IABSE publications = Mémoires AIPC = IVBH Abhandlungen
21 (1961)
Tables for the analysis of cylindrical tanks or tubes with linearly variable thickness
Holand, Ivar
https://doi.org/10.5169/seals-18250

### Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. <u>Siehe Rechtliche Hinweise</u>.

## **Conditions d'utilisation**

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. <u>Voir Informations légales.</u>

#### Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. <u>See Legal notice.</u>

**Download PDF:** 17.05.2025

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, https://www.e-periodica.ch

# Tables for the Analysis of Cylindrical Tanks or Tubes with Linearly Variable Thickness

Tables pour le calcul de réservoirs ou de tubes cylindriques à épaisseur linéairement variable

Tabellen zur Berechnung von kreiszylindrischen Behältern oder Rohren mit linear veränderlicher Stärke

IVAR HOLAND

Dr. techn., Technical University of Norway, Trondheim

### **Basic Theory**

The theory of circular cylindrical shells with axial symmetrical load and constant or linearly variable thickness is given in the common textbooks, for instance [1] or [2]. The final expressions for forces and displacements are found by combining a particular integral (approximated by the membrane solution) and a solution of the homogeneous equation (edge disturbances).

Fig. 1 shows a cylindrical shell which is subjected to a moment  $M_0$  and a shear force  $Q_0$  evenly distributed along one edge. When influences from the opposite edge are left out, and the shell thickness h is constant, the expressions for forces and displacements may be written (compare for instance [1]):

$$\begin{split} M_x &= e^{-c x/r} \left[ M_0 \left( \cos \frac{c x}{r} + \sin \frac{c x}{r} \right) + \frac{r}{c} Q_0 \sin \frac{c x}{r} \right], \\ Q_x &= \frac{c}{r} e^{-c x/r} \left[ -2 M_0 \sin \frac{c x}{r} + \frac{r}{c} Q_0 \left( \cos \frac{c x}{r} - \sin \frac{c x}{r} \right) \right], \\ N_\varphi &= \frac{2 c^2}{r} e^{-c x/r} \left[ M_0 \left( \cos \frac{c x}{r} - \sin \frac{c x}{r} \right) + \frac{r}{c} Q_0 \cos \frac{c x}{r} \right], \end{split}$$
(1)  
$$w &= \frac{r^2}{2 c^2 D} e^{-c x/r} \left[ M_0 \left( \cos \frac{c x}{r} - \sin \frac{c x}{r} \right) + \frac{r}{c} Q_0 \cos \frac{c x}{r} \right], \\ \frac{d w}{d x} &= -\frac{r}{2 c D} e^{-c x/r} \left[ 2 M_0 \cos \frac{c x}{r} + \frac{r}{c} Q_0 \left( \cos \frac{c x}{r} + \sin \frac{c x}{r} \right) \right]. \end{split}$$

 $M_x$  and  $Q_x$  are the bending moment and the shear force at a distance x from the edge. Positive directions for  $M_x$  and  $Q_x$  are as shown for  $M_0$  and  $Q_0$  in Fig. 1.  $N_{\varphi}$  is the circumferential force, positive when tensile. w is the radial displacement, positive outwards. D is the flexural rigidity

$$D = \frac{E h^3}{12 (1 - \nu^2)} \tag{2}$$

and c is a shell parameter

$$c = \sqrt[4]{3(1-\nu^2)\frac{r^2}{h^2}},$$
(3)

where  $\nu$  is Poisson's ratio.





Fig. 2. Cylindrical Shell with Linearly Variable Thickness.



In the case of linearly variable thickness the solution of the homogeneous differential equation is obtained by use of Kelvin functions. When the coordinate system is chosen as shown in Fig. 2, the expressions for forces and displacements may be written (compare for instance [2])

$$\begin{split} M_{x} &= \frac{E \,\alpha^{3}}{48 \,(1-\nu^{2})} \sqrt[]{x_{0}+x} \{C_{1} \,(-\eta^{2} \,\mathrm{kei}' \,\eta + 4 \,\eta \,\mathrm{kei} \,\eta + 8 \,\mathrm{ker}' \,\eta) \\ &\quad + C_{2} \,(\eta^{2} \,\mathrm{ker}' \,\eta - 4 \,\eta \,\mathrm{ker} \,\eta + 8 \,\mathrm{kei}' \,\eta) + C_{3} \,(-\eta^{2} \,\mathrm{bei}' \,\eta + 4 \,\eta \,\mathrm{bei} \,\eta + 8 \,\mathrm{ber}' \,\eta) \\ &\quad + C_{4} \,(\eta^{2} \,\mathrm{ber}' \,\eta - 4 \,\eta \,\mathrm{ber} \,\eta + 8 \,\mathrm{bei}' \,\eta)\}, \end{split} \tag{4}$$

$$N_{\varphi} = \frac{E \alpha}{r} \sqrt{x_0 + x} \{ C_1 \ker' \eta + C_2 \ker' \eta + C_3 \ker' \eta + C_4 \operatorname{bei}' \eta \},$$

$$w = \frac{1}{\sqrt{x_0 + x}} \{ C_1 \ker' \eta + C_2 \ker' \eta + C_3 \operatorname{ber}' \eta + C_4 \operatorname{bei}' \eta \},$$

$$\frac{d w}{d x} = -\frac{1}{2 (x_0 + x) \sqrt{x_0 + x}} \{ C_1 (\eta \ker \eta + 2 \ker' \eta) + C_2 (-\eta \ker \eta + 2 \ker' \eta) \}$$
(4)

$$+ \, C_3 \, (\eta \operatorname{bei} \eta + 2 \operatorname{ber}' \eta) + C_4 \, (- \eta \operatorname{ber} \eta + 2 \operatorname{bei}' \eta) \big\} \, .$$

In these expressions  $\alpha$  is a constant expressing the rate of change of the shell thickness

$$h = h_0 + \alpha x \tag{5}$$

and  $\eta$  is a nondimensional coordinate

$$\eta = 2 \sqrt[4]{12(1-\nu^2)} \sqrt{\frac{x_0+x}{\alpha r}}.$$
 (6)

 $C_1 - C_4$  are constants of integration, which must be determined from the edge conditions at an upper and a lower edge.

The form of solution (4) requires much more laborious numerical work than does the simple solution (1) for constant thickness.

To avoid this, FAVRE [3] has proposed to use a series development where the first term in the series is the solution for a shell of constant thickness equal to the thickness  $h_0$  at the edge. The solution still leaves a considerable amount of numerical work, even when the variation of thickness is so small  $(\alpha \sqrt{r/h_0} < \sim 0.2)$  that only two terms in the series will suffice.

The present paper shows how a tabulation may be carried out, which gives the solution for variable thickness and constant thickness in the same form.

The solution (1) for constant thickness may be written

$$M_{x} = a_{11} M_{0} + a_{12} \sqrt{rh} Q_{0},$$

$$\sqrt{rh} Q_{x} = a_{21} M_{0} + a_{22} \sqrt{rh} Q_{0},$$

$$h N_{\varphi} = a_{31} M_{0} + a_{32} \sqrt{rh} Q_{0},$$

$$\frac{E h^{2}}{r} w = a_{41} M_{0} + a_{42} \sqrt{rh} Q_{0},$$

$$E h^{2} \sqrt{\frac{h}{r}} \frac{d w}{d x} = a_{51} M_{0} + a_{52} \sqrt{rh} Q_{0}.$$
(7)

The coefficients  $a_{ik}$  are functions of the one variable

$$\frac{cx}{r} = \sqrt[4]{3(1-\nu^2)} \frac{x}{\sqrt{rh}},\tag{8}$$

IVAR HOLAND

as follows

$$a_{11} = e^{-c x/r} \left( \cos \frac{c x}{r} + \sin \frac{c x}{r} \right),$$

$$a_{12} = [3 (1 - \nu^2)]^{-1/4} e^{-c x/r} \sin \frac{c x}{r},$$

$$a_{21} = -2 [3 (1 - \nu^2)]^{1/2} a_{12},$$

$$a_{22} = e^{-c x/r} \left( \cos \frac{c x}{r} - \sin \frac{c x}{r} \right),$$

$$a_{31} = a_{41} = 2 [3 (1 - \nu^2)]^{1/2} a_{22},$$

$$a_{32} = a_{42} = 2 [3 (1 - \nu^2)]^{1/4} e^{-c x/r} \cos \frac{c x}{r},$$

$$a_{51} = -2 [3 (1 - \nu^2)]^{1/2} a_{42},$$

$$a_{52} = -2 [3 (1 - \nu^2)]^{1/2} a_{11}.$$
(9)

The coefficients  $a_{ik}$  may be tabulated for different values of the nondimensional variable

$$\xi = \frac{x}{\sqrt{rh}}.$$
 (10)

The first step in order to bring the expressions (4) into a form similar to Eqs. (7), is to introduce similarly reduced quantities. First, all quantities are divided by the constant

$$\frac{E\,\alpha^3}{48\,(1-\nu^2)}\,\frac{\sqrt{\alpha\,r}}{2\sqrt[4]{12\,(1-\nu^2)}}.$$

This may be done because of the arbitrary constants occurring in the expressions.

