sin \alpha_k x}{\alpha_k^2 E} \left( \alpha_k^2 \frac{m+1}{m} Y_k' - \Phi_k' \right) + f_1(0) + x f_2(0), \quad (22')$$

woraus mit den Randbedingungen  $\eta_k(x, 0) = 0$  für  $x=0$ ;  $x=L$   $f_1(0) = f_2(0) = 0$  folgt. Aus Gl. (19) ergibt sich nun durch partielle Integration nach  $y$

$$\eta_k(x, y) = -\frac{1}{E} \sin \alpha_k x \int \left( \frac{m+1}{m} Y_k'' - \Phi_k \right) dy + f(x). \quad (23)$$

Setzt man in den Gl. (22) und (23)  $y=0$  und vergleicht diese beiden Ergebnisse miteinander, wobei  $f(x)$  eine willkürliche reine Funktion von  $x$  ist, so erhalten wir unter Berücksichtigung von  $f_1(0) = f_2(0) = 0$   $f(x)$  in der Form

$$f(x) \equiv \frac{1}{E} \left[ -\frac{m+1}{m} Y_k' + \frac{1}{\alpha_k^2} \Phi_k' + \int \left( \frac{m+1}{m} Y_k'' - \Phi_k \right) dy \right] \sin \alpha_k x \equiv 0. \quad (24)$$

Die lotrechten Verschiebungen jeder in Abstand  $y$  parallel zur  $x$ -Achse verlaufenden Geraden liegen also auf einer Sinuslinie, die man nun wegen  $f(x) \equiv 0$  einfach aus

$$\eta_k(x, y) = -\frac{1}{E} \left[ \frac{m+1}{m} Y_k' - \int \Phi_k dy \right] \sin \alpha_k x \quad (25)$$

erhält. Setzt man hierin  $y=0$ , so folgt zunächst mit Gl. (11)

$$\eta_k(x, 0) = \frac{1}{h E} \left( \frac{m+1}{m} k \pi \kappa U_{1k} - \frac{m-1}{m} U_{4k} \right) \sin \alpha_k x, \quad (26)$$

woraus sich mit Gl. (10a) und (10d) die Biegelinie der Scheibenachse zu

$$\eta_k(x, 0) = \frac{L \sin \alpha_k x}{2 k \pi E \left( \frac{\text{Sin } 2 k \pi \kappa}{2 k \pi \kappa} - 1 \right)} \cdot \left[ (S_{sk} - S_{rk}) \left( \frac{m+1}{m} \text{Sin } k \pi \kappa + 2 \text{Cos } k \pi \kappa \right) - (T_{sk} + T_{rk}) \left( \frac{m+1}{m} \text{Cos } k \pi \kappa + \frac{m-1}{m} \frac{\text{Sin } k \pi \kappa}{k \pi \kappa} \right) \right] \quad (27)$$

ergibt. Setzt man dagegen in Gl. (25)  $y = +h$  bzw.  $y = -h$ , so folgen zunächst die Beziehungen

$$\eta_{sk} = -\frac{1}{E} \left[ \pm \frac{m-1}{m h} U_{2k} \text{Sin } \alpha_k h - \frac{m-1}{m h} U_{4k} \text{Cos } \alpha_k h \right] \\ \pm \frac{m+1}{m} \alpha_k (U_{3k} \pm U_{4k}) \text{Sin } \alpha_k h + \frac{m+1}{m} \alpha_k (U_{1k} \pm U_{2k}) \text{Cos } \alpha_k h. \quad (28)$$

Daraus erhält man mit den Gl. (10a, b, c, d) die Amplituden der sinusförmig verlaufenden lotrechten Bewegungen des oberen bzw. unteren Scheibenrandes zu

$$N_{sk} = \frac{k \pi L}{E N_k} \left[ \frac{1}{k \pi \kappa} (e_k S_{sk} - f_k S_{rk}) - a_k T_{sk} - b_k T_{rk} \right] \quad (29a)$$

$$N_{rk} = \frac{k \pi L}{E N_k} \left[ \frac{1}{k \pi \kappa} (f_k S_{sk} - e_k S_{rk}) - b_k T_{sk} - a_k T_{rk} \right], \quad (29b)$$

wobei für die dabei neu hinzugekommenen Koeffizienten

$$e_k = \frac{\text{Sin } 4 k \pi \kappa}{4 k \pi \kappa} + 1; \quad f_k = \text{Cos } 2 k \pi \kappa + \frac{\text{Sin } 2 k \pi \kappa}{2 k \pi \kappa}$$

gilt. Der Verlauf der Verschiebungen selbst ergibt sich dann zu

$$\eta_{sk} = N_{sk} \sin \alpha_k x. \quad (30)$$

Da für  $x=0$  und  $x=L$   $\sin \alpha_k x = 0$  wird, folgt, daß die lotrechten Verschiebungen in den beiden Auflagervertikalen gänzlich verschwinden, so daß dort nur waagrechte Bewegungen stattfinden. Diese Tatsache entspricht den Auflagerbedingungen der einzelnen Scheiben an den Endscheiben, wenn man letztere in idealem Sinne *in* ihren Ebenen als vollkommen starr und *aus* ihren Ebenen als vollkommen biegsam annimmt, was bei der konstruktiven Ausbildung nahezu vollkommen verwirklicht werden kann. Ist also das Faltwerk an den beiden Enden durch solche *ideale* Querscheiben zusammengefaßt, so erfolgt die Verteilung der Schubspannungen an den Auflagern genau nach der Gl. (8c). Die Gl. (7) ist dann in Verbindung mit den Gl. (10a, b, c, d) die *exakte* Lösung für die mit dem  $k$ ten Glied belastete Scheibe  $rs$  und weicht an keiner Stelle mehr von der Wahrheit ab.

Für die Betrachtung des nächsten Abschnittes ist es zweckmäßig,  $N_{s,k}$ ,  $N_{r,k}$ ,  $T_{s,k}$  und  $T_{r,k}$  als lineare Funktionen der  $E_{s,k}$ ,  $E_{r,k}$ ,  $S_{s,k}$  und  $S_{r,k}$  auszudrücken. Man erhält zunächst durch Auflösung der Gl. (17a) und (17b) nach  $T_{s,k}$  und  $T_{r,k}$

$$T_{sk} = -\frac{k \pi \kappa}{N_k} [N_k E (d_k E_{sk} + c_k E_{rk}) - A_k S_{sk} + B_k S_{rk}] \quad (31a)$$

$$T_{rk} = +\frac{k \pi \kappa}{N_k} [N_k E (c_k E_{sk} + d_k E_{rk}) + B_k S_{sk} - A_k S_{rk}] \quad (31b)$$

mit 
$$\bar{N}_k = \left( \frac{\text{Sin } 4 k \pi \kappa}{4 k \pi \kappa} \right)^2 - \left( 1 + \frac{1}{4 k^2 \pi^2 \kappa^2} \right) \text{Sin}^2 2 k \pi \kappa = d_k^2 - c_k^2;$$

$$A_k = a_k d_k - b_k c_k; \quad B_k = b_k d_k - a_k c_k.$$

Setzt man diese Werte in Gl. (29a) und (29b) ein, so wird weiter

$$N_{sk} = \frac{\hbar}{\bar{N}_k} [A_k E_{sk} - B_k E_{rk}] + \frac{\hbar}{N_k E} [C_k S_{sk} - D_k S_{rk}] \quad (32a)$$

$$N_{rk} = \frac{\hbar}{\bar{N}_k} [B_k E_{sk} - A_k E_{rk}] + \frac{\hbar}{N_k E} [D_k S_{sk} - C_k S_{rk}], \quad (32b)$$

wobei

$$C_k = \frac{1}{\bar{N}_k} [2 a_k b_k c_k - d_k (a_k^2 + b_k^2)] + \frac{e_k}{k^2 \pi^2 \kappa^2}$$

$$D_k = \frac{1}{\bar{N}_k} [c_k (a_k^2 + b_k^2) - 2 a_k b_k d_k] + \frac{f_k}{k^2 \pi^2 \kappa^2}$$

bedeutet.

Man könnte nun in den Gl. (7), (11) und (12) für die Integrationskonstanten  $U$  die Werte der Gl. (10a, b, c, d) einsetzen und so mit Hilfe der Gl. (8a, b, c) Formeln erhalten, aus welchen man die Spannungen direkt berechnen könnte. Dieser Weg ist jedoch unzweckmäßig, da die so entstehenden Ausdrücke sehr unübersichtlich werden. Man kommt rascher zum Ziel, wenn man nach der im nächsten Abschnitt gezeigten Berechnung der  $S$  und  $T$  die Integrationskonstanten  $U$  zahlenmäßig ermittelt und mit diesen Werten in die Gl. (7), (11) und (12) bzw. (8a, b und c) geht.

Setzt man in den Gl. (17a, b), (29a, b), (31a, b) und (32a, b)  $m = \infty$ , so gehen diese für kleine  $\kappa$  bei Vernachlässigung der Glieder mit den zweiten und höheren Potenzen von  $\kappa$  mit großer Annäherung über in

$$E_{sk} = \frac{3}{2 k^2 \pi^2 \kappa^2 E} (S_{sk} - S_{rk}) - \frac{1}{k \pi \kappa E} (2 T_{sk} + T_{rk}) \quad (17a')$$

$$E_{rk} = - \frac{3}{2 k^2 \pi^2 \kappa^2 E} (S_{sk} - S_{rk}) + \frac{1}{k \pi \kappa E} (T_{sk} + 2 T_{rk}) \quad (17b')$$

$$\frac{1}{\hbar} N_{sk} = \frac{1}{\hbar} N_{sk} = \frac{1}{\hbar_{rs}} N_k = \frac{3}{2 k^4 \pi^4 \kappa^4 E} (S_{sk} - S_{rk}) - \frac{3}{2 k^3 \pi^3 \kappa^3 E} (T_{sk} + T_{rk}) \quad (29')$$

$$T_{sk} = - \frac{k \pi \kappa}{3} (2 E_{sk} + E_{rk}) + \frac{1}{2 k \pi \kappa} (S_{sk} - S_{rk}) \quad (31a')$$

$$T_{rk} = + \frac{k \pi \kappa}{3} (E_{sk} + 2 E_{rk}) + \frac{1}{2 k \pi \kappa} (S_{sk} - S_{rk}) \quad (31b')$$

$$\frac{1}{\hbar_{rs}} N = \frac{1}{2 k^2 \pi^2 \kappa^2} (E_{sk} - E_{rk}). \quad (32')$$

In diesen Formeln sind die Einflüsse der Querdehnungszahl  $m$  und der  $\sigma_y$  insbesondere in Gl. (29') und (32') nicht mehr enthalten. Macht jedoch die Eigenart der gerade vorliegenden Aufgabe die Kenntnis der Dehnungen quer zu den Scheibenachsen auch bei schlanken Scheiben notwendig, so sind die genauen Beziehungen Gl. (17), (29), (31) und (32) oder die in der Abhandlung des Verfassers „Hohlträger als Faltwerke“ angegebenen sehr gut genäherten Gleichungen zu benutzen.

