

Contribution à l'étude des voiles minces continus

Autor(en): **Stevens, O. Bax**

Objekttyp: **Article**

Zeitschrift: **IABSE publications = Mémoires AIPC = IVBH Abhandlungen**

Band (Jahr): **16 (1956)**

PDF erstellt am: **22.07.2024**

Persistenter Link: <https://doi.org/10.5169/seals-15056>

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern.

Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden.

Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

Haftungsausschluss

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

Contribution à l'étude des voiles minces continus

Beitrag zur Berechnung dünnwandiger durchlaufender Schalen

Contribution to the analysis of thin walled continuous shells

Prof. O. BAX STEVENS, Royal Netherlands Harbour Works Co, Amsterdam

Le calcul des voiles minces cylindriques continus à section circulaire est effectué, comme nous le savons, en deux étapes.

La première étape comprend le calcul des efforts internes dans les voiles par travée en supposant chacun des voiles successifs, ne couvrant qu'une seule portée à la fois, librement posés sur deux appuis extrêmes.

Pour le calcul d'un voile pareil nous connaissons diverses méthodes auxquelles nous pouvons avoir recours.

La seconde étape comprend le calcul de la répartition des efforts internes dans le voile continu, c'est-à-dire que nous relient les voiles consécutifs entre eux aux appuis communs, une opération entraînant un changement des forces de coupure trouvés par le calcul de la première étape.

Pour effectuer le calcul de la répartition des efforts internes dans le voile continu nous nous basons donc sur les résultats de la première étape.

Ladite répartition est caractérisée par les efforts normaux unitaires dans le sens longitudinal ci-après désignés par n_x , par les efforts normaux unitaires dans le sens transversal désignés par n_φ et enfin par les efforts unitaires de cisaillement dans le sens longitudinal aussi bien que dans le sens transversal désignés respectivement par $n_{\varphi x}$ et $n_{x\varphi}$ ($n_{\varphi x} = n_{x\varphi}$).

Remarquons encore qu'un calcul direct et rigoureux des voiles continus tenant compte des moments fléchissants transversaux est impraticable et que pour cette raison leur calcul est effectué tout comme le calcul des poutres continues à section pleine à l'aide de la méthode dite „Clapeyron“, c'est-à-dire en déterminant les moments agissant dans les sections au droit des appuis en ne tenant compte que des déformations élastiques dues à la flexion seule.

Pour une poutre continue à section pleine à laquelle on peut attribuer en général la qualification „élancée“ on peut en effet faire abstraction des défor-

mations élastiques dues à l'effort tranchant sans que ceci ne conduise à une trop forte erreur.

Quant aux voiles minces continus il n'en est cependant pas toujours ainsi.

Ayant calculé les moments au droit des appuis du voile continu à l'aide de „Clapeyron“, on modifie ensuite les valeurs des forces de coupure n_x et $n_{x\varphi}$, obtenues par le calcul de la première étape, en rapport avec les valeurs de ces moments en appliquant le principe de superposition.

Quant aux efforts normaux unitaires n_φ et moments de flexion m_φ travaillant dans le sens transversal, résultant de même du calcul de la première étape, nous admettons que leurs valeurs ne changent pas lorsque les voiles consécutifs sont reliés entre eux aux appuis communs.

En ce qui concerne n_φ ce raisonnement s'adapte entièrement à la méthode que nous exposons ici. En ce qui concerne m_φ il n'en est cependant pas ainsi. Toutefois on peut démontrer par un exemple numérique que la continuité d'un voile n'affecte que légèrement la valeur des m_φ .

Dans une contribution présentée par Monsieur F. DISCHINGER à l'occasion du 2^e congrès de l'A.I.P.C. (Berlin, 1936) la méthode de calcul que nous venons d'esquisser est soumise à un examen approfondi. La conclusion qui s'en dégage est que ladite méthode, bien qu'elle ne soit qu'approchée, peut être maintenue tout au moins pour les voiles dits „élancés“. Pour les voiles dits „courts“ la différence entre les moments au droit des appuis calculés par la méthode „Clapeyron“ et ceux qui se développent en réalité peut devenir assez considérable.