With the new notation

$$\eta_0 = 2\sqrt[4]{12(1-\nu^2)} \sqrt{\frac{x_0}{\alpha r}} = \frac{2\sqrt[4]{12(1-\nu^2)}}{\alpha \sqrt{r/h_0}},$$
(11)

which is the value of  $\eta$  at the edge x=0, Eqs. (4) may be written

$$\begin{split} M_x &= \eta \left\{ C_1 \left( -\eta^2 \operatorname{kei}' \eta + 4 \eta \operatorname{kei} \eta + 8 \operatorname{ker}' \eta \right) \right. \\ &+ C_2 \left( \eta^2 \operatorname{ker}' \eta - 4 \eta \operatorname{ker} \eta + 8 \operatorname{kei}' \eta \right) + C_3 \left( -\eta^2 \operatorname{bei}' \eta + 4 \eta \operatorname{bei} \eta + 8 \operatorname{ber}' \eta \right) \\ &+ C_4 \left( \eta^2 \operatorname{ber}' \eta - 4 \eta \operatorname{ber} \eta + 8 \operatorname{bei}' \eta \right) \right\}, \\ \sqrt{r h_0} Q_x &= [12 \left( 1 - \nu^2 \right)]^{1/4} \eta_0 \eta \left\{ C_1 \left( -\eta \operatorname{ker} \eta + 2 \operatorname{kei}' \eta \right) \\ &- C_2 \left( \eta \operatorname{kei} \eta + 2 \operatorname{ker}' \eta \right) + C_3 \left( -\eta \operatorname{ber} \eta + 2 \operatorname{bei}' \eta \right) - C_4 \left( \eta \operatorname{bei} \eta + 2 \operatorname{ber}' \eta \right) \right\}, \\ h_0 N_\varphi &= [12 \left( 1 - \nu^2 \right)^{1/2} \eta_0^2 \eta \left\{ C_1 \operatorname{ker}' \eta + C_2 \operatorname{kei}' \eta + C_3 \operatorname{ber}' \eta + C_4 \operatorname{bei}' \eta \right\}, \\ \frac{E h_0^2}{r} w &= [12 \left( 1 - \nu^2 \right)]^{1/2} \eta_0^4 \eta^{-1} \left\{ C_1 \operatorname{ker}' \eta + C_2 \operatorname{kei}' \eta + C_3 \operatorname{ber}' \eta + C_4 \operatorname{bei}' \eta \right\}, \\ E h_0^2 \sqrt{\frac{h_0}{r}} \frac{d w}{d x} &= -[12 \left( 1 - \nu^2 \right)]^{3/4} \eta_0^5 \eta^{-3} \left\{ C_1 \left( \eta \operatorname{kei} \eta + 2 \operatorname{ker}' \eta \right) \right\} + C_2 \left( -\eta \operatorname{ker} \eta + 2 \operatorname{kei}' \eta \right) + C_3 \left( \eta \operatorname{bei} \eta + 2 \operatorname{ber}' \eta \right) + C_4 \left( -\eta \operatorname{ber} \eta + 2 \operatorname{bei}' \eta \right) \right\}. \end{split}$$

 $\mathbf{132}$ 

Hence, the reduced quantities depend on the value of  $\eta_0$  given by Eq. (11), that is on the quantity

$$\beta = \alpha \sqrt{\frac{r}{h_0}}.$$
 (13)

This parameter expresses the rate of thickness variation. Furthermore, the reduced quantities vary in the axial direction depending on the coordinate

$$\eta = 2\sqrt[4]{12(1-\nu^2)} \sqrt{\frac{x_0+x}{\alpha r}} = 2\sqrt[4]{12(1-\nu^2)} \frac{1}{\beta} \sqrt{1+\beta\xi}, \qquad (14)$$

where

$$\xi = \frac{x}{\sqrt{r h_0}}.$$
(15)

The coordinate  $\xi$  is the same as the coordinate for the shell of constant thickness, if only the constant shell thickness h in Eq. (10) is replaced by the edge thickness  $h_0$ .

In Eqs. (4) and (12) the functions ker and kei and their derivatives give edge disturbances originating from the upper edge, whereas the functions ber and bei and their derivatives give edge disturbances originating from the lower edge. These two groups of edge disturbances may be treated separately. If they interfere, the final result is obtained by superposition.

To treat the edge disturbances from the upper edge only, one must put  $C_3 = C_4 = 0$ . When the edge is subjected to a moment  $M_0$  and a radial force  $Q_0$  evenly distributed along the edge (Fig. 3), Eqs. (12) give

$$M_{0} = C_{1} m_{1}(\eta_{0}) + C_{2} m_{2}'(\eta_{0}),$$

$$\sqrt{r h_{0}} Q_{0} = C_{1} q_{1}(\eta_{0}) + C_{2} q_{2}(\eta_{0}),$$
(16)



Fig. 3. Cylindrical Shell with Linearly Variable Thickness Subjected to Edge Forces  $M_0$  and  $Q_0$  at the Upper Edge.

IVAR HOLAND

where

$$m_{1}(\eta_{0}) = -\eta_{0}^{3} \ker' \eta_{0} + 4 \eta_{0}^{2} \ker \eta_{0} + 8 \eta_{0} \ker' \eta_{0},$$
  

$$m_{2}(\eta_{0}) = -\eta_{0}^{3} \ker' \eta_{0} - 4 \eta_{0}^{2} \ker \eta_{0} + 8 \eta_{0} \ker' \eta_{0},$$
  

$$q_{1}(\eta_{0}) = [12 (1 - \nu^{2})]^{1/4} (-\eta_{0}^{3} \ker \eta_{0} + 2 \eta_{0}^{2} \ker' \eta_{0}),$$
  

$$q_{2}(\eta_{0}) = [12 (1 - \nu^{2})]^{1/4} (-\eta_{0}^{3} \ker \eta_{0} - 2 \eta_{0}^{2} \ker' \eta).$$
(17)

0 1

From Eq. (16) the constants  $C_{\mathbf{1}}$  and  $C_{\mathbf{2}}$  may be expressed by  $M_{\mathbf{0}}$  and  $Q_{\mathbf{0}}$  as follows

$$C_{1} = \frac{q_{2}(\eta_{0}) M_{0} - m_{2}(\eta_{0}) \sqrt{r h_{0} Q_{0}}}{m_{1}(\eta_{0}) q_{2}(\eta_{0}) - m_{2}(\eta_{0}) q_{1}(\eta_{0})},$$

$$C_{2} = \frac{-q_{1}(\eta_{0}) M_{0} + m_{1}(\eta_{0}) \sqrt{r h_{0}} Q_{0}}{m_{1}(\eta_{0}) q_{2}(\eta_{0}) - m_{2}(\eta_{0}) q_{1}(\eta_{0})}.$$
(18)

Substituting these values for the constants in Eqs. (12) the quantities are obtained in the form

$$M_{x} = a_{11} M_{0} + a_{12} \sqrt{r h_{0}} Q_{0},$$
  

$$\sqrt{r h_{0}} Q_{x} = a_{21} M_{0} + a_{22} \sqrt{r h_{0}} Q_{0},$$
  

$$h_{0} N_{\varphi} = a_{31} M_{0} + a_{32} \sqrt{r h_{0}} Q_{0},$$
  

$$\frac{E h_{0}^{2}}{r} w = a_{41} M_{0} + a_{42} \sqrt{r h_{0}} Q_{0},$$
  

$$E h_{0}^{2} \sqrt{\frac{h_{0}}{r}} \frac{d w}{d x} = a_{51} M_{0} + a_{52} \sqrt{r h_{0}} Q_{0}.$$
(19)

The coefficients  $a_{ik}$  are functions of the variable  $\xi$  and the parameter of thickness variation  $\beta$ . For  $\beta = 0$  they are replaced by corresponding coefficients in Eqs. (7).



Fig. 4. Cylindrical Shell with Linearly Variable Thickness Subjected to Edge Forces  $M_0$  and  $Q_0$  at the Lower Edge.

To treat the edge disturbances from the lower edge one must put  $C_1 = C_2 = 0$ in Eqs. (12). Again, it is convenient to measure the coordinates x and  $\xi$  positive from the edge (Fig. 4). Hence,  $\alpha$  in Eq. (5) is negative. The change of the sign of x makes it necessary to change the signs of  $Q_x$  and  $\frac{dw}{dx}$  in Eqs. (12). A procedure which otherwise is the same as the one shown above, again leads to expressions in the form (19).

In the expressions above Poisson's ratio  $\nu$  only occurs in  $1-\nu^2$ . Hence, the real value of  $\nu$  is of minor importance. In the tables it has been put equal to 0.2.

The calculations outlined were programmed by the Mathematics Group at the Norwegian Defence Research Establishment and carried out on their Ferranti Mercury computer.

The resulting values of  $a_{ik}$  are given in Tables 1—10 for disturbances from the upper edge ( $\beta = 0, 0.1, 0.2 \dots 1.0$ ), and in Tables 11—20 for disturbances from the lower edge ( $\beta = 0, -0.1, -0.2 \dots -1.0$ ). In both cases the values of the variable are  $\xi = 0, 0.2, 0.4 \dots 4.0$ . When edge disturbances from the lower edge are considered, one must have

$$x \leq x_0$$

hence, in Tables 11-20

$$\xi \leq \frac{x_0}{\sqrt{r\,h_0}} = -\frac{1}{\beta}.$$

The computations were carried through with a maximal error of the order of magnitude  $10^{-6}$ . The tables, however, give only 3 digits (4 when the first digit is 1) in the maximum values of each column. More digits than those given were found to be of no interest in actual design.