Werden hingegen die Werte von  $2k\pi\kappa$  größer als etwa 5, so wird mit sehr großer Annäherung  $\mathfrak{C} \sin 2k\pi\kappa = \mathfrak{C} \cos 2k\pi\kappa = \frac{1}{2} e^{2k\pi\kappa}$ . Nach einigen Umformungen gehen dann bei Vernachlässigung sehr kleiner Summanden gegenüber sehr großen die Gl. (17a, b), (29a, b), (31a, b) und (32a, b) über in

$$EE_{sk} = \frac{m-1}{m} S_{sk} - \frac{2}{N_\infty} S_{rk} - 2 \left[ T_{sk} + \frac{1}{N_\infty} \left( 1 - \frac{1}{2k\pi\kappa} \right) T_{rk} \right] \quad (17a'')$$

$$EE_{rk} = -\frac{2}{N_\infty} S_{sk} + \frac{m-1}{m} S_{rk} + 2 \left[ \frac{1}{N_\infty} \left( 1 - \frac{1}{2k\pi\kappa} \right) T_{sk} + T_{rk} \right] \quad (17b'')$$

$$EN_{sk} = \frac{L}{k\pi} \left\{ 2 \left[ S_{sk} - \frac{1}{N_\infty} \left( 1 + \frac{1}{2k\pi\kappa} \right) S_{rk} \right] - \frac{m-1}{m} T_{sk} - \frac{2}{N_\infty} T_{rk} \right\} \quad (29a'')$$

$$EN_{rk} = \frac{L}{k\pi} \left\{ 2 \left[ \frac{1}{N_\infty} \left( 1 + \frac{1}{2k\pi\kappa} \right) S_{sk} - S_{rk} \right] - \frac{2}{N_\infty} T_{sk} - \frac{m-1}{m} T_{rk} \right\} \quad (29b'')$$

$$T_{sk} = -\frac{1}{2} E \left[ E_{sk} + \frac{1}{N_\infty} \left( 1 - \frac{1}{2k\pi\kappa} \right) E_{rk} \right] + \frac{1}{2} \frac{m-1}{m} S_{sk} - \frac{1}{2N_\infty} \left( \frac{m+1}{m} + \frac{1}{2k\pi\kappa} \frac{m-1}{m} S_{rk} \right) \quad (31a'')$$

$$T_{rk} = +\frac{1}{2} E \left[ \frac{1}{N_\infty} \left( 1 - \frac{1}{2k\pi\kappa} \right) E_{sk} + E_{rk} \right] + \frac{1}{2N_\infty} \left( \frac{m+1}{m} + \frac{1}{2k\pi\kappa} \frac{m-1}{m} \right) S_{sk} - \frac{1}{2} \frac{m-1}{m} S_{rk} \quad (31b'')$$

$$\frac{2k\pi\kappa}{h} N_{sk} = \frac{m-1}{m} E_{sk} - \frac{1}{N_\infty} \left( \frac{m+1}{m} + \frac{1}{2k\pi\kappa} \frac{m-1}{m} \right) E_{rk} + \frac{1}{E} \left[ 4 - \left( \frac{m-1}{m} \right)^2 \right] S_{sk} - \frac{1}{EN_\infty} \left[ \left( \frac{m-1}{m} \right)^2 \left( 1 - \frac{1}{2k\pi\kappa} \right) + 4 \frac{m+1}{m} \right] S_{rk} \quad (32a'')$$

$$\frac{2k\pi\kappa}{h} N_{rk} = \frac{1}{N_\infty} \left( \frac{m+1}{m} + \frac{1}{2k\pi\kappa} \frac{m-1}{m} \right) E_{sk} - \frac{m-1}{m} E_{rk} + \frac{1}{EN_\infty} \left[ \left( \frac{m-1}{m} \right)^2 \left( 1 - \frac{1}{2k\pi\kappa} \right) + 4 \frac{m+1}{m} \right] S_{sk} - \frac{1}{E} \left[ 4 - \left( \frac{m-1}{m} \right)^2 \right] S_{rk}. \quad (32b'')$$

wobei  $N_\infty = \frac{e^{2k\pi\kappa}}{4k\pi\kappa}$  sein soll.

Die Beiwerte  $a, b, c, d, e, f, A, B, C, D, N, \bar{N}$  und  $N_\infty$  sind nur von  $k$  und  $\kappa$  abhängig und können daher in zweidimensionalen Tabellen ein für alle Mal für alle rechteckigen Faltwerksscheiben berechnet werden.

### C. Die Ermittlung der Lösung

Legt man um die Knotenlinien von Endscheibe zu Endscheibe reichende röhrenförmige Schnitte mit unendlich kleiner Innenfläche  $\Delta f$ , so muß für die dadurch freiwerdenden Schnittkräfte  $t$  und  $p$  am Knotenfragment Gleichgewicht bestehen (Fig. 1). Trennt man von diesem wieder durch 2 voneinander um  $dx$  entfernte Ebenen ein Linienelement von der Länge  $dx$  ab, so greifen an den dazugehörigen Ringschnittflächen einerseits die knotenparallelen Kräfte  $\sigma \cdot \Delta f$  und andererseits die dazu senkrecht stehenden Kräfte  $\tau \cdot \Delta f$  an. Da diese beiden Wirkungen mit  $\Delta f$  unendlich klein von 2ter Ordnung werden, lauten für die  $k$ ten Glieder der Entwicklungen Gl. (4a, b, c, d) die Gleichgewichtsbedingungen in Richtung parallel bzw. normal zur Knotenlinie

$$\sum_1^{\bar{m}} d_{r\rho} \tau_{r\rho k} = \sin \frac{k\pi}{L} x \sum_1^{\bar{m}} d_{r\rho} T_{r\rho k} = 0 \quad (33a)$$

bzw.

$$[P_{rk} \cos \beta + \sum_1^{\bar{m}} d_{r\rho} S_{r\rho k} \cos \alpha_{r\rho}] \sin \frac{k\pi}{L} x = 0 \quad (33b)$$

$$[P_{rk} \sin \beta + \sum_1^{\bar{m}} d_{r\rho} S_{r\rho k} \sin \alpha_{r\rho}] \sin \frac{k\pi}{L} x = 0, \quad (33c)$$

wenn  $\bar{m}$  Scheiben in einem Knoten  $r$  zusammenlaufen (Fig. 4). Der erste Index der Glieder der 2ten Summen gibt jeweils den Knoten an, an welchem die  $T$  bzw.  $S$  anliegen, während der erste und zweite Index zusammen jeweils diejenige Scheibe bestimmen, zu welcher die einzelnen Größen gehören. Da die achsparallelen Verschiebungen der einzelnen Scheiben an jedem Knoten punktweise übereinstimmen müssen, sind die Amplituden  $E$  der bezogenen Dehnungen  $\epsilon_x$  der Gl. (18) der am Knoten  $r$  anliegenden Scheibenränder alle untereinander gleich, und zwar gleich  $E_r$ . Setzt man daher in Gl. (33a) die Gl. (31a) und (31b) ein, so ergibt sich für jeden Knoten die Beziehung

$$E E_r \sum_1^{\bar{m}} g_\rho + E \sum_1^{\bar{m}} h_\rho E_\rho = \sum_1^{\bar{m}} i_\rho S_{r\rho} + \sum_1^{\bar{m}} j_\rho S_{\rho r}, \quad (34)$$

welche wir in Anbetracht der obigen Darlegungen Kontinuitätsbedingungen I. Art nennen wollen. Für eine schubspannungsfreie Randkante z. B. 1, 2 und 5 in Fig. 1 vereinfacht sich die Gl. (34). Man erhält sie dann, indem man in der jeweils zugehörigen Gl. (31a) bzw. (31b)  $T_{s,k}$  bzw.  $T_{r,k}$  Null setzt.

Führt man wieder längs jeder Knotenlinie unendlich enge röhrenförmige Schnitte, so zerfällt das Faltwerk in seine einzelnen Scheiben, die sich dann,



$$u_{rk} \cos \alpha_{r\rho} + v_{rk} \sin \alpha_{r\rho} = \frac{1}{E} N_{r\rho k} \quad (35a)$$

$$u_{rk} \cos \alpha_{r\mu} + v_{rk} \sin \alpha_{r\mu} = \frac{1}{E} N_{r\mu k} \quad (35b)$$

$$u_{rk} \cos \alpha_{r\nu} + v_{rk} \sin \alpha_{r\nu} = \frac{1}{E} N_{rk}. \quad (35c)$$

Bestimmt man aus zwei von diesen  $u_{rk}$  und  $v_{rk}$  und setzt diese Werte in die dritte der obigen Gleichungen ein, so ergibt sich

$$N_{r\rho k} \sin \alpha_{\mu\nu k}^{(r)} + N_{r\mu k} \sin \alpha_{\nu\rho k}^{(r)} + N_{r\nu k} \sin \alpha_{\rho\mu k}^{(r)} = 0, \quad (36)$$

worin die Indices  $\rho$ ,  $\mu$  und  $\nu$  zyklisch gruppiert sind. Für jeden Knoten, in welchem  $m$  Scheiben zusammenstoßen, bestehen  $m - 2$  solcher Gleichungen. Dabei werden die Winkel  $\alpha^{(r)}$  von positiver  $y$ -Richtung zu positiver  $y$ -Richtung gezählt. Das Vorzeichen ist durch die Reihenfolge der unteren Indices festgelegt. Damit ist nun auch die Kontinuitätsbedingung II. Art in ihre analytische Form gebracht.

Setzt man nun die Gl. (32a) und (32b) in Gl. (36) ein, so erhalten wir zu den Gl. (34) weitere lineare Beziehungen zwischen den  $E_{sk}$ ,  $E_{rk}$ ,  $S_{sk}$  und  $S_{rk}$  von der Form

$$\sum^{\rho} l_{\rho k} E_{\rho sk} + \sum^{\rho} m_{\rho k} E_{\rho rk} + \sum^{\rho} n_{\rho k} S_{\rho sk} + \sum^{\rho} o_{\rho k} S_{\rho rk} + q_{\rho k} P_k = 0. \quad (37)$$

Hat das Faltwerk  $r$  Knoten und  $s$  Scheiben, so liegen  $r$  Amplituden  $E_k$  und  $2s$  Amplituden  $S_k$ , im ganzen also  $r + 2s$  Unbekannte vor. Diesen stehen  $r$  Gl. (34),  $2r$  Gl. (33b,c) und  $2s - 2r$  Gl. (37), also im gesamten  $r + 2r + 2s - 2r = r + 2s$  Beziehungen gegenüber, so daß man aus den Gl. (34), (33b,c) und (37) alle Unbekannten bestimmen kann. Eliminiert man nun zweckmäßig mit Hilfe der Gl. (33b,c) aus den Gl. (34) und (37)  $2r$  von den  $S_k$ , stellt durch Auflösung der Gl. (34) die  $E_k$  als lineare Funktionen der  $S_k$  dar, setzt die  $E_k$  in die Gl. (37) ein und drückt alle  $S_k$  durch die Unbekannten  $X_{\nu k}$  ( $\nu = 1, 2, \dots, n$ ) und die Knotenlast  $P_k$  aus, so erhalten wir  $n$  Gleichungen von der Form

$$\sum_1^n \beta q_{\beta\nu k} X_{\beta k} = w_{\nu k} P_k; \quad (\nu = 1, 2, \dots, n), \quad (38)$$

woraus man die Unbekannten  $X_{\nu k}$  bestimmen kann.

Wir führen der besseren Übersichtlichkeit zuliebe die Berechnung nur für den Fall *einer* Knotenbelastung aus. Treten mehrere solcher Knotenbelastungen zu gleicher Zeit auf, so erhält man die Resultate durch schlichte Überlagerung der einzelnen Belastungsfälle.

Es ist manchmal auch zweckmäßig, die Gl. (34) nicht nach den  $E_k$ , sondern nach den  $S_k$  aufzulösen und diese Werte in die Gl. (37) einzusetzen. Man erhält dann wieder Elastizitätsgleichungen (38') von ähnlicher Form wie die Gl. (38),

in welchen jedoch die  $X_{\nu k}$  jetzt unbekannte Dehnungsamplituden  $E_k$  darstellen. Ob man nun Gl. (38) oder Gl. (38') als endgültige Bestimmungsgleichungen wählt, hängt davon ab, welche von den beiden Gleichungssystemen die geringere Zahl von Unbekannten  $X_{\nu k}$  enthält.