Dans son étude Monsieur DISCHINGER part de l'hypothèse que l'allure des n_x sur le pourtour des sections transversales d'un voile librement posé sur

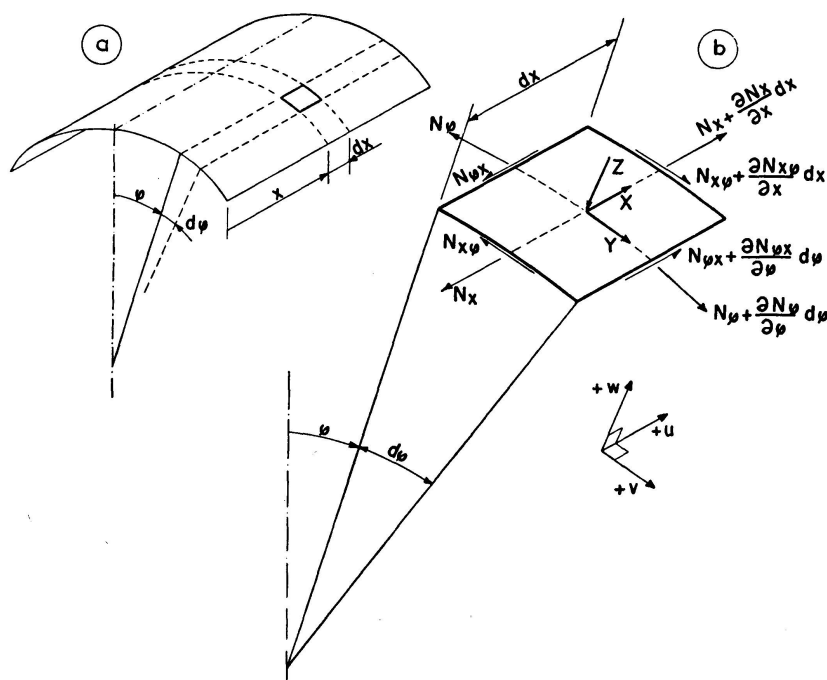


Fig. 1

deux appuis extrêmes est en général analogue à celle des n_x sur le pourtour des sections transversales d'une poutre tubulaire de même portée et rayon de courbure, pourvu qu'elle soit soumise à une charge caractérisée par:

$$X = 0 \quad Y = g \cdot \sin n\varphi \quad Z = g \cdot \cos n\varphi.$$

X , Y et Z désignant les composantes de cette charge par unité de surface de la paroi, respectivement dans le sens longitudinal, tangentiel et radial. Nous les avons marquées avec leur sens positif sur la figure 1. Quant aux composantes Y et Z , celles-ci peuvent être considérées de correspondre à la n^e harmonique d'une série de FOURIER.

L'ordre de l'harmonique n à introduire résulte du calcul de la première étape.

Remarquons que pour les voiles symétriques dits „voûtes“ nous trouvons d'ordinaire que n est environ 3, tandis que pour les voiles dissymétriques dits „sheds“ nous trouvons que n est environ 6.

De cette façon Monsieur DISCHINGER identifie le voile essentiellement avec un segment d'une poutre tubulaire. Son étude mène à la conclusion qu'à mesure que l'ordre de l'harmonique qu'il faut introduire dans le calcul de la seconde étape est plus élevé, l'influence de l'effort tranchant sur l'angle de rotation des sections transversales décroît et par conséquent également l'influence de l'effort tranchant sur les valeurs des moments au droit des appuis.

En partant de la même hypothèse que Monsieur DISCHINGER en ce qui concerne l'allure des n_x nous allons montrer ci-après comment on peut établir les formules auxquelles nous ferons appel pour le calcul des moments au droit des appuis pour n'importe quel cas de voile continu tout en n'appliquant que la théorie de la flexion classique et en observant pourtant les déformations dues à l'effort tranchant.

Avant d'aborder le problème qui nous occupe ici, nous allons d'abord rappeler la solution générale des équations fondamentales de la théorie des membranes flexibles que nous appliquons au calcul des voiles cylindriques isotropes en particulier de section circulaire.