## A Comparison with Favre's Approximation

As mentioned previously, FAVRE [3] has proposed to solve the differential equation for the cylindrical shell with variable thickness by a series development. This solution gives an arbitrary quantity in the form

$$f(\xi) = f_0(\xi) + \epsilon f_1(\xi) + \epsilon^2 f_2(\xi) + \cdots$$
(20)

where  $f_0(\xi)$  is the solution found for a shell of constant thickness equal to the edge thickness  $h_0$ , and

$$\epsilon = \frac{\beta}{\sqrt[4]{3(1-\nu^2)}}.$$
(21)

			Tables for	r Edge Dist	urbances fi	rom an Up	per Edge (	Table 1—1	(0)		» ( ) ×
				Table	$I, a_{11}, M_a$	$a = a_{11} M_0 + \dots$	$a_{12}\sqrt{rh_0}Q_0$			××***	
8						$\alpha \sqrt{r/h_0}$					
$\sqrt{rh_0}$	0	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	1,0
0,0	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000
0,2	0,943	0,948	0,952	0,956	0,959	0,962	0,965	0,968	0,970	0,972	0,974
0,4	0,811	0,825	0,838	0,850	0,861	0,871	0,879	0,888	0,895	0,902	0,908
0,6	0,647	0,671	0,693	0,714	0,732	0,749	0,765	0,780	0,794	0,806	0,818
0,8	0,482	0,513	0,542	0,569	0,594	0,617	0,639	0,660	0,680	0,698	0,715
1,0	0,334	0,367	0,399	0,429	0,459	0,486	0,513	0,538	0,562	0,585	0,606
1,2	0,211	0,242	0,274	0,304	0,335	0,365	0,393	0,421	0,448	0,474	0,499
1,4	0,116	0,142	0,169	0,198	0,227	0,256	0,285	0,314	0,342	0,370	0,397
1,6	0,047	0,066	0,087	0,111	0,136	0,163	0,191	0,219	0,247	0,275	0,302
1,8	0,002	0,012	0,026	0,043	0,064	0,086	0,110	0,136	0,162	0,189	0,216
2,0	-0.026	-0.024	-0,018	-0.007	0,007	0,025	0,044	0,067	0,090	0,115	0, 141
2,2	-0,039	-0.045	-0.046	-0.042	-0,035	-0.023	-0,008	0,010	0,030	0,051	0,075
2,4	-0,043	-0.054	-0,062	-0.065	-0,064	-0.058	-0,049	-0,036	-0,020	-0,002	0,018
2,6	-0,041	-0.056	-0.069	-0.078	-0,082	-0,083	-0,079	-0,071	-0,060	-0,045	-0,029
2,8	-0,035	-0.053	-0,070	-0,083	-0,093	-0,098	-0,099	-0,097	-0,090	-0,080	-0,067
3,0	-0,028	-0.047	-0,066	-0,083	-0,096	-0,107	-0,113	-0,115	-0,113	-0,107	-0,098
3,2	-0,021	-0,039	-0,059	-0,078	-0,095	-0,109	-0,119	-0,126	-0,128	-0,127	-0,122
3,4	-0,015	-0,031	-0,051	-0.071	-0,090	-0,107	-0,121	-0,131	-0,138	-0,140	-0,139
3,6	-0,009	-0,023	-0,042	-0.062	-0,083	-0,102	-0,119	-0,133	-0,143	-0,149	-0,152
3,8	-0.005	-0,017	-0,033	-0,053	-0,075	-0.095	-0,114	-0,130	-0,144	-0,153	-0,159
4,0	-0,002	-0,011	-0,025	-0,044	-0,065	-0,087	-0,107	-0,126	-0,141	-0,154	-0,163

IVAR HOLAND

, ·

136



Table 2,  $a_{12}$ .  $M_x = a_{11} M_0 + a_{12} \sqrt{rh_0} Q_0$ 

	1,0	0,000	0,176	0,306	0,396	0,453	0,482	0,489	0,480	0,459	0,429	0,394	0,354	0,314	0,273	0,233	0,195	0,159	0,126	0,096	0,069	0,045
	0,9	0,000	0, 174	0,300	0,384	0,435	0,457	0,459	0,445	0,419	0,386	0,348	0,308	0,267	0,227	0,188	0,153	0,119	0,090	0,063	0,039	0,019
	0,8	0,000	0, 172	0,294	0,372	0,416	0,432	0,428	0,408	0,379	0,343	0,303	0,262	0,222	0,183	0,147	0,114	0,084	0,058	0,035	0,015	-0,002
	0,7	0,000	0,170	0,287	0,359	0,396	0,406	0,395	0,371	0,338	0,300	0,259	0,218	0, 179	0, 143	0,109	0,079	0,053	0,031	0,012	-0,004	-0,017
	0,6	0,000	0,168	0,280	0,346	0,375	0,378	0,362	0,334	0,297	0,257	0,217	0,177	0,140	0,106	0,076	0,050	0,028	0,009	-0,006	-0,017	-0,026
$\alpha \sqrt{r/h_0}$	0,5	0,000	0,166	0,272	0,331	0,354	0,350	0,328	0,296	0,257	0,217	0,176	0,138	0,104	0,074	0,048	0,026	0,008	-0,006	-0,017	-0,025	-0,030
	0,4	0,000	0,164	0,264	0,316	0,331	0,321	0,294	0,258	0,218	0,178	0, 139	0,103	0,073	0,046	0,025	0,007	-0,006	-0,016	-0,022	-0,027	-0,029
	0,3	0,000	0,161	0,256	0,300	0,308	0,291	0,260	0,222	0,181	0,141	0,105	0,073	0,046	0,024	0,008	-0,005	-0,014	-0,020	-0,023	-0,024	-0,024
	0,2	0,000	0,159	0,247	0,283	0,284	0,261	0,226	0,186	0,145	0,108	0,074	0,047	0,025	0,008	-0,004	-0,012	-0,017	-0,019	-0,020	-0,019	-0,017
	0,1	0,000	0,156	0,237	0,266	0,259	0,231	0,193	0,152	0,113	0,078	0,049	0,027	0,010	-0,002	-0,009	-0,013	-0,015	-0,015	-0.014	-0,012	-0,010
	0	0,000	0,152	0,227	0,248	0,234	0,201	0,161	0,120	0,083	0,053	0,029	0,012	0,001	-0,006	-0,010	-0,011	-0,010	-0,009	-0,007	-0,005	-0,004
8	$\sqrt{rh_0}$	0,0	0,2	0,4	0,6	0,8	1,0	1,2	1,4	1,6	1,8	2,0	2,2	2,4	2,6	2,8	3,0	3,2	3,4	3,6	3,8	4,0

× ( )		1,0	0.000	-0.244	-0,401	-0,492	-0.535	-0.543	-0.527	-0,494	-0.452	-0,404	-0,355	-0,305	-0.258	-0,213	-0.173	-0,136	-0,103	-0,074	-0,049	-0,028	-0,010
		0,9	0.000	-0,261	-0,426	-0.520	-0.560	-0.563	-0.540	-0.501	-0,453	-0,399	-0,345	-0,292	-0,241	-0,195	-0,153	-0,116	-0,083	-0,055	-0,031	-0,011	0,005
		0,8	0.000	-0,280	-0,454	-0.548	-0.585	-0.582	-0.552	-0.506	-0.451	-0,391	-0,332	-0,275	-0,222	-0,174	-0,131	-0,094	-0,063	-0,036	-0,014	0,004	0,019
		0,7	0,000	-0,301	-0,484	-0.579	-0,612	-0,601	-0,563	-0.509	-0,446	-0,380	-0,316	-0,255	-0,200	-0,151	-0,108	-0,072	-0,042	-0,017	0,003	0,019	0,031
$dash a_{22} \sqrt{rh_0}  Q_0$		0,6	0,000	-0,323	-0.516	-0,611	-0,639	-0,620	-0.572	-0.508	-0,437	-0,365	-0,296	-0,232	-0,175	-0,126	-0,084	-0,049	-0,021	0,002	0,019	0,031	0,040
$\partial x = a_{21} M_0 + b_0$	$\alpha \sqrt{r/h_0}$	0,5	0,000	-0,348	-0.550	-0.645	-0,666	-0,637	-0.579	-0.505	-0.425	-0,346	-0,272	-0,205	-0,147	-0,099	-0.058	-0,026	-0,001	0,018	0,031	0,040	0,046
$x_{21}.  \sqrt{rh_0}$ (		0,4	0,000	-0,376	-0.588	-0,681	-0,693	-0,653	-0.582	-0,497	-0.408	-0,322	-0,244	-0,176	-0,118	-0,071	-0,033	-0,005	0,016	0,031	0,040	0,046	0,048
Table 3, c		0,3	0,000	-0,406	-0,628	-0,718	-0,720	-0,666	-0.581	-0,484	-0,385	-0,293	-0,212	-0,143	-0,087	-0,043	-0,010	0,014	0,030	0,040	0,045	0,046	0,045
		0,2	0,000	-0,439	-0,672	-0,757	-0,746	-0,676	-0.575	-0,465	-0,357	-0,260	-0,176	-0,109	-0.056	-0,017	0,010	0,028	0,038	0,043	0,044	0,041	0,037
		0,1	0,000	-0.476	-0,719	-0,798	-0,771	-0,682	-0.564	-0,440	-0,323	-0,221	-0,138	-0.074	-0,027	0,005	0,025	0,036	0,040	0,040	0,036	0,031	0,026
		0	0,000	-0.517	-0,770	-0.840	-0.794	-0,683	-0.546	-0.407	-0,282	-0.179	-0,098	-0,040	-0,002	0,021	0,033	0,036	0,035	0,030	0,024	0,018	0,013
	$\left\  s \right\ $	$Vrh_0$	0,0	0,2	0,4	0,6	0,8	1,0	1,2	1,4	1,6	1,8	2,0	2,2	2,4	2,6 0,7	× ×	3,0	3,2	3,4	3,6 0	 x,	4,0