Für jedes Glied der Entwicklung (4a, b, c, d) gibt es ein solches System (38) oder (38'). Summiert man die dazugehörigen Lösungen, so erhält man die Unbekannten  $X_\nu$  als Fourier'sche Reihen von der Form

$$X_\nu = \sum_{k=1}^{k=\infty} X_{\nu k} \sin \frac{k\pi}{L} x = \sum_{k=1}^{k=\infty} z_{\nu k} P_k \sin \frac{k\pi}{L} x. \quad (39)$$

$$\nu = 1, 2, \dots, n$$

#### D. Allgemeiner Konvergenzbeweis

Der im vorigen Abschnitt angegebene Lösungsweg hat zunächst nur dann einen Sinn, wenn die Sinus-Reihen (39) konvergieren. Wir werden in der Folge beweisen, daß dies immer der Fall sein muß.

Wandert der Zeiger  $k$  gegen  $\infty$ , so gehen, wie man durch einen langwierigen, jedoch nicht schwierigen Grenzübergang zeigen kann, in den Gl. (31a, b) die Beiwerte der  $E_s$ ,  $E_r$ ,  $S_s$  und  $S_r$  über in

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{k\pi\kappa}{N_k} EN_k d_k = + \frac{1}{2} E + \kappa_{E_1}(k) \quad (40a)$$

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{k\pi\kappa}{N_k} EN_k c_k = \kappa_{E_2}(k) \quad (40b)$$

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{k\pi\kappa}{N_k} A_k = \frac{1}{2} \frac{m-1}{m} + \kappa_{S_1}(k) \quad (40c)$$

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{k\pi\kappa}{N_k} B_k = \kappa_{S_2}(k). \quad (40d)$$

Sinngemäß ergibt sich für die durch  $2k\pi\kappa$  dividierten Gl. (32a, b)

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{A_k}{N_k} = h \frac{m-1}{m} + \kappa_{E_3}(k) \quad (41a)$$

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{B_k}{N_k} = \kappa_{E_4}(k) \quad (41b)$$

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{C_k}{N_k} = \frac{h}{E} \left[ 4 - \left( \frac{m-1}{m} \right)^2 \right] + \kappa_{S_3}(k) \quad (41c)$$

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{D_k}{N_k} = \kappa_{S_4}(k)^4. \quad (41d)$$



In diesen Beziehungen bedeuten die  $\kappa$  Funktionen des Zeigers  $k$ , welche für  $k \rightarrow \infty$  in Null von der Ordnung  $\frac{k^\vartheta}{e^k}$  übergehen, wobei  $\vartheta$  eine endliche Zahl ist. Man kann hierfür auch die symbolische Schreibweise  $0^\infty$  benutzen.

Mit diesen Grenzwerten gehen nun für  $k \rightarrow \infty$  die Gl. (31a, b) oder aber auch kürzer die Gl. (31a'', b'') in

$$T_{s_\infty} = \pm \frac{1}{2} E E_{s_\infty} \pm \frac{1}{2} \frac{m-1}{m} S_{s_\infty} \quad (31a''', b''')$$

über und wir erhalten für einen Knoten  $\varphi$  die Gl. (34) in der Form

$$E E_{\varphi \infty} \sum_{\rho=1}^{\bar{m}} d_{\varphi\rho} - \frac{m-1}{m} \sum_{\rho=1}^{\bar{m}} d_{\varphi\rho} S_{\varphi\rho \infty} = 0, \quad (34')$$

wenn in  $\varphi$   $\bar{m}$  Scheiben mit den Dicken  $d_{\varphi\rho}$  zusammenlaufen. Stellt man nun mit Hilfe der Gl. (32a, b) oder kürzer (32a'', b'') eine der zum Knoten  $\varphi$  gehörigen Gl. (36) auf, dividiert diese durch  $2k\pi\kappa$ , was erlaubt ist, da  $2k\pi\kappa$  niemals Null werden kann, und führt nachher unter Zugrundelegung der Gl. (41a, b, c, d) den Grenzübergang für  $k \rightarrow \infty$  durch, so ergibt sich

$$\begin{aligned} \frac{m-1}{m} E_{\varphi \infty} (h_{\varphi\rho} \sin^{(\varphi)} \alpha_{\mu\nu} + h_{\varphi\mu} \sin^{(\varphi)} \alpha_{\nu\rho} + h_{\varphi\nu} \sin^{(\varphi)} \alpha_{\rho\mu}) \\ + \frac{1}{E} \left[ 4 - \left( \frac{m-1}{m} \right)^2 \right] (h_{\varphi\rho} S_{\varphi\rho \infty} \sin^{(\varphi)} \alpha_{\mu\nu} + h_{\varphi\mu} S_{\varphi\mu \infty} \sin^{(\varphi)} \alpha_{\nu\rho} \\ + h_{\varphi\nu} S_{\varphi\nu \infty} \sin^{(\varphi)} \alpha_{\rho\mu}) = 0, \quad (36') \end{aligned}$$

woraus mit Gl. (34')

$$\begin{aligned} \left( \frac{m-1}{m} \right)^2 \frac{\sum_{\rho=1}^{\bar{m}} d_{\varphi\rho} S_{\varphi\rho \infty}}{\sum_{\rho=1}^{\bar{m}} d_{\varphi\rho}} (h_{\varphi\rho} \sin^{(\varphi)} \alpha_{\mu\nu} + h_{\varphi\mu} \sin^{(\varphi)} \alpha_{\nu\rho} + h_{\varphi\nu} \sin^{(\varphi)} \alpha_{\rho\mu}) \\ + \left[ 4 - \left( \frac{m-1}{m} \right)^2 \right] (h_{\varphi\rho} S_{\varphi\rho \infty} \sin^{(\varphi)} \alpha_{\mu\nu} + h_{\varphi\mu} S_{\varphi\mu \infty} \sin^{(\varphi)} \alpha_{\nu\rho} + h_{\varphi\nu} S_{\varphi\nu \infty} \sin^{(\varphi)} \alpha_{\rho\mu}) = 0 \quad (37') \end{aligned}$$

folgt. Wie man sieht, enthalten diese Beziehungen immer nur die den Knoten  $\varphi$  unmittelbar anliegenden  $S_{\varphi\rho \infty}$ . Stellt man also für den Letzteren die möglichen  $\bar{m} - 2$  Gl. (37') auf und nimmt zu diesen die beiden zum Knoten  $\varphi$  gehörigen Gl. (33b) und (33c), so verfügen wir über  $\bar{m}$  Gleichungen, welche für die Bestimmung der an  $\varphi$  unmittelbar angrenzenden Beiwerte  $S_{\varphi\rho \infty}$  gerade hinreichen. Drückt man für alle Knoten die  $S_{\varphi\rho \infty}$  wieder durch die Unbekannten  $X_{\nu \infty}$  und durch die Knotenbelastung  $P_\infty$  aus, so erhalten wir die Gl. (37') in der Form

<sup>4)</sup> Diese Grenzwerte ergeben sich auch aus den Gl. (32a'', b'') indem man  $N_\infty = \infty$  setzt. Dieser Weg ist aber nicht ganz exakt.

$$\sum_{\nu=1}^{\nu=n} X_{\nu\infty} \cdot a_{\varphi\nu\rho\infty} = P_{\infty} \cdot b_{\varphi\rho\infty} \quad (42)$$

$$(\rho = 1, 2, \dots, n)$$

mit den Lösungen

$$X_{\nu\infty} = \rho_{\varphi\nu\infty} \cdot P_{\infty} \quad (42a)$$

$$(\nu = 1, 2, \dots, n),$$

wobei für jeden Knoten  $\varphi (1, 2, \dots, r)$  ein solcher Gleichungssatz besteht, woran der Zeiger  $\varphi$  erinnern soll. Nach den obigen Ausführungen bestehen diese Beziehungen aus ebenso vielen voneinander unabhängigen Gruppen als Knoten vorhanden sind, was durch Verschwinden bestimmter  $a_{\varphi\nu\rho\infty}$  zustande kommt. Sind die Nennerdeterminanten jeder dieser Gruppe von Null verschieden, so gilt

$$\rho_{\varphi\nu\infty} = \frac{X_{\nu\infty}}{P_{\infty}} \neq \infty \quad (\nu = 1, 2, \dots, n). \quad (42b)$$

Da sich aus den Gl. (42) die Grenzwerte der Beiwerte der Lösungsentwicklungen (39) für  $k \rightarrow \infty$  ergeben, wollen wir sie ein für alle Mal „Grenzgleichungen“ nennen.

Stellen wir die Gl. (38) das eine Mal für den Index  $k$  und das andere Mal für den um  $p$  größeren Index  $k+p$  auf, so werden sich die  $X_{\beta k}$  um  $\Delta X_{\beta k}$ , die  $P_k$  um  $\Delta P_k$  und die Beiwerte  $q_{\beta\nu k}$  bzw.  $w_{\nu k}$  um  $\Delta q_{\beta\nu k}$  bzw.  $\Delta w_{\nu k}$  ändern. Es ergibt sich also für  $k$

$$\sum_{\beta=1}^{\beta=n} X_{\beta k} \cdot q_{\beta\nu k} = P_k \cdot w_{\nu k}; \quad (\nu = 1, 2, \dots, n) \quad (43a)$$

und für  $k+p$

$$\sum_{\beta=1}^{\beta=n} X_{\beta k} + \Delta X_{\beta k} (q_{\beta\nu k} + \Delta q_{\beta\nu k}) = (P_k + \Delta P_k) (w_{\nu k} + \Delta w_{\nu k}) \quad (43b)$$

$$(\nu = 1, 2, \dots, n).$$

Führt man in Gl. (43b) die dort angedeuteten Multiplikationen teilweise aus und berücksichtigt die Gl. (43a), so folgen die linearen Gleichungen

$$\sum_{\beta=1}^{\beta=n} \Delta X_{\beta k} (q_{\beta\nu k} + \Delta q_{\beta\nu k}) = \Delta P_k (w_{\nu k} + \Delta w_{\nu k}) + \underbrace{\left( - \sum_{\beta=1}^{\beta=n} X_{\beta k} \cdot \Delta q_{\beta\nu k} + P_k \Delta w_{\nu k} \right)}_{R_{\nu k}}; \quad (44)$$

$$(\nu = 1, 2, \dots, n),$$

deren Lösungen in der Form

$$\Delta X_{\nu k} = \frac{\Delta P_k}{P_{k+p}} \overbrace{(X_{\beta k} + \Delta X_{\beta k})}^{X_{\nu, k+p}} + \sum_{\beta=1}^{\beta=n} \alpha_{\nu\beta, k+p} R_{\beta k} \quad (45)$$

$$\nu = 1, 2, \dots, n$$

darstellbar sind, wobei die  $\alpha_{\nu\beta, k+p}$  die zum System (43b) gehörigen Einfluß-

zahlen bedeuten<sup>6)</sup>. Ersetzt man die  $\Delta X_{\nu k}$  bzw.  $\Delta P_k$  durch  $X_{\nu, k+p} - X_{\nu k}$  bzw.  $P_{k+p} - P_k$ , so ergibt eine einfache Umformung

$$\frac{X_{\nu, k+p}}{P_{k+p}} = \frac{X_{\nu k}}{P_k} + \sum_{\beta=1}^{\beta=n} \alpha_{\nu\beta, k+p} \frac{R_{\beta k}}{P_k}; \quad (\nu = 1, 2, \dots, n). \quad (46)$$

In diesen Gleichungen gehen die Einflußzahlen  $\alpha_{\nu\beta, k+p}$  und die Restglieder  $R_{\beta k}$  auf die für endliche  $k$  geltenden Gl. (38) zurück. Führen wir nun für die Gl. (46) ebenfalls den Grenzübergang  $k \rightarrow \infty$  durch, so erhalten wir

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{X_{\nu, k+p}}{P_{k+p}} = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{X_{\nu k}}{P_k} + \sum_{\beta=1}^{\beta=n} \lim_{k \rightarrow \infty} \alpha_{\nu\beta, k+p} \frac{R_{\beta k}}{P_k}; \quad (\nu = 1, 2, \dots, n). \quad (47)$$

Da sowohl die Gl. (38) als auch die Grenzgleichungen (42) nur dann einen Sinn haben, wenn die dazugehörigen Nennerdeterminanten von Null verschieden sind, gilt für alle  $k$ , selbst wenn diese noch so groß werden

$$\alpha_{\nu\beta, k+p} \neq \infty$$

und es wird weiter mit Gl. (44)

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{X_{\nu, k+p}}{P_{k+p}} = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{X_{\nu k}}{P_k} + \sum_{\beta=1}^{\beta=n} \alpha_{\nu\beta, k+p} \lim_{k \rightarrow \infty} \left( - \sum_{\beta=1}^{\beta=n} \frac{X_{\beta k}}{P_k} \Delta g_{\beta\nu k} + \Delta w_{\nu k} \right) \quad (48)$$

( $\nu = 1, 2, \dots, n$ ).