Découpons sur le voile d'épaisseur δ un élément infiniment petit, alors nous pouvons établir pour les trois forces de coupure unitaires: n_x , $n_{x\varphi}$ et n_φ et les trois composantes: X , Y et Z de la charge les trois équations d'équilibre suivantes rapportées aux trois axes adoptés pour les coordonnées:

$$n_\varphi = -Z \cdot a, \quad (a)$$

$$\frac{\partial n_{x\varphi}}{\partial x} + \frac{\partial n_\varphi}{a \cdot \partial \varphi} = -Y, \quad (b) \quad (1)$$

$$\frac{\partial n_x}{\partial x} + \frac{\partial n_{x\varphi}}{a \cdot \partial \varphi} = -X. \quad (c)$$

Admettant que dans le calcul des voiles en béton armé ordinaire le coefficient de POISSON soit nul, nous pouvons établir les relations suivantes entre

les forces de coupure et les déplacements: u , v et w , respectivement dans les sens longitudinal, tangentiel et radial:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{n_x}{D}, \quad (\text{a})$$

$$\frac{\partial u}{a \cdot \partial \varphi} + \frac{\partial v}{\partial x} = \frac{2 n_{x\varphi}}{D}, \quad (\text{b}) \quad (2)$$

$$\frac{\partial v}{\partial \varphi} + w = \frac{a \cdot n_\varphi}{D}. \quad (\text{c})$$

Comme convention de signe nous avons adopté qu'un déplacement longitudinal u est positif s'il est dirigé dans le sens positif de la coordonnée x ; qu'un déplacement tangentiel v est positif s'il est dirigé dans le sens positif de l'angle φ , celui-ci étant mesuré à partir de l'axe vertical passant par le centre de gravité de la section tubulaire; et enfin qu'un déplacement radial w est positif s'il est dirigé vers l'extérieur. En outre: $D = E \cdot \delta$ désigne la rigidité extensionnelle par unité de longueur, E étant le module d'élasticité.

Portons dans les équations différentielles (1) les composantes de la charge définies par:

$$X = 0 \quad Y = g \cdot \sin n \varphi \quad Z = g \cdot \cos n \varphi \quad (3)$$

alors nous obtenons par intégration pour les forces de coupure unitaires dans la membrane les solutions suivantes:

$$n_\varphi = -g \cdot a \cdot \cos n \varphi, \quad (\text{a})$$

$$n_{x\varphi} = \{-g(1+n)x + C_1\} \sin n \varphi, \quad (\text{b}) \quad (4)$$

$$n_x = \left\{ \frac{g n (1+n)}{a} x^2 - \frac{n}{a} x C_1 + C_2 \right\} \cos n \varphi \quad (\text{c})$$

et pour les déplacements d'un point de la membrane:

$$u = \frac{1}{D} \left\{ \frac{g}{3a} \frac{n(1+n)}{2} x^3 - \frac{n}{2a} x^2 C_1 + C_2 x + C_3 \right\} \cos n \varphi, \quad (\text{a})$$

$$v = \frac{1}{D} \left\{ g(1+n)x^2 \left(\frac{n^2 x^2}{24a^2} - 1 \right) - C_1 x \left(\frac{n^2 x^2}{6a^2} - 2 \right) + \frac{nx^2}{2a} C_2 + \frac{nx}{a} C_3 + C_4 \right\} \sin n \varphi, \quad (\text{b}) \quad (5)$$

$$w = -\frac{1}{D} \left\{ g a^2 + g n (1+n) x^2 \left(\frac{n^2 x^2}{24a^2} - 1 \right) - n x C_1 \left(\frac{n^2 x^2}{6a^2} - 2 \right) + \frac{n^2}{2a} x^2 C_2 + \frac{n^2 x}{a} C_3 + n C_4 \right\} \cos n \varphi. \quad (\text{c})$$

Considérons la relation (5a) de plus près et mettons y : $n=1$ alors cette relation s'écrit:

$$u = \frac{1}{D} \left\{ \frac{g}{3a} x^3 - \frac{x^2}{2a} C_1 + C_2 x + C_3 \right\} \cos \varphi \quad (6)$$

et les composantes de la charge (3) deviennent:

$$X = 0 \quad Y = g \cdot \sin \varphi \quad Z = g \cdot \cos \varphi. \quad (7)$$

Les relations (7) s'appliquent à un voile soumis uniquement à une charge g par unité de surface.

Si le voile est fermé nous avons affaire à une poutre tubulaire.

En raison de la nature du problème que nous traitons ici il suffira de nous borner à l'étude des poutres tubulaires sur deux appuis extrêmes.