138



Table 4,  $a_{22}$ .  $\sqrt{rh_0} Q_x = a_{21} M_0 + a_{22} \sqrt{rh_0} Q_0$ 

	1,0	1,000	0,760	0,545	0,362	0,210	0,088	-0,007	-0,079	-0,131	-0,167	-0,189	-0,201	-0,205	-0,202	-0,195	-0.185	-0,172	-0.158	-0,143	-0,128	-0,113
	0,9	1,000	0,745	0,520	0,331	0,177	0,056	-0,036	-0,103	-0,150	-0,180	-0,197	-0,204	-0,203	-0,197	-0,186	-0,173	-0,158	-0,142	-0,126	-0,110	-0,095
	0,8	1,000	0,728	0,493	0,298	0,143	0,024	-0,064	-0,126	-0,167	-0,191	-0,203	-0,204	-0,199	-0,188	-0.174	-0,158	-0,141	-0,124	-0,107	-0,091	-0,076
	0,7	1,000	0,711	0,464	0,265	0,109	-0,007	-0,091	-0,147	-0,181	-0,199	-0,205	-0,201	-0,190	-0,176	-0.159	-0,140	-0,122	-0,104	-0,087	-0,071	-0.056
	0,6	1,000	0,691	0,434	0,230	0,074	-0,039	-0,116	-0,166	-0,193	-0,204	-0,203	-0,193	-0,178	-0,160	-0,140	-0,120	-0,101	-0,083	-0,066	-0,051	-0,038
$\propto \sqrt{r/h_0}$	0,5	1,000	0,671	0,402	0, 194	0,039	-0,069	-0,140	-0,182	-0,201	-0,204	-0,197	-0,182	-0,162	-0,141	-0,120	-0,099	-0,079	-0,061	-0,046	-0,033	-0,021
	0,4	1,000	0,649	0,369	0,157	0,004	-0,098	-0,161	-0,194	-0,205	-0,201	-0,186	-0,166	-0,143	-0,120	-0,097	-0,076	-0,057	-0,041	-0,027	-0,016	-0,007
	0,3	1,000	0,626	0,334	0,119	-0,030	-0,126	-0,179	-0,202	-0,204	-0,192	-0,171	-0,147	-0,121	-0,096	-0,073	-0,053	-0,036	-0,022	-0,011	-0,003	0,003
	0,2	1,000	0,601	0,297	0,080	-0.064	-0,151	-0.194	-0,206	-0.198	-0,178	-0,152	-0,123	-0,096	-0,071	-0,050	-0,032	-0,018	-0,007	0,001	0,006	0,009
	0,1	1,000	0,574	0,259	0,041	-0,096	-0,172	-0,203	-0,204	-0,187	-0,159	-0,128	-0,098	-0.070	-0,047	-0,028	-0,014	-0,003	0,004	0,008	0,010	0,010
	0	1,000	0,546	0,219	0,002	-0,127	-0.190	-0,208	-0,197	-0.170	-0.136	-0,101	-0.070	-0,045	-0,025	-0,010	-0,001	0,005	0,008	0,009	0,009	0,007
x	$\sqrt{rh_0}$	0,0	0,2	0,4	0,6	0,8	1,0	1,2	1,4	1,6	1,8	2,0	2,2	2,4	2,6	2,8	3,0	3,2	3,4	3,6	3,8	4,0

Table 5, $a_{31}$ . $h_0 N_{\varphi} = a_{31} M_0 + a_{32} \sqrt{rh_0} Q_0$ $\propto \sqrt{r/h_0}$	$0,2 \qquad 0,3 \qquad 0,4 \qquad 0,5 \qquad 0,6 \qquad 0,7 \qquad 0,8 \qquad 0,9 \qquad \mathbf{I},0$	$\begin{array}{c ccccccccccccccccccccccccccccccccccc$	$1,63 \qquad 1,52 \qquad 1,43 \qquad 1,34 \qquad 1,26 \qquad 1,182 \qquad 1,111 \qquad 1,045 \qquad 0.983$	0.75 $0.74$ $0.73$ $0.71$ $0.69$ $0.673$ $0.651$ $0.628$ $0.605$	0,15  0,20  0,24  0,26  0,29  0,302  0,312  0,319  0,322   0,312  0,319  0,322   0,322   0,319  0,322   0,322   0,312   0,322   0,312   0,322   0,312   0,312   0,322   0,312   0,322   0,312  0,312  0,312  0,312  0,312   0,312   0,312  0,312  0,312  0,312  0,	0,23 $-0,16$ $-0,09$ $-0,04$ $0,01$ $0,042$ $0,072$ $0,097$ $0,117$	0.45 $-0.36$ $-0.29$ $-0.23$ $-0.18$ $-0.132$ $-0.092$ $-0.058$ $-0.029$	0.54 -0.47 -0.40 -0.34 -0.29 -0.240 -0.198 -0.161 -0.128	0,55 $-0,50$ $-0,44$ $-0,39$ $-0,34$ $-0,300$ $-0,260$ $-0,224$ $-0,191$	0,52 $-0,48$ $-0,44$ $-0,40$ $-0,36$ $-0,326$ $-0,291$ $-0,258$ $-0,228$	0,45 $-0,44$ $-0,41$ $-0,39$ $-0,36$ $-0,328$ $-0,299$ $-0,272$ $-0,246$	$\begin{array}{c ccccccccccccccccccccccccccccccccccc$	0,30 -0,31 -0,31 -0,31 -0,31 -0,30 -0,290 -0,276 -0,260 -0,243	0,23 $-0,25$ $-0,26$ $-0,27$ $-0,21$ $-0,261$ $-0,253$ $-0,242$ $-0,231$	0,16 $-0,19$ $-0,21$ $-0,22$ $-0,23$ $-0,229$ $-0,221$ $-0,214$ $-0,214$	0,11 -0,14 -0,16 -0,18 -0,19 -0,197 -0,199 -0,198 -0,195	0,07 $-0,10$ $-0,12$ $-0,14$ $-0,16$ $-0,166$ $-0,172$ $-0,175$ $-0,174$	0,04 $-0,06$ $-0,09$ $-0,11$ $-0,13$ $-0,138$ $-0,146$ $-0,151$ $-0,154$	0,01 $-0,04$ $-0,06$ $-0,08$ $-0,10$ $-0,111$ $-0,122$ $-0,129$ $-0,134$	0,01 $-0,01$ $-0,04$ $-0,06$ $-0,07$ $-0,088$ $-0,100$ $-0,109$ $-0,116$	0.02 $0.00$ $-0.02$ $-0.04$ $-0.05$ $-0.068$ $-0.080$ $-0.090$ $-0.098$	0.02 $0.01$ $0.00$ $-0.02$ $-0.04$ $-0.050$ $-0.063$ $-0.073$ $-0.082$	
Table 5, $a_{31}$ . $h_0 N_{\varphi} = a_{31} M$ $\alpha \sqrt{r/h_0}$	$0,3 \qquad 0,4 \qquad 0,5$	2,58 2,37 2,18	1,52 $1,43$ $1,34$	0,74 0,73 0,71	0,20 $0,24$ $0,26$	-0.16 $-0.09$ $-0.04$	-0,36 $-0,29$ $-0,23$	-0.47 $-0.40$ $-0.34$	-0.50 $-0.44$ $-0.39$	-0,48 $-0,44$ $-0,40$	-0.44 $-0.41$ $-0.39$	-0.38 $-0.37$ $-0.35$	-0.31 $-0.31$ $-0.31$ $-0.31$	-0.25 $-0.26$ $-0.27$	-0.19 $-0.21$ $-0.22$	-0,14 $-0,16$ $-0,18$	-0.10 $-0.12$ $-0.14$	-0.06 $-0.09$ $-0.11$	-0.04 $-0.06$ $-0.08$	-0.01 $-0.04$ $-0.06$	0,00 $-0,02$ $-0,04$	0,01 0,00 -0,02	
Table 5, a <sub>31</sub> . h <sub>0</sub> .	2 0,3 0,4	32 2,58 2,37	33 1,52 1,43	75 0,74 0,73	15 0,20 0,24	-0.16 -0.09	15 -0.36 -0.29	54 -0.47 -0.40	55 -0.50 -0.44	0.2 -0.48 -0.44	15 -0,44 -0,41	38 -0,38 -0,37	0.0 -0.31 -0.31	-0,25 $-0,26$	(6 -0,19 -0,21	1 - 0, 14 - 0, 16	07 -0,10 -0,12	-0.06 -0.09	01 -0,04 -0,06	-0.01 $-0.04$	0,00 -0,02	0,01 0,00	
	0,1 0,5	3,09 2,8	1,74 1,(	0,75 0,7	0,09 0,1	-0,32 -0,2	-0,54 -0,4	-0.62 -0.5		-0.55 $-0.5$	-0.46 $-0.4$					-0,07 -0,1	-0,04 -0,0	-0,01 -0,0	0,01 -0,0	0,02 0,0	0,03 0,0	0,03 0,0	
8	$\left  \begin{array}{c} rh_{0} \\ 0 \end{array} \right  = 0$	0,0 3,39	0,2 1,85	0.4 0.74	0,6 0,01	0,8 -0,43	1,0 - 0,65	1,2 $-0,71$	1,4 - 0,67	1,0 - 0,58	1,8 $-0,46$	2,0 -0,34		2,4 -0,15	2,0 - 0,08	2,3 $-0,03$	3,0 0,00	3,2 0,02	3,4 0,03	3,6 0,03	3,8 0,03	4,0 0,03	