Bei diesem Übergang gehen die Gl. (38) in die Grenzgleichungen (42) über, das heißt, sie spalten sich in ebenso viele Gruppen auf als Knoten vorhanden sind. Außerdem gehen die Einflußzahlen  $\alpha_{\nu\beta, k+p}$  in die zu den Gl. (42) gehörigen Einflußzahlen  $\alpha_{\varphi\nu}$  ( $\nu = 1, 2, \dots, n$ ) und die  $\Delta g_{\beta\nu k}$  bzw.  $\Delta w_{\nu k}$  in die ebenfalls den Grenzgleichungen zugeordneten  $\Delta a_{\varphi\nu\rho}$  bzw.  $\Delta b_{\varphi\rho}$  über. Berücksichtigt man die Lösungen (42a), so verwandeln sich nun die Gl. (48) in

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{X_{\nu, k+p}}{P_{\varphi, k+p}} = \rho_{\varphi\nu} + \sum_{\beta=1}^{\beta=n} \alpha_{\varphi\beta} \lim_{k \rightarrow \infty} \left( - \sum_{\beta=1}^{\beta=n} \rho_{\varphi\beta} \Delta a_{\varphi\beta} + \Delta b_{\varphi} \right). \quad (49)$$

( $\nu = 1, 2, \dots, n$ ).

Solcher Gleichungen gibt es wieder eine für jeden Knoten. Da sich die Gl. (37') und daher auch die Gl. (42) durch lineare Elimination der  $E_{\varphi\infty}$  aus den Gl. (34') und (36') ergeben haben, lassen sich die Beiwerte  $a_{\varphi\nu\rho}$  und  $b_{\varphi\rho}$  der Gl. (42) analog den Gl. (40) und (41) für über alle Maßen große  $k$  ebenfalls schematisch durch  $L + l \frac{k^\vartheta}{e^k}$  ausdrücken, wobei  $L$ ,  $l$  und  $\vartheta$  endliche, konstante Größen bedeuten, von denen die beiden ersten mit den ersten Gliedern der rechten Seiten der Gl. (40a, c) und (41a, c) algebraisch zusammenhängen. Da die  $\Delta a_{\varphi\nu}$  bzw.  $\Delta b_{\varphi}$  die Änderungen darstellen, welche die Beiwerte  $a_{\varphi\nu}$  bzw.  $b_{\varphi}$  erfahren, wenn der sehr große Zeiger  $k$  auf den noch größeren Zeiger  $k+p$  steigt, ergibt sich wegen

<sup>6)</sup> Es ist nur ein Knoten belastet. Siehe Seite 17, vorletzter Absatz.

$$\left[ \frac{(k+p)^\vartheta}{e^{k+p}} - \frac{k^\vartheta}{e^k} \right] = \frac{1}{e^k} \left[ (k+p)^\vartheta \frac{1}{e^p} - k^\vartheta \right] = \frac{k^\vartheta}{e^k} \left( \frac{1}{e^p} - 1 \right) + \frac{1}{e^k} \left[ \frac{p}{e^p} \binom{\vartheta}{1} k^{\vartheta-1} + \frac{p^2}{e^p} \binom{\vartheta}{2} k^{\vartheta-2} + \dots \right] \quad (50)$$

der Grenzwert

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{X_{\nu, k+p}}{P_{\varphi, k+p}} = \rho_{\varphi\nu\infty} + \epsilon_{\varphi\nu, k+p}; \quad \left( \begin{array}{l} \nu = 1, 2, \dots, n \\ \varphi = 1, 2, \dots, r \end{array} \right), \quad (51)$$

wobei  $\epsilon_{\varphi\nu, k+p}$  wieder von der Größenordnung  $0^\infty$  ist. Da für  $p \rightarrow \infty$  die Beiwerte der  $k$ -Potenzen  $-1$  bzw. Null werden, gelten die Gl. (51) auch dann, wenn  $p$  über alle Maßen wächst.

Mit diesem Ergebnis sind wir nun in der Lage, die Reihenreste der Lösungsentwicklungen (39) abzuschätzen. Diese betragen

$$\begin{aligned} \sum_{p=0}^{p=p-1} X_{\nu, k+p} \sin \frac{k+p}{L} \pi x &= \sum_{p=0}^{p=p-1} P_{\varphi, k+p} (\rho_{\varphi\nu\infty} + \epsilon_{\varphi\nu, k+p}) \sin \frac{k+p}{L} \pi x \\ &= \rho_{\varphi\nu\infty} \sum_{p=0}^{p=p-1} P_{\varphi, k+p} \sin \frac{k+p}{L} \pi x + \sum_{p=0}^{p=p-1} \epsilon_{\varphi\nu, k+p} P_{\varphi, k+p} \sin \frac{k+p}{L} \pi x \\ &\quad (\nu = 1, 2, \dots, n); \quad (\varphi = 1, 2, \dots, r). \end{aligned} \quad (52)$$

Man erhält zunächst weiter

$$\begin{aligned} \left| \sum_0^{p-1} X_{\nu, k+p} \sin \frac{k+p}{L} \pi x \right| &\leq \rho_{\varphi\nu\infty} \left| \sum_0^{p-1} P_{\varphi, k+p} \sin \frac{k+p}{L} \pi x \right| \\ &\quad + \sum_0^{p-1} \left| \epsilon_{\varphi\nu, k+p} P_{\varphi, k+p} \sin \frac{k+p}{L} \pi x \right| \\ &\quad (\nu = 1, 2, \dots, n); \quad (\varphi = 1, 2, \dots, r). \end{aligned} \quad (53)$$

Nach dem allgemeinen Entwicklungssatz über Fourier'sche Reihen kann man jede in einem Intervall  $0 \leq x \leq L$  periodische und in diesem Intervall abteilungsweise stetige Funktion  $f(x)$  in eine unendliche Sinus-Reihe

$$f(x) = \sum_0^\infty A_k \sin \frac{k\pi}{L} x \quad (54)$$

entwickeln, wobei für eine beliebige Stelle  $x=a$  des Intervalls der Reihenwert, also die rechte Seite der Gl. (54), immer gleich  $\frac{1}{2} [f(a+0) + f(a-0)]$  wird, wobei  $f(a+0)$  bzw.  $f(a-0)$  den rechts- bzw. linksseitigen Grenzwert von  $f(x)$  für  $x=a$  bedeutet. Die Entwicklungen (54) konvergieren also an jeder Stelle des Intervalls.

Entwickelt man das Belastungsglied  $P$  ebenfalls in eine Fourier'sche Reihe, so wird daher für jedes  $x$  das erste Glied der rechten Seite der Gl. (53) für jedes ganzzahlige, auch noch so große  $p$  von einem genügend großen Index  $k$  ab

$$\left| \sum_0^{p-1} P_{\varphi, k+p} \sin \frac{k+p}{L} \pi x \right| \underset{k \rightarrow \infty; p \rightarrow \infty}{\leq} \epsilon_{\varphi, \nu}; \quad \left( \begin{array}{l} \nu = 1, 2, \dots, n \\ \varphi = 1, 2, \dots, r \end{array} \right), \quad (55)$$

wobei  $\epsilon_{\varphi \nu}$  eine vorgegebene auch noch so kleine Zahl bedeutet. Da die  $\epsilon_{\varphi \nu, k+p}$  klein von der Ordnung  $0^\infty$  sind, kann man auf der rechten Seite der Gl. (53) das zweite Glied gegenüber dem ersten vernachlässigen, so daß

$$\left| \sum_{p=1}^{p=p-1} X_{\varphi \nu, k+p} \sin \frac{k+p}{L} \pi x \right| \underset{k \rightarrow \infty; p \rightarrow \infty}{\leq} \rho_{\varphi \nu \infty} \epsilon_{\varphi \nu}; \quad \left( \begin{array}{l} \nu = 1, 2, \dots, n \\ \varphi = 1, 2, \dots, r \end{array} \right) \\ 0 \leq x \leq L \quad (56)$$

wird. Dies ist aber die hinreichende und notwendige Bedingung dafür, daß die Lösungen (39) im selben Bereich wie die Lastentwicklungen Gl. (4e) konvergieren.

Divergieren die Belastungsentwicklungen (4e) an einer endlichen Anzahl von Stellen  $x = x_\gamma$  des Bereiches  $0 \leq x \leq L$ , so werden in Gl. (55) die  $\epsilon_{\varphi \nu}$  und mit diesen auch die rechten Seiten der Gl. (56) nicht mehr kleiner als jede noch so kleine angebbare Zahl, sondern endlich oder unendlich, da ja nach Gl. (42b) die  $\rho_{\varphi \nu \infty}$  endlich und im allgemeinen von Null verschieden sind, das heißt die Entwicklungen (39) divergieren dann auch für die  $x = x_\gamma$ . An den übrigen Stellen des Bereiches  $0 \leq x \leq L$  konvergieren die Lösungsentwicklungen (39), insofern dies die Lastentwicklungen an diesen übrigen Stellen tun. Ergibt sich hingegen für eine der Unbekannten  $X_\nu$  das zugehörige  $\rho_{\nu \infty} = 0$ , so wird, da sich diese Lösung aus einem der linearen Gleichungssysteme (42) als endliche Folge von Differenzen je zweier gleich großen Zahlen ergibt, die rechte Seite von Gl. (56) dann wieder kleiner als jede noch so kleine angebbare Zahl und die Entwicklungen (39) konvergieren dann auch an den Stellen  $x = x_\gamma$ , an welchen die Lastentwicklungen (4e) divergieren<sup>5)</sup>.

Betrachten wir nun die Entwicklung für eine Streckenlast  $2p\vartheta = P$  (s. Fig. 5) und führen hierfür unter Beibehaltung dieser letzteren Beziehung den Grenzübergang  $\vartheta \rightarrow 0$  durch, so erhalten wir die Reihenentwicklung für eine im Abstand  $a$  von  $x=0$  wirkenden Einzellast  $P$  in der Form

$$P = \frac{2P}{\pi} \sum_1^\infty k \sin \frac{k\pi}{L} a \cdot \sin \frac{k\pi}{L} x, \quad (57)$$

wobei die Schreibweise der linken Seite nur als Symbol aufgefaßt werden darf. Diese Entwicklung wird für  $x=a$  unendlich, sie ist also dort im Sinne der vorigen Ausführungen divergent.