De la relation (6) résulte que u est proportionnel à: $\cos \varphi$, donc également à: $a \cdot \cos \varphi$. En d'autres termes, u est proportionnel à la distance: η d'un point de la section droite par rapport à son axe de gravité horizontal avec lequel se confond l'axe de flexion. Il s'ensuit que les sections initialement planes restent planes à la suite des déformations malgré que les déformations dues à l'effort tranchant aient été portées en ligne de compte. Par conséquent l'hypothèse de BERNOULLI qui donne pour les cisaillements dûs à l'effort tranchant une répartition inacceptable dans les section pleines travaillant en flexion est pourtant applicable dans le cas de sections creuses formées par les voiles de faible épaisseur.

Même si nous portons: $g=0$ dans (6) il s'ensuit que les sections restent planes à la suite des déformations.

Ce cas se présente lorsque l'on a affaire à une poutre tubulaire sur deux appuis extrêmes uniquement sollicitée par un moment fléchissant à une ou aux deux extrémités.

Etant partis de la supposition que la loi de HOOKE est applicable en ce qui concerne les déformations élastiques, il est évident que la répartition des efforts normaux: n_x sur toute la sections circulaire suivra la loi linéaire. Ce fait est confirmé par la relation (4c) d'où résulte pour: $n=1$

$$n_x = \left\{ \frac{g}{a} x^2 - \frac{x}{a} C_1 + C_2 \right\} \cos \varphi$$

et si en outre: $g=0$ nous obtenons:

$$n_x = \left\{ -\frac{x}{a} C_1 + C_2 \right\} \cos \varphi.$$

Par conséquent nous pouvons conclure que dans un cas particulier les forces de coupure: n_x et $n_{x\varphi}$ ainsi que les angles de rotation des sections et éventuellement les flèches peuvent être calculés à l'aide de la théorie de la flexion classique qu'on applique d'ordinaire au calcul des poutres à section pleine.

Il est à remarquer cependant que la théorie de la flexion classique ne nous permet de calculer ni l'effort de coupure n_φ ni le déplacement radial w .

En ce qui concerne n_φ remarquons toutefois que de la relation (4a) résulte que la valeur de cette force de coupure est indépendante de la coordonnée x et qu'elle n'est en effet définie en chaque point que par une relation ne faisant intervenir que le rayon de courbure a et la composante de la charge radiale:

$Z = g \cdot \cos \varphi$. Ajoutons encore que puisque la force de coupure n_φ ne résulte pas d'une équation différentielle quelconque, sa valeur ne changera pas non plus sous l'action de contraintes dues à un moment fléchissant qui pourrait agir aux sections extrêmes de la poutre tubulaire.

En ce qui concerne le déplacement radial w , remarquons que pour la détermination des quatre constantes d'intégration: C_1 , C_2 , C_3 et C_4 dans les relations (4) et (5) il y aura toujours par travée six conditions de rive auxquelles il faudra satisfaire simultanément. De ces six conditions il y en a toujours quatre étant en vigueur pour n'importe quel cas que l'on considère, c'est-à-dire qu'au droit de chaque appui: $v=0$ et $w=0$. Celles-ci résultent du fait que pour assurer l'équilibre dans la poutre tubulaire on dispose au droit des appuis un cadre raidisseur ou bien une paroi raidisseuse que l'on suppose indéformable dans son propre plan mais qui au contraire dans le sens perpendiculaire à son plan ne montre aucune résistance aux déformations.

Les deux autres conditions résultent du cas particulier que nous envisageons.

Si par exemple nous avons affaire à une poutre tubulaire librement posée sur deux appuis extrêmes, ces deux conditions s'expriment par: $n_x=0$ pour chacune des sections terminales. Si nous avons affaire à une poutre tubulaire encastree parfaitement à ses extrémités, ces deux conditions s'expriment par: $u=0$ à l'endroit de chacun des encastremets. Enfin si nous avons affaire à une poutre tubulaire librement posée à une extrémité et encastree parfaitement à l'autre, ces deux conditions s'expriment par: $n_x=0$ à l'endroit de l'appui libre et par: $u=0$ à l'endroit de l'encastrement.

Pour la détermination des quatre constantes d'intégration il ne nous faut que quatre conditions. Des six conditions imposées auxquelles il faudra satisfaire pour qu'une solution soit possible, il y en reste donc deux auxquelles on ne pourra satisfaire du tout.

Il est habituel de poser qu'il faille en tout cas que: $v=0$ aux appuis ce qui entraîne qu'à ces endroits on ne pourra satisfaire à la condition: $w=0$.