140

×



	1,0	1,238	1,145	1,000	0,839	0,682	0,539	0,413	0,306	0,217	0,143	0,084	0,038	0,002	-0,025	-0,045	-0,059	-0,068	-0,073	-0,075	-0,075	-0,074
	0,9	1,330	1,208	1,038	0,856	0,683	0,528	0,394	0,282	0,190	0,116	0,058	0,013	-0,020	-0,044	-0,061	-0,072	-0,078	-0,080	-0,080	-0,078	-0,074
	0,8	1,430	1,275	1,076	0,871	0,681	0,513	0,371	0,254	0,160	0,086	0,030	-0,012	-0,042	-0,063	-0,076	-0,083	-0,086	-0,086	-0,083	-0,078	-0,072
	0,7	1,539	1,345	1,114	0,885	0,675	0,494	0,344	0,223	0,127	0,055	0,001	-0,038	-0,064	-0,080	-0,089	-0,093	-0,092	-0,088	-0,083	-0.076	-0,068
	0,6	1,657	1,419	1,153	0,895	0,665	0,470	0,312	0,187	0,091	0,021	-0,030	-0,063	-0,084	-0,096	-0,100	-0,099	-0,094	-0,088	-0,079	-0,070	-0,061
$\alpha \sqrt{r/h_0}$	0,5	1,785	1,497	1,190	0,902	0,650	0,441	0,275	0,147	0,053	-0,015	-0,060	-0,088	-0,103	-0,108	-0,107	-0,102	-0,093	-0,083	-0,072	-0,062	-0,052
	0,4	1,923	1,579	1,226	0,904	0,628	0,405	0,232	0,103	0,011	-0,051	-0,089	-0,110	-0,118	-0,117	-0,110	-0,100	-0,087	-0,075	-0,062	-0,050	-0,040
	0,3	2,07	1,66	1,26	0,90	0,60	0,36	0,18	0,06	-0,03	-0,09	-0,12	-0,13	-0,13	-0,12	-0,11	-0,09	-0,08	-0,06	-0,05	-0,04	-0,03
	0,2	2,24	1,75	1,29	0,89	0,56	0,31	0,13	0,00	-0,08	-0,12	-0,14	-0,14	-0,13	-0,12	-0,10	-0,08	-0,06	-0,05	-0,03	-0,02	-0,01
	0,1	2,41	1,85	1,32	0,87	0,52	0,25	0,07	-0,05	-0,12	-0,15	-0,16	-0,15	-0,13	-0,11	-0,08	-0,06	-0,04	-0,03	-0,02	-0,01	-0,00
	0	2,61	1,94	1,34	0,85	0,46	0,19	0,00	-0,11	-0,16	-0,17	-0,17	-0,14	-0,11	-0,09	-0,06	-0,04	-0,02	-0,01	-0,00	0,00	0,01
8	$\sqrt{rh_0}$	0,0	0,2	0,4	0,6	0,8	1,0	1,2	1,4	1,6	1,8	2,0	2,2	2,4	2,6	2,8	3,0	3,2	3,4	3,6	3,8	4,0

 $M_{2} = \alpha_{22} M_{2}$ 

Table 6,  $a_{32}$ .  $h_0 N_{\phi} = a_{31} M_0 + a_{32} \sqrt{rh_0} Q_0$ 

		1,0	1,474	0,820	0,432	0,202	0,065	-0,014	-0,058	-0,080	-0,088	-0,088	-0,083	-0.076	-0,068	-0,059	-0,051	-0,044	-0,037	-0,031	-0,025	-0,020	-0,016
10. rdx		0,9	1,588	0,886	0,462	0,207	0,056	-0,031	-0,077	-0,099	-0,106	-0,104	-0,097	-0,087	-0,077	-0,066	-0,056	-0,047	-0,039	-0,032	-0,026	-0,020	-0,016
		0,8	1,714	0,958	0,493	0,211	0,044	-0,051	-0,101	-0,123	-0,128	-0,123	-0,113	-0,100	-0,087	-0,074	-0,062	-0,051	-0,041	-0,033	-0,026	-0,020	-0,015
		0,7	1,854	1,037	0,526	0,212	0,027	-0,078	-0,130	-0,152	-0,154	-0,145	-0,131	-0,114	-0,097	-0,081	-0,067	-0,054	-0,042	-0,033	-0,025	-0,019	-0,013
$a_{42}\sqrt{rh_0}Q_0$		0,6	2,01	1,12	0,56	0,21	0,00	-0,11	-0.17	-0,19	-0,19	-0,17	-0,15	-0,13	-0,11	-0,09	-0,07	-0,06	-0,04	-0,03	-0,02	-0,02	-0,01
$w = a_{11} M_0 +$	$\alpha \sqrt{r/h_0}$	0,5	2,18	1,22	0,59	0,20	-0,03	-0,15	-0,21	-0,23	-0,22	-0,20	-0,18	-0,15	-0,12	-0.10	-0,08	-0,06	-0.04	-0,03	-0,02	-0,01	-0,01
$a_{41}, \ \frac{Eh_0^2}{r}$		0,4	2,37	1,32	0,63	0, 19	-0,07	-0,21	-0,27	-0,28	-0,27	-0,24	-0,20	-0,17	-0,13	-0,10	-0,08	-0,06	-0.04	-0,03	-0,01	-0,01	0,00
Table 7,		0,3	2,58	1,44	0,66	0,17	-0,13	-0.28	-0,34	-0,35	-0,32	-0.28	-0.24	-0,19	-0,14	-0.11	-0,08	-0,05	-0.03	-0.02	-0,01	0,00	0,01
·		0,2	2,82	1,56	0,69	0,13	-0,20	-0.37	-0,44	-0,43	-0,39	-0,33	-0.27	-0,21	-0,15	-0,11	-0,07	-0.04	-0.02	-0,01	0,00	0,01	0,01
		0,1	3,09	1,70	0,72	0,08	-0,30	-0.49	-0.55	-0.54	-0,47	-0,39	-0,31	-0.23	-0,16	-0.10	-0.06	-0.03	-0.01	0,01	0,02	0,02	0,02
1		0	3,39	1,85	0,74	0,01	-0,43	-0.65	-0,71	-0,67	-0.58	-0.46	-0.34	-0.24	-0.15	-0,08	-0,03	0,00	0,02	0,03	0,03	0,03	0,03
	8	$\sqrt{rh_0}$	0,0	0,2	0,4	0,6	0,8	1,0	1,2	1,4	1,6	1,8	2,0	2,2	2,4	2,6	2,8	3,0	3,2	3,4	3,6	3,8	4,0

142

# Cylindrical tanks or tubes with linearly variable thickness 143



Table 8,  $a_{42}$ .  $\frac{Eh_0^2}{r}w = a_{41}M_0 + a_{42}\sqrt{rh_0}Q_0$ 

	1,0	1,238	0,954	0,714	0,524	0,379	0,270	0,188	0, 128	0,083	0,051	0,028	0,012	0,001	-0,007	-0,012	-0,015	-0,016	-0,017	-0,016	-0,016	-0,015
	0,9	1,330	1,024	0,763	0,556	0,397	0,278	0,190	0,125	0,078	0,044	0,021	0,004	-0,006	-0,013	-0,017	-0,019	-0,020	-0,020	-0,019	-0,018	-0,016
	0,8	1,430	1,099	0,815	0,589	0,415	0,285	0,189	0,120	0,070	0,035	0,012	-0,004	-0,015	-0,021	-0,024	-0,025	-0,024	-0,023	-0,021	-0,019	-0,017
	0,7	1,539	1,180	0,871	0,623	0,433	0,291	0,187	0,112	0,060	0,024	0,000	-0,015	-0,024	-0,029	-0,030	-0,030	-0,028	-0,026	-0,023	-0,021	-0,018
	0,6	1,657	1,267	0,929	0,658	0,449	0,294	0,181	0,102	0,047	0,010	-0,013	-0,027	-0,035	-0,037	-0,037	-0,035	-0,032	-0,029	-0,025	-0,021	-0,018
$\propto \sqrt{r/h_0}$	0,5	1,785	1,361	0,992	0,693	0,464	0,294	0, 172	0,087	0,029	-0,008	-0,030	-0,042	-0,047	-0,047	-0.045	-0,041	-0,036	-0,031	-0,026	-0,021	-0,017
	0,4	1,923	1,462	1,057	0,729	0,476	0,289	0,157	0,066	0,007	-0,029	-0,049	-0,058	-0,060	-0,057	-0,052	-0,045	-0,038	-0,032	-0,025	-0,020	-0,015
	0,3	2,07	1,57	1,13	0,76	0,48	0,28	0,13	0,04	-0,02	-0,06	-0,07	-0,08	-0,07	-0,07	-0,06	-0,05	-0,04	-0,03	-0,02	-0,02	-0,01
	0,2	2,24	1,69	1,20	0,80	0,49	0,26	0,10	0,00	-0,06	-0,09	-0,10	-0,10	-0,09	-0,08	-0,06	-0.05	-0.04	-0,03	-0,02	-0,01	-0,01
	0,1	2,41	1,81	1,27	0,82	0,48	0,23	0,06	-0.04	-0,10	-0,13	-0,13	-0,12	-0,10	-0,08	-0,06	-0,05	-0,03	-0,02	-0,01	0,00	0,00
	0	2,61	1,94	1,34	0,85	0,46	0, 19	0,00	-0,11	-0,16	-0,17	-0,17	-0,14	-0,11	-0,09	-0,06	-0,04	-0,02	-0,01	0,00	0,00	0,01
8	$\sqrt{rh_0}$	0,0	0,2	0,4	0,6	0,8	1,0	1,2	1,4	1,6	1,8	2,0	2,2	2,4	2,6	2,8	3,0	3,2	3,4	3,6	3,8	4,0