Sind also bei den Belastungen an den Stellen  $x = x_\gamma$  Einzellasten vorhanden, so erscheinen solche wieder nur bei denjenigen Randquerbelastungen  $p_{r,s}$ , für welche die dazugehörigen  $\rho_\infty$  von Null verschieden sind. Für die anderen

<sup>5)</sup> In der Lastentwicklung (4e) kann  $P_\infty$  nie unendlich werden. Selbst beim Vorhandensein von Einzellasten bleibt  $P_\infty$  endlich, siehe Gl. (57).

Randquerbelastungen, für welche die dazugehörigen  $\rho_\infty$  Null werden, konvergieren die Reihenentwicklungen auch an den Stellen  $x=x_\gamma$ , das heißt die Einzellasten der äußeren Belastung werden von den Faltwerksscheiben auf dem Wege vom Lastangriffsort nach den mit  $\rho_\infty=0$  versehenen Randquerbelastungen so verteilt, daß sie bei den letzteren gar nicht mehr in Erscheinung treten. Da nach den vorhergehenden Darlegungen die Grenzgleichungen (42), deren Lösungen ja die  $\rho_\infty$  sind, sich in so viele Gruppen aufspalten als das Faltwerk Knoten hat, da weiters in jeder solchen Gruppe nur diejenigen Randquerbelastungen  $S_\varphi$  vorkommen, welche dem jeweiligen Knoten anliegen und da endlich die rechten Seiten jeder Grenzgleichungsgruppe nur durch die in dem dazugehörigen Knoten angreifende Belastung gebildet werden, sind die  $\rho_\infty$  nur für die einen mit Einzellasten behafteten Knoten anliegenden  $S_\varphi$  von Null verschieden, während sie für die anderen verschwinden. Es ergibt sich also für jedes Faltwerk ganz allgemein, und zwar gleichgültig, wie dieses gelagert und an den Enden abgeschlossen ist, daß Einzellasten nur bei denjenigen Randquerbelastungen  $S$  auftreten, welche einem Knoten anliegen, an dem selbst Einzellasten angreifen.

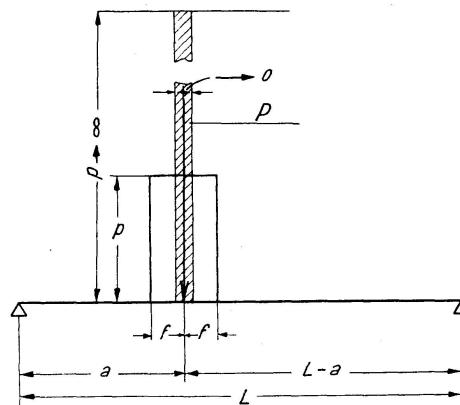


Fig. 5

Aus den Gl. (37) ergeben sich nun die  $E_{r,k}$  und  $E_{s,k}$  und aus den Gl. (31) und (32) die  $T_{s,k}$ ,  $T_{r,k}$ ,  $N_{s,k}$  und  $N_{r,k}$  als lineare Funktionen der  $S_{s,k}$  und  $S_{r,k}$ . Da letztere wieder durch die Gl. (33 b, c) bzw. (39) mit den  $P_k$  linear zusammenhängen, konvergieren die Sinus-Reihen aller dieser letztgenannten Größen, wenn dies die Lösungsentwicklungen (39) tun. Dies gilt auch für die Reihen der Spannungen  $\sigma_x$ ,  $\sigma_y$  und  $\tau$ , da letztere von den Scheibenrandlasten  $p$  und  $t$  in endlicher Weise abhängen. Nur an den Orten der Einzellasten wachsen, da an diesen Stellen die örtlichen Pressungen, die die Last auf die Unterlagen ausübt, entsprechend Figur 5, unendlich groß werden, die Spannungen über alle Maßen. Nach dem St. Venant'schen Prinzip klingen aber diese Unregelmäßigkeiten schon in kurzer Entfernung von den Angriffstellen der Einzellasten sehr rasch ab. Es gilt also folgender Lehrsatz:

„Werden Faltwerke nach der in den Abschnitten *A* bis *C* dargestellten exakten Membranentheorie mit Hilfe unendlicher Sinus-Reihen berechnet und sind die Nennerdeterminanten der zu jedem Knoten gehörigen Grenzgleichungen von Null verschieden, so konvergieren die Sinus-Reihen aller Wirkungsgrößen dann, wenn dies die Lastentwicklungen selbst tun. Sind in den äußeren Belastungen Einzellasten enthalten, so treten solche nur wieder bei den Randquerbelastungen  $p_s$  bzw.  $p_r$  auf, welche dem Lastknoten dieser Einzellasten unmittelbar anliegen. In der Umgebung der letzteren werden die Spannungen unendlich groß. Diese Bezirke sind jedoch sehr klein.“

Da, wie wir im Abschnitt *B* gezeigt haben, für jede einzelne Scheibe in dem dort dargelegten Sinne die nötigen Randbedingungen erfüllt sind, entsprechen die Gl. (39) und die sich daraus ergebenden anderen Wirkungsgrößen auch den Randbedingungen des gesamten Faltwerks. Die Entwicklungen (39) sind also die vollständigen Lösungen unseres Problems für den Fall, daß das Tragwerk mit den *rechten* Seiten der Belastungsfunktionen Gl. (4e) belastet ist. Da aber nach dem allgemeinen Entwicklungssatz über Fourier'sche Reihen die Summenwerte der rechten Seiten der Gl. (4e) nur an den stetigen Stellen der Funktion  $P(x)$  mit dem Funktionswert derselben übereinstimmen, können die Gl. (39) im streng mathematischen Sinne nicht als die exakten Lösungen unseres Problems angesprochen werden, da ja die in Rechnung gesetzte Belastung des Tragwerks mit der tatsächlich vorhandenen nicht in allen Punkten übereinstimmt. Da aber an den Unstetigkeitsstellen von  $P(x)$  die Summenwerte der Reihen jeweils die Beträge  $\frac{1}{2}[f(a+0) + f(a-0)]$  annehmen, da weiters bei Berücksichtigung einer genügenden Anzahl von Gliedern auch an diesen Unstetigkeitsstellen die rechte Seite der Gl. (4e) an  $P(x)$  eng genug angepaßt werden kann, diese Abweichung aber endlich ist und nach dem St. Venant'schen Prinzip in den Spannungen sehr rasch abklingt, spielt der obige Umstand für die Praxis gar keine Rolle. Außerdem ist zu bedenken, daß es tatsächlich gar keine Unstetigkeitsstellen gibt. Durch die Fourier'schen Reihen wird also das was die Natur von selber macht, rechnerisch erfaßt. Unser Lösungsweg entspricht also der Wirklichkeit besser, als das mathematisch exakte Integral. Wir erwähnen noch, daß sich unsere Lösungen an die Unstetigkeitsstellen der im obigen Sinne mathematisch exakten Lösungen genau so gut anpassen, wie dies die rechten Seiten der Gl. (4e) an die  $P(x)$  tun.

Hat hingegen die Belastung und ihre über die Intervallgrenzen periodische Fortsetzung keinerlei Unstetigkeitsstellen, so stellt unsere Lösung (39) auch in rein mathematischem Sinne das exakte vollständige Integral unseres Problems dar.

### E. Praktische Anwendung

Wir wollen das in der Figur 1 mit seinen Maßen dargestellte Sheddach als mehrteiliges prismatisches Faltwerk mit 4 Gliedern für eine am unteren Rand der Scheibe 13 angreifende halbseitige Vollast  $p$  berechnen. Da bei der Scheibe

34 das Verhältnis  $\frac{2h}{L}$  nur  $1/_{2,5}$  beträgt und in der Scheibe 13 auch größere achsnormale Spannungen auftreten können, ist die Anwendung der genauen Membrantheorie angezeigt. Zunächst liefert die Auswertung der Gl. (33 b, c) für den Knoten 4 die Beziehung

$$S_{43,k} = S_{45,k} = 0. \quad (58a)$$

Wählt man  $S_{31,k} = X_k$  als Unbekannte, so folgt weiter

$$S_{32,k} = \frac{1}{2} \sqrt{3} \frac{d_{13}}{d_{23}} X_k; \quad S_{34,k} = \frac{1}{2} \frac{d_{13}}{d_{34}} X_k \text{ ?} \quad (58b)$$

Da die Ränder 1, 2 und 5 kraftfrei sind, wird weiter

$$T_{23,k} = T_{13,k} = T_{54,k} = 0 \quad (59a)$$

und

$$S_{23,k} = S_{54,k} = 0; \quad S_{13,k} = P_k. \quad (59b)$$

Wir wählen die positiven  $y$ -Richtungen der einzelnen Scheiben nach Figur 1 und entwickeln die halbseitige Belastung  $p$  nach Gl. (4e) in eine Sinusreihe. Die Beiwerte hierfür lauten

$$\begin{aligned} S_{11} = P_1 &= + \frac{2p}{\pi}; & S_{12} = P_2 &= \frac{2p}{\pi}; & S_{13} = P_3 &= \frac{2p}{3\pi}; \\ S_{14} = P_4 &= 0; & S_{15} = P_5 &= \frac{2p}{5\pi}; & S_{16} = P_6 &= \frac{2p}{3\pi}, \end{aligned} \quad (60)$$

wobei  $p$  und die  $P$  auf die Längeneinheit der Scheibendicke  $d_{13}$  bezogen sind und somit die Dimension  $t/m^2$  haben.

Für das erste Glied  $k=1$  wird in der Folge die vollständige Rechnung im einzelnen durchgeführt, während wir uns für die anderen Belastungsglieder mit der Wiedergabe der Resultate begnügen wollen. Die Querdehnungszahl wird mit  $m=6$  angenommen.

### Scheibe 13

Wir erhalten mit  $\kappa = \frac{1}{30}$  die Beiwerte der Gl. (17 a, b), (29 a, b), (31 a, b) und (32 a, b) zu

$$\begin{aligned} a &= 2,01226; & b &= 2,01465; & c &= 0,0146860; \\ d &= 0,0295006; & e &= 2,02950; & f &= 2,02934; \\ N &= 0,0147071; & \bar{N} &= 0,000654607; \\ A &= 0,0297755; & B &= 0,0298815; \\ C &= 1,57354; & D &= 1,55923, \end{aligned} \quad (61)$$

womit sich nach den Gl. (31 a, b) mit Gl. (59b)

?) Neigungswinkel der Falten gegen die Horizontale  $60^\circ$  bzw.  $30^\circ$ .



$$T_{13} = 0 = -0,0694074 E E_1 - 0,0345524 E E_3 + 4,76329 P - 4,78025 X \quad (62a)$$

$$T_{31} = +0,0345524 E E_1 + 0,0694074 E E_3 + 4,78025 P - 4,76329 X \quad (62b)$$

und nach den Gl. (32a, b) mit Gl. (59b)

$$N_{13} = 45,486157 E_1 - 45,64799 E_3 + 106,99202 P - 106,0191 X \quad (63a)$$

$$N_{31} = +45,64799 E_1 - 45,486157 E_3 + 106,0191 P - 106,99202 X \quad (63b)$$

ergibt.