Par conséquent $w \neq 0$ à la jonction de la paroi mince du voile et du raidisseur. Il s'ensuit que des perturbations de rive se produiront à ces endroits donnant naissance à des moments fléchissants se propageant dans le sens parallèle aux génératrices du voile mais vu que l'allure de ces moments peut être comparée à celle d'une vibration s'amortissant rapidement à mesure qu'elle s'éloigne de sa source, il en résulte qu'à partir d'une section toute proche du raidisseur les efforts de coupure ne seront que légèrement affectés par ces moments.

Si par contre nous considérons une poutre tubulaire librement posée à ses extrémités n'étant sollicitée que par un moment fléchissant à une ou aux deux extrémités, g étant donc nul, nous pouvons conclure de (5b) que $C_4=0$ en vertu du fait que $v=0$ aux appuis. Par conséquent il résulte de (5c) que $w=0$ à cet endroit, une conclusion du reste que nous pouvons tirer directement de la relation (2c).

Il importe de souligner que les perturbations de rive que nous venons de signaler ne sont donc pas affectées par la continuité de la poutre tubulaire.

Procédons maintenant à l'établissement des formules auxquelles nous aurons recours pour le calcul des poutres tubulaires continues.

Dans ce but considérons tout d'abord une poutre tubulaire librement posée sur deux appuis extrêmes n'étant sollicitée que par une charge g par unité de surface de la paroi (figure 2).

Si nous n'observons que les déformations dues à la flexion seule, la relation permettant de calculer l'angle de rotation ψ des sections terminales est la même que pour les poutres à section pleine c'est-à-dire:

$$\psi = \frac{1}{24} \frac{q l^3}{E I} \quad (8)$$

l = désignant la portée.

E = le module d'élasticité.

$I = \pi a^3 \delta$ = le moment d'inertie de la section tubulaire de rayon „ a “ et d'épaisseur „ δ “.

$q = 2 \pi a g$ = la charge par unité de longueur de la portée.

Les sections restant planes après les déformations nous pouvons conclure que les déformations dues à l'effort tranchant seul n'entraîneront qu'un glissement des sections consécutives entre elles tout en conservant leur position parallèle. Par raison de symétrie, la charge étant symétrique, la conclusion s'en dégage que puisque la section au milieu de la portée restera verticale, ceci sera le cas pour toutes les sections et par conséquent également pour les sections terminales.

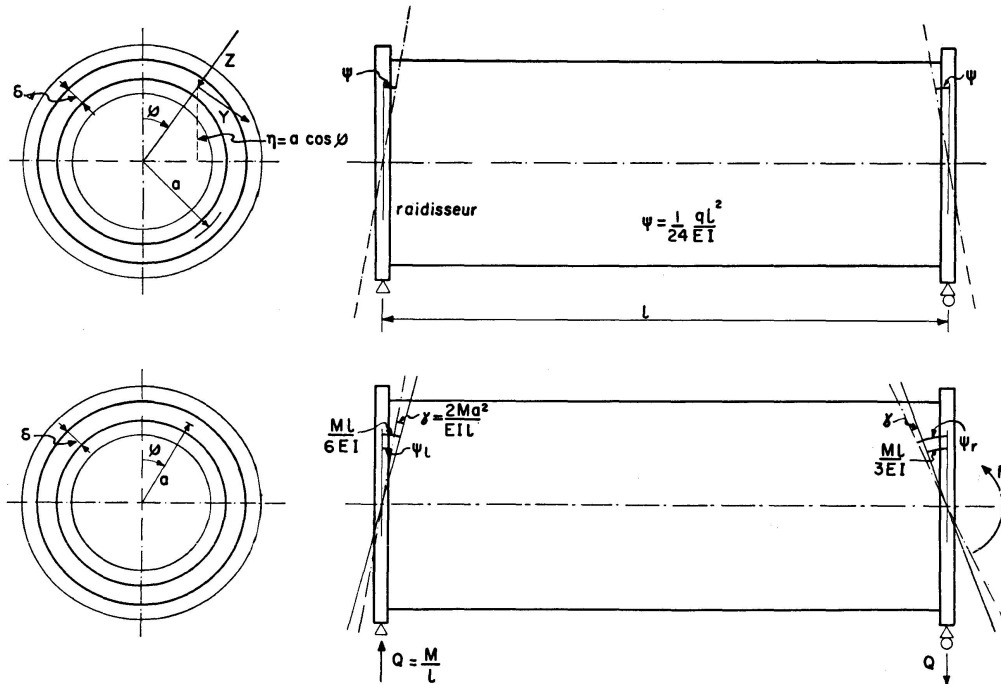


Fig. 2

Il s'ensuit que l'expression (8) est exacte pour le cas considéré ici.