-1

				Table 9, $a_5$	$1.  E h_0^2 \sqrt{h_{0_1}}$	$\frac{1}{r}\frac{dw}{dx} = a_{51}$	$M_0+ a_{52} \sqrt{rh}$	م			2° ( )
s						$\alpha \sqrt{r/h_0}$					
Vrho	0	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	1,0
0,0	-8,84	-8,06	-7,39	-6,80	-6,29	-5,84	-5,44	-5,09	-4,77	-4,49	-4,23
0,2	-6,58	-5,86	-5,25	-4,72	-4,26	-3,87	-3,52	-3,21	-2,94	-2,70	-2,48
0,4	-4,55	-3,98	-3,51	-3,10	-2,76	-2,46	-2,21	-1,99	-1,80	-1,63	-1,48
0,6	-2,87	-2,49	-2,17	-1,91	-1,69	-1,50	-1,34	-1,20	-1,08	-0.97	-0,88
0,8	-1,57	-1,37	-1,21	-1,07	-0.96	-0,86	-0,77	-0,69	-0,63	-0.57	-0.52
1,0	-0,64	-0.59	-0,55	-0.51	-0.47	-0,44	-0,40	-0.37	-0,34	-0,32	-0,29
1,2	-0,01	-0,08	-0,13	-0.15	-0,17	-0,17	-0,17	-0,17	-0,17	-0,16	-0,15
1,4	0,36	0,22	0,13	0,06	0,02	-0,01	-0,04	-0,05	-0,06	-0,01	-0,07
1,6	0,54	0,38	0,26	0,18	0,12	0,08	0,05	0,02	0,00	-0,01	-0,02
1,8	0,59	0,43	0,32	0,23	0,17	0,12	0,09	0,06	0,04	0,03	0,01
2,0	0,56	0,42	0,32	0,24	0,18	0,14	0,11	0,08	0,06	0,04	0,03
2,2	0,48	0,38	0,29	0,23	0,18	0,14	0,11	0,08	0,07	0,05	0,04
2,4	0,39	0,31	0,25	0,20	0,16	0,13	0,10	0,08	0,07	0,05	0,04
2,6	0,29	0,25	0,21	0,17	0,14	0,12	0,09	0,08	0,06	0,05	0,04
2,8 ,8	0,20	0,18	0,16	0,14	0,12	0,10	0,08	0,07	0,06	0,05	0,04
3,0	0,13	0,13	0,12	0,11	0,10	0,08	0,07	0,06	0,05	0,04	0,04
3,2	0,07	0,09	0,09	0,08	0,08	0,07	0,06	0,05	0,04	0,04	0,03
3,4	0,03	0,05	0,06	0,06	0,06	0,05	0,05	0,04	0,04	0,03	0,03
3,6	0,00	0,03	0,04	0,04	0,04	0,04	0,04	0,04	0,03	0,03	0,03
3,8	-0,01	0,01	0,02	0,03	0,03	0,03	0,03	0,03	0,03	0,02	0,02
4,0	-0,02	0,00	0,01	0,02	0,02	0,02	0,02	0,02	0,02	0,02	0,02
			-					-			

144

.



Table 10,  $a_{52}$ .  $Eh_0^2 \sqrt{h_0/r} \frac{dw}{dx} = a_{51} M_0 + a_{52} \sqrt{rh_0} Q_0$ 

8						$\alpha \sqrt{r/h_0}$					
$\sqrt{rh_0}$	0	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	1,0
0,0	-3,39	-3,09	-2,82	-2,58	-2,37	-2,18	-2,01	-1,854	-1,714	-1,588	-1,474
0,2	-3,20	-2,90	-2,64	-2,40	-2,20	-2,01	-1,84	-1,693	-1,559	-1,437	-1,326
0,4	-2,75	-2,48	-2,24	-2,03	-1,84	-1,67	-1,52	-1,393	-1,275	-1,168	-1,073
0,6	-2,20	-1,97	-1,77	-1,60	-1,45	-1,31	-1,19	-1,087	-0,992	-0,907	-0,831
0,8	-1,64	-1,47	-1,33	-1,20	-1,09	-0,99	-0,90	-0,822	-0,751	-0,687	-0,630
1,0	-1,13	-1,03	-0.94	-0,86	-0,79	-0,72	-0,66	-0,607	-0.558	-0,513	-0,472
1,2	-0,72	-0,67	-0,63	-0.59	-0.55	-0.51	-0.47	-0,439	-0,407	-0,378	-0,350
1,4	-0,39	-0,40	-0,39	-0,38	-0,37	-0,35	-0,33	-0,312	-0,293	-0,275	-0,258
1,6	-0,16	-0,20	-0,22	-0,23	-0,23	-0,23	-0,22	-0,217	-0,208	-0,198	-0,188
1,8	-0,01	-0,06	-0,10	-0,12	-0,14	-0,14	-0,15	-0,146	-0,144	-0,140	-0,136
2,0	0,09	0,02	-0,02	-0,05	-0,07	-0,08	-0,09	-0,095	-0,097	-0,098	-0,097
2,2	0,13	0,07	0,03	0,00	-0,02	-0,04	-0,05	-0,059	-0,063	-0,066	-0,068
2,4	0,15	0,10	0,06	0,03	0,00	-0,01	-0,02	-0,033	-0,039	-0,043	-0,046
2,6	0,14	0,10	0,07	0,04	0,02	0,01	-0,01	-0,015	-0,022	-0,027	-0,030
2,8	0,12	0,09	0,07	0,05	0,03	0,02	0,01	-0,003	-0,010	-0,015	-0,019
3,0	0,10	0,08	0,06	0,05	0,03	0,02	0,01	0,005	-0,001	-0,006	-0,010
3,2	0,07	0,07	0,06	0,05	0,03	0,03	0,02	0,010	0,004	-0,001	-0,005
3,4	0,05	0,05	0,05	0,04	0,03	0,03	0,02	0,013	0,008	0,003	-0,000
3,6	0,03	0,04	0,04	0,03	0,03	0,02	0,02	0,014	0,009	0,006	0,003
3,8	0,02	0,03	0,03	0,03	0,03	0,02	0,02	0,014	0,010	0,007	0,004
4,0	0,01	0,02	0,02	0,02	0,02	0,02	0,02	0,013	0,011	0,008	0,005
	-	and the second se								_	

,

	δ 		-1,0	1,000	0,807	0,454	0,164	0,024																
	vi vi		-0,9	1,000	0,834	0,515	0,228	0,058	0,003	<u>,</u>														
	~ <b>~</b>		-0,8	1,000	0,857	0,572	0,297	0,109	0,020	0,000														
able 11-20			-0,7	1,000	0,877	0,624	0,366	0,169	0,054	0,008	0,000													
r Edge (Ta	$h_{12}\sqrt{rh_0}Q_0$		-0,6	1,000	0,893	0,668	0,428	0,231	0,100	0,031	0,005	0,000							_					
om a Lowe	$= a_{11} M_0 + a$	$lpha \sqrt{r/h_0}$	-0,5	1,000	0,906	0,703	0,479	0,286	0,146	0,060	0,018	0,003	0,000											
irbances fr	$I, a_{11}, M_x$		-0,4	1,000	0,916	0,732	0,522	0,333	0,188	0,090	0,033	0,007	-0,002	-0,002	-0,001	0,000								
Edge Distu	Table 1		-0,3	1,000	0,925	0,756	0,559	0,376	0,227	0,119	0,050	0,012	-0.005	-0,009	-0,008	-0,004	-0,002	0,000	0,000	0,000				
Tables for			-0,2	1,000	0,932	0,776	0,592	0,414	0,264	0,149	0,070	0,020	-0,007	-0,017	-0,019	-0,015	-0,011	-0,006	-0,003	-0,001	0,000	0,000	0,000	0,000
			-0,1	1,000	0,938	0,795	0,621	0,450	0,300	0,180	0,092	0,032	-0,005	-0,023	-0,030	-0,029	-0.025	-0,019	-0,013	-0,008	-0,004	-0,002	0,000	0,000
			0	1,000	0,943	0,811	0,647	0,482	0,334	0,211	0,116	0,047	0,002	-0.026	-0,039	-0,043	-0.041	-0,035	-0.028	-0.021	-0,015	-0,009	-0,005	-0,002
		$\frac{x}{2}$	V rho	0,0	0,2	0,4	0,6	0,8	1,0	1,2	1,4	1,6	1,8	2,0	2,2	2,4	2,6	2,8	3,0	3,2	3,4	3,6	3,8	4,0

 $\mathbf{146}$ 

Table 12,  $a_{12}$ .  $M_x = a_{11} M_0 + a_{12} \sqrt{r h_0} Q_0$ 

	-1,0	0,0000	0,1003	0,0825	0,0355	0,0057																
	-0,9	0,0000	0,1073	0,0986	0,0527	0,0151	0,0008															
	-0,8	0,0000	0,1142	0,1158	0,0736	0,0305	0,0061	0,0000	,													
	-0,7	0,0000	0, 1209	0,1334	0,0972	0,0519	0,0186	0,0030	0,0000			- W						÷				
	-0,6	0,0000	0,1270	0,1503	0,1217	0,0773	0,0382	0,0133	0,0024	0,0000							2					
$lpha \sqrt{r/h_0}$	-0,5	0,0000	0,1324	0,1658	0,1454	0,1040	0,0622	0,0303	0,0112	0,0026	0,0002											
	-0,4	0,0000	0,1371	0,1797	0,1676	0, 1303	0,0876	0,0510	0,0250	0,0100	0,0024	0,0000	-0,0001	0,0000								
	-0,3	0,0000	0,1414	0,1927	0,1887	0,1564	0,1145	0,0747	0,0429	0,0208	0,0076	0,0010	-0,0012	-0,0014	-0,0008	-0,0003	-0,0001	0,0000				
	-0,2	0,000	0,145	0,205	0,209	0,182	0,143	0,101	0,065	0,037	0,017	0,005	-0,001	-0,003	-0,004	-0,003	-0,002	-0,001	0,000	0,000	0,000	0,000
	-0,1	0,000	0,149	0,216	0,229	0,208	0,172	0,130	0,091	0,058	0,032	0,014	0,003	-0,004	-0,006	-0,007	-0,006	-0,005	-0,003	-0,002	-0,001	0,000
	0	0,000	0,152	0,227	0,248	0,234	0,201	0,161	0,120	0,083	0,053	0,029	0,012	0,001	-0,006	-0,010	-0,011	-0,010	-0,009	-0,007	-0,005	-0,004
$s \parallel$	$\sqrt{rh_0}$	0,0	0,2	0,4	0,6	0,8	1,0	1,2	1,4	1,6	1,8	2,0	2,2	2,4	2,6	2,8	3,0	3,2	3,4	3,6	3,8	4,0