### *Scheibe 34*

Die dazugehörigen Beiwerte werden jetzt mit  $\kappa = \frac{1}{5}$  nach Gl. (17a, b), (29a, b), (31a, b) und (32a, b)

$$\begin{aligned} a &= 2,54219; & b &= 2,56954; & c &= 0,614329; \\ d &= 1,43990; & e &= 3,43990; & f &= 3,18387; \\ N &= 0,650631; & \bar{N} &= 1,69592; \\ A &= 2,08197; & B &= 2,13841; \\ C &= 2,35293; & D &= 1,70499. \end{aligned} \quad (64)$$

Daraus folgt wieder nach Gl. (31a, b) mit Gl. (58a, b)

$$T_{34} = +0,347091 E E_3 + 0,148085 E E_4 - 0,385671 \frac{0,40}{0,15} X \quad (65a)$$

$$T_{43} = -0,148085 E E_3 - 0,347091 E E_4 - 0,396079 \frac{0,40}{0,15} X \quad (65b)$$

und nach den Gl. (32a, b) mit Gl. (58a, b)

$$N_{34} = -7,36580 E_3 + 7,56454 E_4 - 10,8491 \frac{0,40}{0,15} X \quad (66a)$$

$$N_{43} = -7,56454 E_3 + 7,36580 E_4 - 15,7231 \frac{0,40}{0,15} X. \quad (66b)$$

### *Scheibe 23*

Für diese genügen, da  $\kappa_{23} = 0,02125$  klein genug ist, die einfachen, für kleine  $\kappa$  geltenden Formeln. Es wird nach den Gl. (31a', b') mit Gl. (58b) und Gl. (59b)

$$T_{23} = 0 = -0,0222007 (2 E_2 + E_3) - \frac{\sqrt{3}}{4\pi 0,02125} \frac{0,40}{0,20} X \quad (67a)$$

$$T_{32} = +0,0222007 (E_2 + 2 E_3) - \frac{\sqrt{3}}{4\pi 0,02125} \frac{0,40}{0,20} X \quad (67b)$$

und nach Gl. (32')

$$N_{32} = N_{23} = 71,5208 \frac{1}{E} (E_2 - E_3). \quad (68)$$

*Scheibe 45*

Auch hierfür reichen wegen dem genug kleinen  $\kappa_{45} = 0,02625$  wieder die vereinfachten, einmal gestrichenen Gleichungen und wir erhalten mit Gl. (58a) und Gl. (59b) nach Gl. (31a')

$$T_{45} = -0,041233 E E_4 \quad (69)$$

und nach Gl. (32')

$$N_{45} = N_{54} = 57,8977 \frac{1}{E} (E_2 - E_3). \quad (70)$$

Aus Gl. (31b') folgt weiter

$$E_5 = -1/2 E_4. \quad (71)$$

Wir sind nun in der Lage, die Kontinuitätsbedingungen I. Art aufzustellen. Es wird für den Knoten 3

$$0,15 T_{34} + 0,20 T_{32} + 0,40 T_{31} = 0 \quad (72a)$$

und für den Knoten 4

$$0,15 T_{43} + 0,30 T_{45} = 0. \quad (72b)$$

Eliminiert man aus den Gl. (62a, b)  $E_1$  und aus den Gl. (67a, b)  $E_2$  und setzt in die Gl. (72a, b) die Gl. (62b), (65a, b), (67b) und (69) ein, so ergibt sich das lineare System

$$0,07962206 E E_3 + 0,02221275 E E_4 = 6,903225 X - 2,860607 P \quad (73a)$$

$$0,02221275 E E_3 + 0,06443367 E E_4 = -0,1584314 X \quad (73b)$$

mit den Lösungen

$$E E_3 = 96,684 X - 39,750 P \quad (74a)$$

$$E E_4 = -35,789 X + 13,703 P. \quad (74b)$$

Damit erhält man weiter nach Gl. (62a)

$$E E_1 = +88,416 X - 117,039 P \quad (74c)$$

und nach Gl. (67a)

$$E E_2 = -339,821 X + 19,849 P. \quad (74d)$$

Aus Gl. (71) folgt schließlich

$$E E_5 = +17,895 X - 6,852 P. \quad (74e)$$

Die Kontinuitätsbedingung II. Art nimmt nach Gl. (36) für den Knoten 3 die Form

$$\sqrt{3} N_{32} + 2 N_{31} + N_{34} = 0 \quad (75)$$

an. Ersetzt man darin die  $N$  durch die Gl. (68), (63b) und (66a), so erhalten wir eine lineare Beziehung der Größen  $E_1$ ,  $E_2$ ,  $E_3$ ,  $E_4$ ,  $P$  und  $X$ , aus welcher man nach Elimination der  $E$  mit Hilfe der Gl. (74a, b, c, d) die Beziehung

$$19682,85 P = 74776,47 X \quad (76)$$

mit

$$X_1 = 0,263223 P_1$$

als Lösung erhält. Der Einfachheit halber wurde bei sämtlichen Gleichungen bis auf die letzte der Index  $k=1$  nicht angeschrieben.

Es ergeben sich nun nach den Gl. (74a, b, c, d, e) die Dehnungen  $E$  der Kanten, nach den Gl. (62b), (65a, b), (67b) und (59a) die Schubspannungsbewerte  $T$  und nach den Gl. (63a, b), (66a, b), (68) und (70) die Verformungsbewerte  $N$  der Scheibenränder.

Auf dieselbe Weise wurde die Berechnung von weiteren 4 Gliedern durchgeführt. Dabei konnten für die Scheibe 34 einschließlich vom Glied  $k=5$  ab die vereinfachten Formeln (17a", b"), (29a", b"), (31a", b") und (32a", b") benutzt werden. Die Ergebnisse sind in Tabelle I übersichtlich zusammengestellt.

Um das Verhalten der darin vorkommenden Beiwerke zu verstehen, stellen wir folgende Betrachtung an. Belastet man nämlich das Faltwerk mit den

Tabelle I

	$k=1$ $xP_1 \sin \frac{\pi}{L} x$	$k=2$ $xP_2 \sin \frac{2\pi}{L} x$	$k=3$ $xP_3 \sin \frac{3\pi}{L} x$	$k=4$	$k=5$ $xP_5 \sin \frac{5\pi}{L} x$	$k=6$ $xP_6 \sin \frac{6\pi}{L} x$	gewöhnl. Faltwerk $k=1,2,\dots,\infty$
$X$	+ 0,263223	+ 0,278631	+ 0,294481	0	+ 0,313305	+ 0,315767	+ 0,257384 $P$
$EE_1$	+ 57,6185	+ 14,2769	+ 6,2894	0	+ 2,2861	+ 1,6458	+ 0,633655 $P \cdot z^2$
$EE_2$	- 69,5739	- 18,4311	- 8,6992	0	- 3,3860	- 2,3877	- 0,746010 $P \cdot z^2$
$EE_3$	- 14,3006	- 3,7451	- 1,6747	0	- 0,5336	- 0,3378	- 0,153385 $P \cdot z^2$
$EE_4$	+ 4,2822	+ 0,5600	+ 0,0803	0	- 0,0012 <sub>06</sub>	- 0,0009 <sub>6</sub>	+ 0,062953 $P \cdot z^2$
$EE_5$	- 2,1411	- 0,2800	- 0,0402	0	+ 0,0006 <sub>03</sub>	+ 0,0004 <sub>03</sub>	- 0,031477 $P \cdot z^2$
$EN_{31}$	+ 3358,5047	+ 224,3959	+ 48,2452	0	+ 7,5152	+ 3,9682	+ 0,393520 $P \cdot z^4$
$EN_{32}$	- 3953,1906	- 262,5886	- 55,8219	0	- 8,1602	- 4,0725	- 0,464804 $P \cdot z^4$
$EN_{34}$	+ 130,1131	+ 6,0245	+ 0,2046	0	- 0,8941	- 0,8835	+ 0,018028 $P \cdot z^4$
$EN_{43}$	+ 134,2011	+ 5,8003	+ 0,5083	0	- 0,0345	- 0,0121	+ 0,018028 $P \cdot z^4$
$EN_{45}$	+ 371,8943	+ 12,1701	+ 0,7752	0	- 0,0042	- 0,0032	+ 0,056370 $P \cdot z^4$
$EN_{13}$	+ 3352,7235	+ 224,0866	+ 48,9378	0	+ 8,7032	+ 3,9249	+ 0,393529 $P \cdot z^4$
$T_{31}$	+ 4,5247	+ 2,1845	+ 1,4109	0	+ 0,8195	+ 0,6750	+ 0,480270 $P \cdot z$
$T_{32}$	- 5,5993	- 2,9609	- 2,0778	0	- 1,3084	- 1,0917	- 0,573364 $P \cdot z$
$T_{34}$	- 4,6002	- 1,8728	- 0,9920	0	- 0,4409	- 0,3443	- 0,516232 $P \cdot z$
$T_{43}$	+ 0,3534	+ 0,0920	+ 0,0199	0	- 0,0004 <sub>969</sub>	- 0,0004 <sub>878</sub>	+ 0,052098 $P \cdot z$
$T_{45}$	- 0,1766	- 0,0462	- 0,0099	0	+ 0,0002 <sub>486</sub>	+ 0,0002 <sub>439</sub>	- 0,026361 $P \cdot z$

$$\left. \begin{array}{l} N_{23} = N_{32} \text{ für } k \leq 6; \text{ 1. Kontrolle } T_{31} \cdot d_{13} + T_{32} \cdot d_{23} + T_{34} \cdot d_{34} = 0 \\ \text{2. Kontrolle } T_{45} \cdot d_{34} + T_{54} \cdot d_{45} = 0 \\ N_{45} = N_{54} \text{ für } k \leq 6; \text{ 3. Kontrolle } N_{32} \cdot \sqrt{3} + N_{31} \cdot 2 + N_{34} = 0 \end{array} \right\} \begin{array}{l} \text{für alle Werte von } k \\ z = \frac{L}{k\pi} \end{array}$$

Gliedern  $k \geq 2$ , so werden in den durch die Nullpunkte von  $\sin \frac{k\pi}{L} x$  parallel zu den Endscheiben gelegten Ebenen alle Wirkungsgrößen bis auf die Querkräfte  $Q$  gleich Null. Durch diese sogenannten Nullebenen kann man sich das Gesamttragwerk in  $k$  Teiltragwerke zerlegt denken, welche in den Punkten  $k=0, k = \frac{L}{k}, k = \frac{2L}{k}, \dots, x=L$  vorübergehend gelagert sind. Die dort auftretenden Auflagerdrücke dieser Teiltragwerke entsprechen den in den obigen Punkten auftretenden Querkräften  $Q$  des mit der  $k$ ten Welle belasteten Gesamttragwerkes mit der Stützweite  $L$ . Da je zwei benachbarte Teiltragwerke entsprechend der Form der  $k$ ten Welle gegenspiegelgleich belastet sind, heben sich in jeder der Nullebenen die links- und rechtsseitigen Auflagerdrücke auf. Nur in den beiden Endquerschnitten  $x=0$  und  $x=L$  sind die dort auftretenden  $Q$  der beiden anliegenden Teiltragwerke mit den Auflagerdrücken des Gesamttragwerkes identisch (Fig. 6).