Notons en passant que les glissements entraînent pourtant un accroissement des flèches de la ligne élastique, mais ce fait n'a pas d'importance pour la présente étude.

Le second cas que nous envisageons est d'une poutre tubulaire librement posée sur deux appuis extrêmes n'étant sollicitée que par un moment fléchissant „ M “ à sa section terminale de droite (figure 2).

Si nous n'observons que les déformations dues à la flexion seule, les relations qui nous permettent de calculer les angles de rotation ψ_l et ψ_r des sections terminales, respectivement de gauche et de droite, sont les mêmes que pour une poutre à section pleine, c'est-à-dire:

$$\psi_l = \frac{Ml}{6EI}, \quad \psi_r = \frac{Ml}{3EI}.$$

Quant à l'effort tranchant Q , celui-ci a une valeur constante sur toute la longueur de la portée. L'effort tranchant seul n'entraînera de même qu'un glissement des sections consécutives entre elles tout en conservant leur position parallèle. Toutefois ces glissements n'entraîneront pas un accroissement des flèches résultant des déformations dues à la flexion seule. Il est évident qu'en absence d'une charge symétrique toutes les sections subiront un même angle de rotation „ γ “ dans le sens inverse du mouvement des aiguilles d'une montre (figure 2).

Encore pouvons nous réaliser plus simplement cet angle de rotation en remarquant que puisque Q est constant l'angle de glissement „ γ “ sera le même pour tous les éléments consécutifs de la poutre de sorte que nous pouvons considérer la poutre entière comme un seul élément dont la longueur est égale à la portée.

L'expression pour l'angle de rotation „ γ “ en question peut être établie en appliquant la loi fondamentale classique par rapport à la déformation due au cisaillement „ τ “:

$$\gamma = \frac{\tau}{G}$$

dans laquelle G désigne le module de rigidité étant relié au module d'élasticité E et au coefficient de POISSON μ par:

$$G = \frac{E}{2(1+\mu)}$$

d'où pour: $\mu = 0$, comme nous l'avons supposé au début: $G = \frac{1}{2} E$.

La théorie de la flexion classique nous fournit en outre la relation:

$$\tau = \frac{QS}{bI} = \frac{MS}{bI\bar{l}}$$

à l'aide de laquelle nous pouvons évaluer la valeur du cisaillement dans la fibre neutre de la section, $S = 2 a^2 \delta$ désignant le moment statique par rapport

à la ligne neutre de la demi section tubulaire et $b = 2\delta$ la largeur totale de la section à l'intersection avec la ligne neutre.

Pour l'angle de glissement nous obtenons donc:

$$\gamma = \frac{2 M a^2}{E I l}.$$

Par superposition nous obtenons pour les angles de rotation des sections terminales respectivement de gauche et de droite les expressions:

$$\begin{aligned} \psi_l &= \frac{M l}{6 E I} - \frac{2 M a^2}{E I l} = \frac{M (l^2 - 12 a^2)}{6 E I l}, \\ \psi_r &= \frac{M l}{3 E I} + \frac{2 M a^2}{E I l} = \frac{M (l^2 + 6 a^2)}{3 E I l}. \end{aligned} \quad (9)$$

Il suffit de connaître les expressions (8) et (9) pour effectuer le calcul de n'importe quelle poutre tubulaire continue.

Ainsi que nous allons le voir la discussion qui précède nous servira de base pour l'établissement des formules à l'aide desquelles nous pourrons effectuer le calcul des voiles minces continus.

Considérons une poutre tubulaire soumise à une charge définie par:

$$X = 0 \quad Y = g \cdot \sin n \varphi \quad Z = g \cdot \cos n \varphi.$$

Notons qu'une charge pareille est irréelle puisque nous trouvons par intégration sur tout le pourtour d'une section que la charge totale est en effet nulle. En réalité la poutre tubulaire est divisée en un nombre „ n “ de segments cylindriques travaillant chacun pour soi comme une poutre sous une charge changeant alternativement de signe (voir les figures 3 et 4).