Survix - Sx		-1,0	0,000	-1,614	-1,733	-1,093	-0,342																
		-0,9	0,000	-1,414	-1,623	-1,172	-0.532	-0.077						,									
		-0,8	0,000	-1,230	-1,493	-1,194	-0,685	-0,232	-0,010														
		-0,7	0,000	-1,070	-1,356	-1,172	-0,780	-0,383	-0,106	-0,001													
$+a_{22}\sqrt{rh_0}Q_0$		-0,6	0,000	-0,937	-1,230	-1,124	-0,826	-0,490	-0,219	-0,059	-0,003												
$Q_x=a_{21}M_0$	$lpha \sqrt{r/h_0}$	-0,5	0,000	-0,832	-1,124	-1,072	-0,842	-0.559	-0,308	-0,130	-0,034	-0,002											
$a_{21}$ . $\sqrt{rh_0}$		-0,4	0,000	-0,748	-1,035	-1,023	-0,846	-0,608	-0,378	-0,197	-0,077	-0,015	0,006	0,006	0,001								
Table 13,		-0,3	0,000	-0,677	-0,957	-0,975	-0.841	-0,642	-0,437	-0,261	-0,130	-0,046	-0,002	0,015	0,016	0,010	0,004	0,001	0,000	-			
		-0,2	0,000	-0.616	-0,889	-0.929	-0,830	-0,665	-0,484	-0,318	-0,184	-0,088	-0,026	0,008	0,022	0,024	0,019	0,013	0,007	0,003	0,001	0,000	0,000
		-0,1	0,000	-0.564	-0,827	-0,884	-0.814	-0,678	-0.519	-0,367	-0,236	-0,133	-0,060	-0,012	0,016	0,028	0,031	0,028	0,022	0,016	0,010	0,005	0,002
		0	0,000	-0,517	-0,770	-0.840	-0.794	-0,683	-0.546	-0,407	-0,282	-0.179	-0,098	-0,040	-0,002	0,021	0,033	0,036	0,035	0,030	0,024	0,018	0,013
	8	V rho	0,0	0,2	0,4	0,6	0,8	1,0	1,2	1,4	1,6	1,8	2,0	2,2	2,4	2,6	2,8	3,0	3,2	3,4	3,6	3,8	4,0

148



Table 14,  $a_{22}$ .  $\sqrt{rh_0}Q_x = a_{21}M_0 + a_{22}\sqrt{rh_0}Q_0$ 

8						$lpha \sqrt{r/h_0}$					
$\sqrt{rh_0}$	0	-0,1	-0,2	-0,3	-0,4	-0,5	-0,6	-0,7	-0,8	-0,9	-1,0
0,0	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000
0,2	0,546	0,516	0,484	0,449	0,412	0,372	0,326	0,275	0,221	0,167	0,114
0,4	0,219	0,178	0,136	0,092	0,047	0,000	-0,050	-0,101	-0,148	-0,188	-0,218
0,6	0,002	-0,036	-0,073	-0,110	-0,144	-0,176	-0,206	-0,229	-0,239	-0,233	-0,213
0,8	-0,127	-0,154	-0,178	-0,198	-0,213	-0,221	-0,221	-0,207	-0,176	-0,131	-0,080
1,0	-0,190	-0,203	-0,211	-0,211	-0,205	-0,189	-0,163	-0,122	-0,069	-0,021	
1,2	-0,208	-0,206	-0,198	-0,182	-0,158	-0,127	-0,087	-0,039	-0,003		
1,4	-0,197	-0,183	-0,162	-0,135	-0,102	-0,066	-0,028	-0,001			
1,6	-0,170	-0,147	-0,119	-0,087	-0,054	-0,024	-0,002				
1,8	-0,136	-0,108	-0,078	-0,047	-0,021	-0,004					
2,0	-0,101	-0,073	-0,044	-0,020	-0,004						
2,2	-0,070	-0,044	-0,020	-0,005	0,001						
2,4	-0,045	-0,022	-0,006	0,002	0,000						
2,6	-0,025	-0,007	0,002	0,003							
2,8	-0,010	0,001	0,005	0,002							
3,0	-0,001	0,006	0,005	0,001							
3,2	0,005	0,007	0,004	0,000							
3,4	0,008	0,007	0,002								
3,6	0,009	0,006	0,001								
3,8	0,009	0,004	0,000								
4,0	0,007	0,003	0,000								
				-							

)* ()* ()*		-1,0	13.10	3.69	-1,88	-3,97	-3,11																
		-0,9	11.05	3,58	-1,04	-3,08	-3,00	-1,35															
/m •		-0,8	9.30	3,37	-0,41	-2,28	-2,59	-1,79	-0,38														
		-0,7	7,86	3,12	0,01	-1,64	-2,11	-1,76	-0.96	-0,11													
$-a_{32}\sqrt{rh_0}Q_0$		-0,6	6,73	2,86	0,28	-1,16	-1,69	-1,58	-1,10	-0.52	-0,08					L.							
$\phi = a_{31} M_0 + b_{10}$	$\alpha \sqrt{r/h_0}$	-0,5	5,87	2,64	0,45	-0,83	-1,37	-1,39	-1,09	-0,68	-0,30	-0,05											
$i, a_{31}, h_0 N$		-0,4	5,18	2,44	0,56	-0,57	-1,11	-1,21	-1,05	-0,75	-0.45	-0,19	-0,04	0,03	0,02								
Table 15		-0,3	4,62	2,28	0,64	-0.37	-0,89	-1,05	-0.97	-0,77	-0.53	-0,31	-0,14	-0,03	0,02	0,03	0,02	0,01	0,00				
		-0,2	4,15	2,12	0,69	-0,22	-0,71	-0,90	-0,89	-0,76	-0.58	-0,39	-0,23	-0,11	0,03	0,01	0,03	0,03	0,03	0,02	0,01	0,00	0,00
*		-0,1	3,74	1,98	0,73	-0,09	-0.56	-0.77	-0,80	-0,72	-0,59	-0,44	-0,30	-0,18	-0,10	-0,03	0,00	0,02	0,03	0,03	0,03	0,02	0,01
	-	0	3,39	1,85	0,74	0,01	-0,43	-0,65	-0,71	-0.67	-0.58	-0.46	-0,34	-0,24	-0,15	-0,08	-0,03	0,00	0,02	0,03	0,03	0,03	0,03
	$\left\  s \right\ $	V rho	0,0	0,2	0,4	0,6	0,8	1,0	1,2	1,4	1,6	1,8	2,0	2,2	2,4	2,6	2,8	3,0	3,2	3,4	3,6	3,8	4,0

-

	CYLINDRICAL TANKS O	R TUBES WITH	I LINEARLY VARIABLE THICKNESS	151
--	---------------------	--------------	-------------------------------	-----



000	
$rh_{0}$	
32 V	
+a	
$M_0$	
$a_{31}$	
11	
N	
$h_0$	
$a_{32}$ .	
16,	
ble	
Ta	

x						$lpha \sqrt{r/h_0}$					
$\sqrt{rh_0}$	0	-0,1	-0,2	-0,3	-0,4	-0,5	-0,6	-0,7	-0,8	-0,9	-1,0
0,0	2,61	2,81	3,04	3,29	3,57	3,88	4,24	4,66	5,13	5,64	6,18
0,2	1,94	2,04	2,14	2,24	2,34	2,45	2,56	2,67	2,76	2,83	2,86
0,4	1,34	1,36	1,37	1,36	1,35	1,32	1,26	1,18	1,04	0,86	0,64
0,6	0,85	0,81	0,76	0,69	0,61	0,50	0,37	0,19	-0,03	-0,27	-0.51
0,8	0,46	0,40	0, 32	0, 22	0, 12	-0,01	-0,16	-0,33	-0.51	-0,64	-0,67
1,0	0, 19	0,11	0,03	-0,06	-0,16	-0,27	-0,37	-0,47	-0,49	-0,36	
1,2	0,00	-0,07	-0,14	-0,21	-0,27	-0,33	-0,36	-0,33	-0,13		
1,4	-0,11	-0,16	-0,21	-0,25	-0,27	-0,27	-0,22	-0,04			
1,6	-0,16	-0,19	-0,22	-0,22	-0,21	-0,15	-0,05				
1,8	-0,17	-0,19	-0,19	-0,17	-0,12	-0,05					
2,0	-0,17	-0,16	-0,14	-0,11	-0,05						
2,2	-0,14	-0,13	-0,10	-0,05	-0,01						
2,4	-0,11	-0,09	-0,05	-0,02	0,00						
2,6	-0,09	-0,06	-0,02	0,00							
2,8	-0,06	-0,03	-0,01	0,01							
3,0	-0,04	-0,01	0,00	0,00							
3,2	-0,02	-0,00	0,01	0,00							
3,4	-0,01	0,00	0,01								
3,6	0,00	0,01	0,00								
3,8	0,00	0,01	0,00								
4,0	0,01	0,01	0,00							5	
	-	-	-	-		-					

$\begin{array}{c} -0.1 \\ -0.1 \\ 3,74 \\ 3,74 \\ 2,02 \\ 0,76 \\ -0,85 \\ -0,83 \\ -0,83 \\ -0,83 \\ -0,83 \\ -0,83 \\ -0,83 \\ -0,83 \\ -0,83 \\ -0,13 \\ 0,01 \\ 0,01 \\ 0,01 \\ 0,02 \\$
$\begin{array}{c c} -0.1 \\ -0.16 \\ -0.16 \\ -0.85 \\ -0.83 \\ -0.83 \\ -0.24 \\ -0.38 \\ -0.13 \\ -0.05 \\ 0.01 \\ 0.01 \\ 0.05 \\ 0.02 $