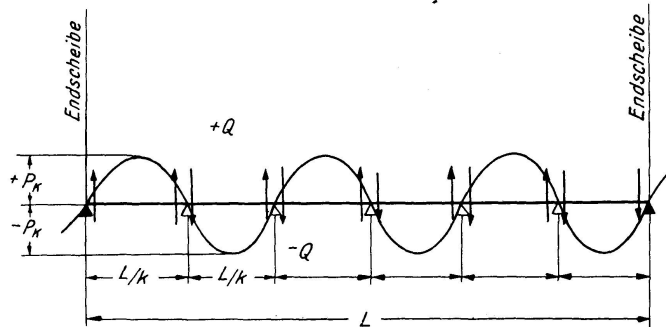


Fig. 6

Man kann also die obigen gedachten Unterstützungen bis auf die der Endscheiben wieder entfernen. Jedes Teiltragwerk ist dann mit einer einwelligen Sinusbelastung belegt, deren Amplitude gleich dem Fourier'schen Koeffizienten  $P_k$  des  $k$ ten Gliedes der Gl. (4e) ist. Man erkennt also zunächst, daß für die Berechnung von noch höheren Gliedern als die der Tabelle I auch bei den sonst schlanken Scheiben 23 und 45 die Werte von  $k\pi\kappa$  schon so groß werden können, daß man auch hierbei mit den genauen ungestrichenen Formeln rechnen muß. Steigt der Gliederindex noch weiter, so genügen von einem gewissen  $k$ -Wert an für *alle* Scheiben die zweimal gestrichenen Gleichungen, und zwar um so genauer, je größer  $k$  wird. Da bei den von Haus aus gedrunenen Scheiben 34 und 13 mit wachsendem Index die Biegesteifigkeit rascher zunimmt, als bei den von Haus aus schlanken Scheiben 23 und 45, wird sich anfangs mit steigendem  $k$  das Aufteilungsverhältnis der unten angehängten Last  $p$  im Knoten 3 zu Gunsten der steifsten Scheibe 34 verschieben, was sich in einem anfänglichen Ansteigen der Beiwerte der  $X$ -Entwicklung zeigt (Tabelle I). Ungefähr von dem Index  $k$  an, von welchem für alle Scheiben die zweimal gestrichenen Näherungsformeln Gl. (17a", b"), (29a", b"), (31a", b") und (32a", b") verwendet werden können, nehmen die Steifigkeiten der Schei-

ben zueinander schon so gleichmäßig zu, daß sich in der Tabelle I die Zahlenreihe der  $X$  immer mehr und mehr dem endlichen Grenzwert  $\rho_{1\infty}$  nähert, der sich als Lösung der zum Knoten 3 gehörigen Grenzgleichung ergibt. Da längs dieser Knotenlinie keine äußere Linienlast angreift, wird nach Abschnitt  $D$   $\rho_{1\infty} = 0$ . Die Beiwerte der zum Knoten 4 gehörigen Wirkungsgrößen nehmen, da dieser Knoten vom Lastknoten 3 durch die sehr gedrungene Scheibe 34 gut getrennt ist, sehr rasch ab und klingen sehr bald auf Null aus.

Um die Konvergenz unserer Lösung vollständig zu klären, muß untersucht werden, ob die Nennerdeterminanten der zu den Knoten 3 und 4 gehörigen Grenzgleichungsgruppen von Null verschieden sind. Man erkennt sehr leicht, daß diese für den Knoten 4 keine Bedeutung haben, da die dort zusammenstoßenden Querrandbelastungen identisch Null werden. Für den Knoten 3 reduzieren sie sich also auf eine Gleichung, die sich nach Gl. (37') zu

$$\left(\frac{m-1}{m}\right)^2 \frac{S_{31} \cdot 0,40 + S_{32} \cdot 0,20 + S_{34} \cdot 0,15}{0,75} (-1,00 \cdot 1,0 - 0,6375 \frac{1}{2} \sqrt{3} - 6 \cdot \frac{1}{2}) \\ + \left[4 - \left(\frac{m-1}{m}\right)^2\right] (-1,00 S_{31} - 0,6375 \frac{1}{2} \sqrt{3} S_{32} - 6 \cdot \frac{1}{2} S_{34}) = 0$$

ergibt, woraus mit Gl. (58b)

$$-X_{\infty} \cdot a = -18,375 X_{\infty} = 0 \quad (77)$$

wird. Da der Koeffizient  $a$  nicht verschwindet, ist das in dem allgemeinen Lehrsatz angeführte Konvergenzkriterium erfüllt, womit die Konvergenz unserer Lösung bewiesen ist.

Es ist noch notwendig, auf den folgenden Umstand aufmerksam zu machen, der bei der Lösung von Balkenfaltwerken mit Hilfe von Fourier'schen Reihen immer wieder beachtet werden muß. Die Resultate stellen nämlich die Lösung für einen unendlich langen Stab dar, der

1. denselben Querschnitt hat wie der zu untersuchende Balkenträger, und
2. durch eine feldweise wechselnde, in je zwei benachbarten Feldern gegen-spiegelgleiche Belastung belastet ist. Die Länge dieser Felder stimmt mit der Stützweite  $L$  des Balkenfaltwerkes überein.

Für einen an der Grenze zwischen zwei Feldern des unendlichen Stabes gedachten Querschnitt sind alle Wirkungsgrößen bis auf die Querkraft  $Q$  Null. Letztere ist aber wieder mit den Auflagerdrücken des Balkenträgers identisch. Dieser Umstand ergibt sich aus der Tatsache, daß jede Funktion, welche in eine Fourier'sche Reihe entwickelbar ist, periodisch sein muß (Fig. 7).

Wir wollen noch für die gedrungendste Scheibe, nämlich für 34, den Verlauf der Spannungsverteilungen ermitteln. Zu diesem Zwecke errechnen wir zunächst nach den Gl. (10a, b, c, d) die Integrationskonstanten  $U$ . Die Ergebnisse sind in Tabelle II zusammengestellt. Nun ergibt sich mit Hilfe der Gl. (7), (11) und (12) die Funktion  $Y$  mit ihren beiden ersten Ableitungen, woraus



Tabelle II

$k$	$U_1$	$U_2$	$U_3$	$U_4$
1	- 673,2973	- 114,3207	+ 50,3732	+ 388,2460
2	- 17,5794	- 10,3769	+ 6,5919	+ 17,1747
3	- 1,3972	- 1,6106	+ 0,9475	+ 1,9247
4	—	—	—	—
5	+ 0,0541	- 0,0112	- 0,0546	+ 0,0117
6	+ 0,0414	+ 0,0170	- 0,0416	- 0,0168

man weiter aus Gl. (8a, b, c) die Spannungen  $\sigma_x$ ,  $\sigma_y$  und  $\tau$  erhält. In Fig. 8a, 8b und 8c ist der Verlauf von  $Y''$ ,  $-\alpha^2 Y$  und  $-\alpha Y'$  gliedweise dargestellt, woraus man durch Multiplikation mit  $\sin \frac{k\pi}{L} x$  den zu einem beliebigen Querschnitt  $x$  gehörigen Spannungsverlauf erhält. Errechnet man die Randspannungen in den beiden Knoten 3 und 4 das einamal auf dem soeben gezeigten Weg, das andere Mal mit Hilfe der in der Tabelle I angeführten Größen  $E$ ,  $N$ ,  $T$  und der Gl. (14) und (19), so müssen sich jedesmal dieselben Weret

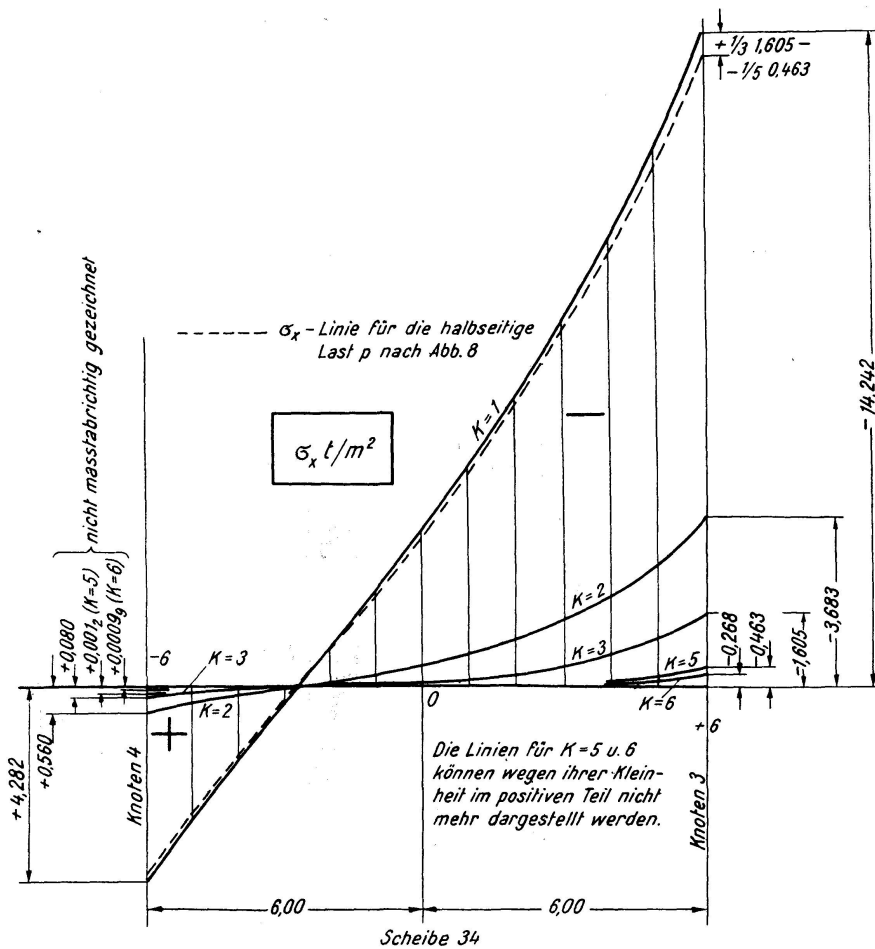


Fig. 8a

ergeben, eine Tatsache, die man als scharfe Rechenkontrolle benutzen kann. Aus den Fig. 8a, b, c ersieht man, daß für  $k=1$  der Verlauf der  $\sigma_x$  fast geradlinig und der der  $\tau$  nahezu parabolisch ist. Für die höheren Glieder ist diese Übereinstimmung mit der Navier'schen Spannungsverteilung zwar nicht mehr so gut. Da aber die Spannungen mit steigendem Index  $k$  selbst wieder abnehmen, wirkt sich dies bei der Summation der Fourier'schen Reihen nicht stark aus und man sieht, daß selbst bei einer so gedrungenen Scheibe, wie 34, die gewöhnliche Biegetheorie noch sehr gut erfüllt ist. Bei den anderen schlankeren