Considérons les relations générales (4b), (4c), (5a) et (5b) de plus près. Elles peuvent être transformées comme suit:

$$\begin{aligned} \bar{n}_{x\varphi} &= \{-2\bar{g}x + C_1\} \sin \bar{\varphi}, & (a) \\ \bar{n}_x &= \left\{ \frac{\bar{g}}{a} x^2 - \frac{x}{a} C_1 + C_2 \right\} \cos \bar{\varphi}, & (b) \\ \bar{u} &= \frac{1}{D} \left\{ \frac{\bar{g}}{3a} x^3 - \frac{x^2}{2a} C_1 + C_2 x + C_3 \right\} \cos \bar{\varphi}, & (c) \\ \bar{v} &= \frac{1}{D} \left\{ 2\bar{g}x^2 \left(\frac{x^2}{24\bar{a}^2} - 1 \right) - C_1 x \left(\frac{x^2}{6\bar{a}^2} - 2 \right) + \frac{x^2}{2\bar{a}} C_2 + \frac{x}{\bar{a}} C_3 + C_4 \right\} \sin \bar{\varphi}. & (d) \end{aligned} \quad (10)$$

Dans ces expressions les quantités: \bar{g} , \bar{a} et $\bar{\varphi}$ sont reliées à: g , a et φ par les relations:

$$\bar{g} = g \frac{1+n}{2}, \quad \bar{a} = \frac{a}{n}, \quad \text{et} \quad \bar{\varphi} = n \varphi.$$

Nous constatons que les relations (10) sont tout à fait analogues aux relations que nous obtenons en posant: $n=1$ et s'appliquant, comme nous l'avons vu, aux poutres tubulaires ordinaires.

Essentiellement la poutre tubulaire de rayon de courbure „ a “ se décom-

Si donc une poutre tubulaire du n^e ordre librement posée sur deux appuis extrêmes est soumise à l'action d'une charge \bar{q} par unité de longueur, les sections terminales subiront un angle de rotation:

$$\bar{\psi} = \frac{1}{24} \frac{\bar{q} l^3}{E \bar{I}}. \quad (11)$$

\bar{q} et \bar{I} étant reliées à: a , g et n par les relations:

$$\bar{q} = 2 \pi \bar{a} \bar{g} = 2 \pi \frac{a}{n} g \frac{1+n}{2} \quad \text{et} \quad \bar{I} = \pi \bar{a}^3 \delta = \pi \frac{a^3}{n^3} \delta.$$

Si par contre cette poutre tubulaire est soumise uniquement à l'action d'un moment fléchissant M travaillant à sa section terminale de droite, l'extrémité de gauche subira un angle de rotation:

$$\bar{\psi}_l = \frac{M (l^2 - 12 \bar{a}^2)}{6 E \bar{I} l} \quad (12a)$$

et l'extrémité de droite:

$$\bar{\psi}_r = \frac{M (l^2 + 6 \bar{a}^2)}{3 E \bar{I} l}. \quad (12b)$$

A l'aide des relations (11) et (12) nous pouvons enfin procéder au calcul de la seconde étape des voiles minces continus.

Pour terminer la présente étude nous allons envisager à titre d'exemple un voile mince continu à trois travées de portées inégales, désignées respectivement de gauche à droite par: l_1 , l_2 et l_3 . Supposons les épaisseurs des voiles successifs respectivement: δ_1 , δ_2 et δ_3 ; et les rayons de courbure: $a_1 = a_2 = a_3 = a$. Supposons en outre que du calcul de la première étape résulte que l'ordre de l'harmonique à introduire dans le calcul de la seconde étape est pour tous les voiles: „ n “.

Il s'ensuit pour toutes les travées: $\bar{a} = \frac{a}{n}$.

Les moments d'inertie sont donc respectivement:

$$\bar{I}_1 = \pi \bar{a}^3 \delta_1, \quad \bar{I}_2 = \pi \bar{a}^3 \delta_2, \quad \bar{I}_3 = \pi \bar{a}^3 \delta_3.$$

Les épaisseurs étant inégales il s'ensuit pour les charges par unité de surface: $\bar{g}_1 \neq \bar{g}_2 \neq \bar{g}_3$, et par conséquent pour les charges par unité de longueur des portées successives: $\bar{q}_1 = 2 \pi \bar{a} \bar{g}_1$; $\bar{q}_2 = 2 \pi \bar{a} \bar{g}_2$; $\bar{q}_3 = 2 \pi \bar{a} \bar{g}_3$.