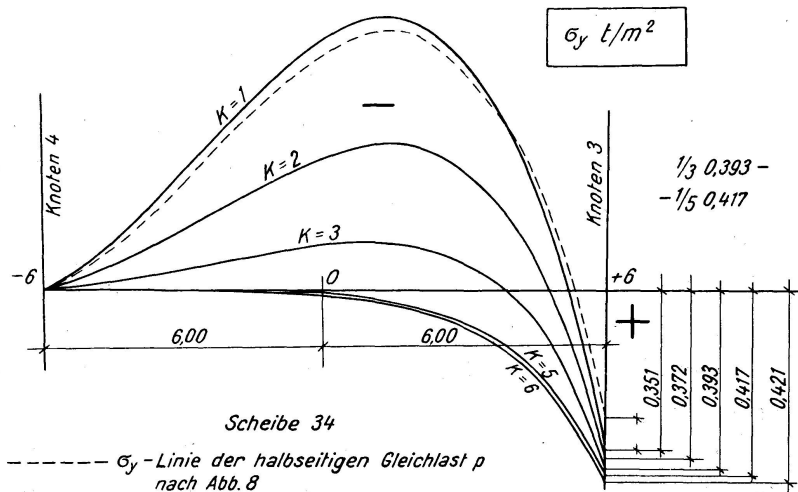


Fig. 8b

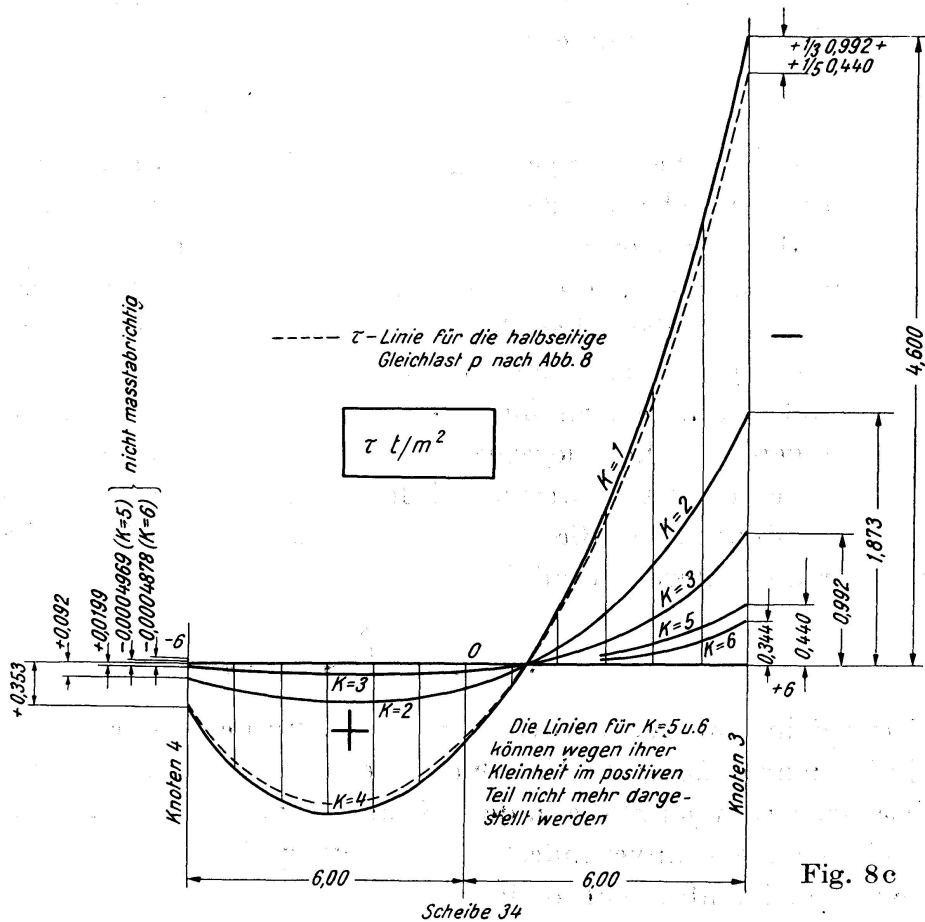


Fig. 8c



Faltwerksgliedern 13, 23 und 45 liegen die Abweichungen hiervon unter der zeichnerischen Strichstärke, so daß sie gar nicht mehr dargestellt werden könnten.

In Figur 8 ist die 6-gliedrige Summe  $\sum_1^6 k P_k \sin \frac{k\pi}{L} x$  für eine halbseitige Gleichlast  $p$  dargestellt. Die Anschmiegung der Summenlinie an die letztere kann schon als eine sehr gute bezeichnet werden. Um für diese Belastung die mit  $\frac{2p}{\pi}$  multiplizierten Spannungen und Verformungen in einen Faltwerksquerschnitt  $x$  zu erhalten, sind, entsprechend der in Figur 8 angegebenen Koeffizienten, die Werte der Tabelle I und diejenigen der Fig. 8a, b, c für  $k=1, 2, 3, 5, 6$  mit  $\sin \frac{\pi}{L} x$ ,  $\sin \frac{2\pi}{L} x$ ,  $\frac{1}{3} \sin \frac{3\pi}{L} x$ ,  $\frac{1}{5} \sin \frac{5\pi}{L} x$ ,  $\frac{1}{3} \sin \frac{6\pi}{L} x$  zu multiplizieren und hernach zu addieren. Auf diese Weise wurden für den Querschnitt  $x=L/2$  die Spannungsverteilungen der Scheibe 34 errechnet und in die Fig. 8a, b, c punktiert eingetragen. Sie weichen von der Navier'schen Verteilung fast überhaupt nicht ab.

Behandelt man nun das Tragwerk nach der gewöhnlichen Faltwerkstheorie, d. h. unterdrückt man die Wirkung der Spannungen  $\sigma_y$  und rechnet mit von Knoten zu Knoten geradlinigen Verteilung der  $\sigma_x$ , so muß man bei *allen* Scheiben und *allen*  $k$  die einmal gestrichenen Gleichungen (17a', b'), (29'), (31a', b') und (32') der weiteren Ermittlung zugrunde legen. Es ergibt sich dabei, daß die Beiwerte der Unbekannten  $X$  für *alle*  $k$  denselben Wert annehmen. Die Zahlenrechnung ergibt im besonderen

$$X_k = 0,257384 P_k; \quad k=1, 2, \dots \infty, \quad (78)$$

d. h. die Randquerbelastungen  $p_{sr}$  und  $p_{sr}$  sind der Belastung  $p$  selbst affin, eine Tatsache, welche aus der gewöhnlichen Faltwerkstheorie schon bekannt ist. Der in Gl. (78) angeführte Beiwert ist etwas kleiner als der zu  $k=1$  gehörige Beiwert in Tabelle I für die Unbekannte  $X$ . Dieses Ergebnis ist einleuchtend, da die nach der Navier'schen Spannungsverteilung gerechneten Verformungen der Scheibe 34 größer sind, als die nach der exakten Elastizitätstheorie ermittelten Scheibenrandverformungen, eine Tatsache, die sich daraus erklärt, daß durch die gewöhnliche Biegetheorie nicht alle vorhandenen Reserven einer solchen Scheibe erfaßt werden. Infolge der größeren Nachgiebigkeit der Scheibe 34 übernimmt diese dann auch nur einen entsprechend geringeren Anteil der am unteren Rand der Scheibe 13 angehängten Gleichlast  $p$ .

## F. Schlußbetrachtung

Vergleicht man den Beiwert der Gl. (78) mit den  $X$ -Beiwerten der Tabelle I, so findet man, daß trotz Verschiedenheit der einzelnen  $\kappa$  die Aufteilung der halbseitigen Last  $p$  auf die in dem Knoten 3 zusammenlaufenden Scheiben 13, 23 und 34 nahezu unverändert bleibt, gleichgültig ob man das Faltwerk nach der exakten Membrantheorie oder mit von Knoten geradlinig verlaufender

Verteilung der achsparallelen Normalspannungen berechnet. Erinnern wir uns noch, daß die mit Hilfe der Airy'schen Funktion ermittelten Spannungen von der Navier'schen Biegetheorie ebenfalls wenig abweichen, so erkennen wir allgemein den geringen Unterschied zwischen der exakten und der gewöhnlichen Faltwerkstheorie. Dieser ist aber um so größer, je größer und je verschiedener die die Schlankheit charakterisierenden Koeffizienten  $\kappa = \frac{h}{L}$  der einzelnen Scheiben sind.

Diese Erkenntnis gilt zunächst für die Maßverhältnisse des im vorigen Abschnitt durchgerechneten Tragwerkes. Darüber hinaus gilt sie im allgemeinen auch für die übrigen Faltwerke. Werden aber die  $\kappa$  noch größer und voneinander noch verschiedener, was z. B. bei hochwandigen Bunkern vorkommen kann, so wachsen die Unterschiede oft bis zu 20 bis 25% an. Man muß dann von der „exakten Membranentheorie der Faltwerke“ Gebrauch machen.

Mit dieser und den übrigen Abhandlungen des Verfassers ist die Theorie erster Ordnung der prismatischen gelenkigen Faltwerke, mit längs der Abszissenachse  $x$  konstant bleibenden Scheibendicken  $d$ , abgeschlossen.

### Zusammenfassung

Für Faltwerke, bei welchen die Höhen der einzelnen Falten gegenüber der Länge groß sind, müssen Untersuchungen angestellt werden, ob die übliche Berechnung unter Zugrundelegung einer von Knoten zu Knoten geradlinigen Verteilung der achsparallelen Spannungen  $\sigma_x$  noch zutreffend ist. Die Behandlung dieser Frage nach der genauen Elastizitätstheorie mittels Airy'scher Spannungsfunktionen führte zu der exakten Membranentheorie prismatischer Faltwerke. Die Lösungen werden in Form von Fourier'schen Reihen wiedergegeben. Es wird hier erstmalig allgemein nachgewiesen, daß diese immer dann konvergieren, wenn dies die analogen Entwicklungen der äußeren Belastungen tun, und wenn die Nennerdeterminanten der Grenzgleichungen nicht Null werden. Alle Ergebnisse sind exakt, wenn die beiden Auflager-scheiben in ihrer Achsebene vollkommen starr und normal hierzu vollkommen biegsam sind. Die Divergenzstellen, welche bei Einzellasten in deren Entwicklungen auftreten, erscheinen nur in denjenigen Faltenrändern wieder, welche in der von der Einzellast ergriffenen Kante liegen, während in allen übrigen Rändern ein stetiger Verlauf sämtlicher Kraftwirkungen herrscht. Dieses Verhalten der Faltwerke wurde durch die übliche Rechnungsweise bisher nicht erfaßt.

Bezüglich der Spannungen und der Verbindungskräfte zeigt die genaue Theorie nicht sehr starke Abweichungen von der bisherigen.

### Résumé

Dans le cas des systèmes constitués par un ensemble de parois portantes dont les hauteurs sont grandes par rapport à la longueur, il est nécessaire de

procéder à des investigations pour déterminer si le mode de calcul habituel, tablant sur une répartition linéaire de nœud en nœud des contraintes  $\sigma_x$  parallèles à l'axe, peut encore être valablement appliqué. L'étude de ce problème suivant la théorie exacte de l'élasticité, à l'aide des fonctions de contrainte d'Airy, conduit à la théorie exacte des membranes pour les poutres-cloisons prismatiques. Les solutions sont données sous la forme de séries de Fourier. Il est ici démontré pour la première fois, d'une manière générale, que ces séries sont toujours convergentes lorsque les développements analogues des charges extérieures le sont eux-mêmes, et lorsque les déterminants des dénominateurs des équations aux limites ne s'annulent pas. Tous les résultats sont exacts lorsque les deux plaques d'appui sont parfaitement rigides dans leur plan axial et parfaitement flexibles normalement à ce plan. Les points de divergence qui se manifestent dans ces développements en cas de charges isolées n'apparaissent que dans les zones marginales qui se trouvent sur l'arête intéressée par une charge isolée, tandis que dans les autres zones marginales, les actions exercées par les forces accusent toutes une allure continue. Ce comportement des ensembles de parois portantes n'avait jusqu'à maintenant pas été étudié par le mode de calcul habituel.

La théorie exacte traitée ici ne présente pas d'écarts très marqués par rapport aux théories antérieurement appliquées, du point de vue des contraintes et des efforts de liaison.

### Summary

For prismatical structures composed of thin plates, where the heights of the separate plates are big in comparison with the lengths, investigations must be made to ascertain whether it is still justifiable to make the usual calculation under the assumption that the stresses  $\sigma_x$  parallel to the axis are rectilinearly distributed from joint to joint. The treatment of the question according to the exact theory of elasticity by means of Airy stress functions would lead to the exact membrane theory of prismatical structures composed of thin plates. The solutions are given in the form of Fourier series. It has here for the first time been shown in general that these series always converge when the analogous developments of the external loads converge, and when the denominator-determinants of the boundary equations do not become zero. All results are accurate if the two stiffening diaphragms are absolutely rigid in their axial plane and can freely bend normally to that plane. The divergence places, which occur in their developments in the case of single loads, reappear only in those edges which lie in the border acted on by the single load, whilst in all other edges all forces act uniformly. This behaviour of prismatical structures composed of thin plates has not hitherto been taken into consideration in the usual methods of calculation.

With regard to the stresses and the connecting forces, the exact theory does not show any very great deviations from the theory hitherto in use.