Les moments fléchissants: M_1 et M_2 travaillant dans les sections au droit des appuis intermédiaires de gauche à droite peuvent être calculés des deux équations de continuité suivantes établies à l'aide des relations (11) et (12):

$$\frac{1}{24} \frac{\bar{q}_1 l_1^3}{E \bar{I}_1} + \frac{1}{24} \frac{\bar{q}_2 l_2^3}{E \bar{I}_2} = \frac{M_1 (l_1^2 + 6 \bar{a}^2)}{3 E \bar{I}_1 l_1} + \frac{M_1 (l_2^2 + 6 \bar{a}^2)}{3 E \bar{I}_2 l_2} + \frac{M_2 (l_2^2 - 12 \bar{a}^2)}{6 E \bar{I}_2 l_2},$$

$$\frac{1}{24} \frac{\bar{q}_2 l_2^3}{E \bar{I}_2} + \frac{1}{24} \frac{\bar{q}_3 l_3^3}{E \bar{I}_3} = \frac{M_1 (l_2^2 - 12 \bar{a}^2)}{6 E \bar{I}_2 l_2} + \frac{M_2 (l_2^2 + 6 \bar{a}^2)}{3 E \bar{I}_2 l_2} + \frac{M_2 (l_3^2 + 6 \bar{a}^2)}{3 E \bar{I}_3 l_3}.$$

Les valeurs de M_1 et M_2 ayant été calculées de ces deux équations nous pouvons maintenant procéder au calcul de la deuxième étape.

Bibliographie

- DISCHINGER F.: Das durchlaufende ausgesteifte zylindrische Rohr oder Zeiß-Dywidag-Dach.
- FLÜGGE W.: Statik und Dynamik der Schalen. (1934), page 76.
- GIRKMANN K.: Flächentragwerke. (1954), page 403.
- VREEDENBURGH C. G. J.: Over de berekening van de membraanspanningen in doorgaande verstijfde cylindrische cirkelschalen. De Ingenieur. (1950), No. 22.
- VREEDE F. A.: Berekening van de membraanspanningen in doorgaande cylindrische schalen van willekeurige vorm. De Ingenieur. (1951), No. 28.

Résumé

Un examen détaillé de la solution générale des équations différentielles de ce qu'il est convenu d'appeler „distribution des contraintes de membrane“ dans les voiles minces, nous amène à la conclusion que la théorie élémentaire de la flexion, fondée sur l'hypothèse de BERNOULLI, est exacte pour des poutres tubulaires, cylindriques et circulaires.

Une transformation simple de la solution générale des équations différentielles montre que l'hypothèse de DISCHINGER en ce qui concerne l'analyse des voiles minces continus nous mène à la notion de „poutres tubulaires d'ordre n “, ce qui nous permet d'établir rapidement des formules pour le calcul des moments de flexion dans le voile, aux supports intermédiaires.

Zusammenfassung

Eine kritische Betrachtung der allgemeinen Lösung der Differentialgleichungen für den Membranspannungszustand in dünnwandigen Schalen führt zu dem Schluß, daß die einfache Biegungstheorie, welche sich auf die BERNOULLISCHE Hypothese gründet, genau ist für kreisförmige zylindrische Rohrträger.

Eine einfache Umformung der allgemeinen Lösung der Differentialgleichungen zeigt, daß die DISCHINGERSCHE Hypothese in bezug auf die Berechnung durchlaufender Schalen zum Begriff: „Rohrträger n -ter Ordnung“ führt, welche es uns ermöglichen, sofort Formeln für die Bestimmung der Stützenmomente in der Schale aufzustellen.

Summary

A close consideration of the general solution of the differential equations for the so-called membrane stress distribution in thin walled shells leads to the conclusion that the elementary theory of bending, based on BERNOULLI'S hypothesis, is exact for circular cylindrical tubular beams.

A simple transformation of the general solution of the differential equations shows that DISCHINGER'S hypothesis, with regard to the analysis of continuous shells, leads to the notion of „tubular beams of the n th order“, which enable us to establish readily formulæ for the computation of the bending moments in the shell at the intermediate supports.