IVAR HOLAND

152

\$		-1,0	6,18	3,58	1,06	-1,28	-3,36																
		-0,9	5,64	3,45	1,34	-0.59	-2,27	-3,64															
4 <sup>9</sup> '		-0,8	5,13	3, 29	1,53	-0,06	-1,40	-2,45	-3,15														
		-0,7	4,66	3,10	1,63	0, 32	-0,75	-1,55	-2,04	-2,19													
$a_{42}\sqrt{rh_0}Q_0$		-0,6	4,24	2,91	1,66	0,57	-0,31	-0.93	-1,29	-1,36	-1,17												
$w = a_{41}M_0 + $	$\alpha \sqrt{r/h_0}$	-0,5	3,88	2,72	1,65	0,72	-0,02	-0.53	-0,82	-0,89	-0,77	-0,50											
$a_{42}$ . $\frac{Eh_0^2}{r}$	Υ.	-0,4	3,57	2,55	1,61	0,80	0,17	-0,27	-0.53	-0,62	-0.57	-0,43	-0,24	-0,05	-0,11								
Table 18,		-0,3	3,29	2,38	1,55	0,84	0,30	-0,09	-0,33	-0,43	-0,43	-0,37	-0,26	-0,15	-0,06	-0,01	0,05	0,05	0,03				
		-0,2	3,04	2, 23	1,48	0,86	0,38	0,03	-0,18	-0,29	-0,32	-0,29	-0,24	-0,17	-0,11	-0.05	0,01	0,01	0,02	0,02	0,02	0,01	0,00
		-0,1	2,81	2,08	1,41	0,86	0,43	0,12	-0.07	-0,19	-0,23	-0,23	-0,20	-0,16	-0,12	-0,08	-0.04	-0,02	0,00	0,01	0,01	0,01	0,01
		0	2,61	1,94	1,34	0,85	0,46	0,19	0,00	-0,11	-0,16	-0,17	-0,17	-0.14	-0,11	-0,09	-0.06	-0.04	-0,02	-0,01	0,00	0,00	0,01
	8	Vrho	0,0	0,2	0,4	0,6	0,8	1,0	1,2	1,4	1,6	1,8	2,0	2,2	2,4	2,6	2,8	3,0	3,2	3,4	3,6	3,8	4,0

8/8 		-1,0	-43,8	-40,8	-36,6	-31,2	-24,8																
× v		-0,9	-34,8	-31,8	-27,8	-22,8	-17,1	-10,7															
*		-0,8	-27,7	-24,9	-21,1	-16,6	-11,4	- 5,9	- 0,2														
<b>%</b>		-0,7	-22,5	-19,7	-16,2	-12,1	- 7,6	- 3,0	1,5	5,8													
$(0+a_{52})/\frac{rh_0}{rh_0}$		-0,6	-18,70	-16,02	-12,73	- 9,08	- 5,29	- 1,58	1,83	4,77	7,06												
$rac{dw}{dx} = a_{51} M$	$\alpha \sqrt{r/h_0}$	-0,5	-15,95	-13,34	-10,30	- 7,09	- 3,94	- 1,05	1,39	3,25	4,43	4,88											
$Eh_0^2\sqrt{h_0/r}$		-0,4	-13,86	-11,33	- 8,53	- 5,72	- 3,11	- 0,88	0,86	2,04	2,65	2,72	2,31	1,55	0,55								
able 19, a <sub>51</sub> .		-0,3	-12,21	- 9,75	- 7,17	- 4,71	- 2,54	- 0,79	0,49	1,31	1,69	1,72	1,48	1,08	0,61	0,17	- 0,17	-0,36	- 0,39				
E.		-0,2	-10,87	- 8,48	- 6,10	- 3,94	- 2,13	- 0,73	0,25	0,85	1,13	1,17	1,04	0,82	0,57	0,33	0,13	- 0,01	- 0,09	- 0,12	- 0,11	- 0,08	- 0,04
		-0,1	-9,77	-7,44	-5,25	-3,35	-1,82	-0,68	0,09	0,56	0,78	0,82	0,76	0,63	0,48	0,33	0,20	0,10	0,02	-0,02	-0,04	-0,05	-0,05
		0	-8,84	-6,59	-4,56	-2,87	-1,57	-0.64	-0,01	0,36	0,54	0,59	0,56	0,48	0,39	0, 29	0,20	0,13	0,07	0,03	0,00	-0,01	-0,02
	8	$\sqrt{rh_0}$	0,0	0,2	0,4	0,6	0,8	1,0	1,2	1,4	1,6	1,8	2,0	2,2	2,4	2,6	2,8	3,0	3,2	3,4	3,6	3,8	4,0

Bh	No. 1		
		$\overline{w}$ $\overline{h^2}$ $\sqrt{h_2/m}$ $\frac{dw}{dw}$ - $\frac{m_2}{m_2}$ $M_2$ + $\frac{m_2}{m_2}$ $M_2$	$p_{2} p_{1} + 1 z_{2} p_{1} + 0 z_{2} z_{2} - \frac{x p_{1}}{x} p_{1} + 0 z_{1} z_{2}$
		Traklo 90 a.	1 wore 20, a52.

8						$\alpha \sqrt{r/h_0}$					
$\sqrt{rh_0}$	0	-0,1	-0,2	-0,3	-0,4	-0,5	-0,6	-0,7	-0,8	-0,9	-1,0
0,0	-3,39	-3,74	-4,15	-4,62	-5,18	-5,87	-6,73	-7,86	-9,30	-11,09	-13,10
0,2	-3,20	-3,55	-3,94	-4,41	-4,97	-5,65	-6,51	-7,64	-9,07	-10,82	-12,87
0,4	-2,75	-3,07	-3,44	-3,88	-4,41	-5,06	-5,90	-7,01	-8,42	-10,16	-12,21
0,6	-2,20	-2,46	-2,78	-3,15	-3,61	-4,19	-4,96	-6,01	-7,39	- 9,10	-11,12
0,8	-1,64	-1,83	-2,06	-2,34	-2,69	-3,14	-3,79	-4,73	-6,03	- 7,68	- 9,66
1,0	-1,13	-1,25	-1,38	-1,54	-1,73	-2,00	-2,46	-3,23	-4,40	- 5,95	
1,2	-0,72	-0,76	-0,79	-0.82	-0,84	-0,88	-1,06	-1,59	-2,55		
1,4	-0,39	-0,37	-0,32	-0,24	-0,08	0,15	0,31	0,12			
1,6	-0,16	-0,10	0,01	0,19	0,50	1,01	1,58				
1,8	-0,01	0,08	0,22	0,45	0,86	1,64					
2,0	0,09	0,18	0,32	0,55	1,00						
2, 2	0,13	0, 22	0,34	0,53	0,92						
2,4	0,15	0,21	0,30	0,42	0,66						
2,6	0,14	0,19	0,24	0,26		_					
2,8	0,12	0,15	0,16	0,09							
3,0	0,10	0,10	0,08	-0,06							
3,2	0,07	0,07	0,02	-0,15				•			
3,4	0,05	0,03	-0,01								
3,6	0,03	0,01	-0,03								
3,8	0,02	0,00	-0,04								
4,0	0,01	-0,01	-0,03								
		-	-	-							

#### IVAR HOLAND

FAVRE includes only the two first terms in the series (20) and gives closed formulas for the edge quantities ( $\xi = 0$ ), which in the notation used in this paper may be written

$$\begin{aligned} & (a_{31})_{\xi=0} = (a_{31})_{\xi=0,\beta=0} \left(1 - \frac{5}{4} \epsilon\right) = -(a_{52})_{\xi=0}, \\ & (a_{32})_{\xi=0} = (a_{31})_{\xi=0,\beta=0} \left(1 - \epsilon\right), \\ & (a_{52})_{\xi=0} = (a_{52})_{\xi=0,\beta=0} \left(1 - \frac{5}{4} \epsilon\right). \end{aligned}$$

A comparison of these values with those of the tables is shown in Fig. 5. The figure shows that FAVRE's solution with two series terms may be used with sufficient accuracy even outside the eventual limits given by FAVRE.





### Numerical Example

As an example to demonstrate the use of the tables, an approximate analysis of a cylindrical arch dam will be shown. A vertical section through the dam is shown in Fig. 6a. The radius measured to the upstream face is constant and equal to 60 m, and the thickness varies from 1.8 to 3.0 m. The arch dam is supported by a bottom vault of much larger thickness and smaller radius. The joint is designed so as to take no bending moment.

It is fully satisfactory for a preliminary design to approximate the arch dam by a cylindrical tank with the same cross section. This method has been proposed by TÖLKE [4] («zweite Näherungsstufe»).

The bottom vault is very rigid in comparison with the flexible thin arch dam, and the edge conditions are supposed to be

$$w = M_x = 0$$
.

The extended concrete dimensions at the crown are of little importance to the stress distribution. The additional concrete area may be considered a ring of area  $A = 1 \text{ m}^2$  supporting the upper edge. The edge conditions at the upper edge are then

$$M_x = 0$$
, $w_{vault} = w_{ring}$ .

Fig. 6b shows the idealized static system and the hydrostatic load.



Fig. 6. Section Through Arch Dam. Dimensions in Metres.

a) Actual Shape.

b) Idealized Static System and Hydrostatic Loading.

As shown in [2] the particular integral gives a tangential force as in the membrane state, hence

at the upper edge  $N_{\varphi p} = -1.5 \cdot 60 = -90$  t/m, at the lower edge  $N_{\varphi p} = -36.2 \cdot 60 = -2172$  t/m.

Furthermore, the particular integral gives a bending moment

$$M_{xp} = \gamma r^2 \alpha^2 x_1 / 6 (1 - \nu^2)$$

where

 $\begin{array}{lll} \gamma &= {\rm specific \ weight \ of \ water} &= 1 \ {\rm t/m^2} \\ \alpha &= {\rm rate \ of \ thickness \ variation} = \frac{1.25}{34.7} = 0.036 \\ \nu &= {\rm Poisson's \ ratio} &= 0.2 \\ x_1 &= {\rm distance \ from \ intersection \ point} \\ {\rm of \ wall \ faces \ to \ the \ zero \ point \ of} \\ {\rm load \ diagram} = 1.75/\alpha - 1.5 &= 47 \ {\rm m} \\ M_{xp} &= 37 \ {\rm tm} . \end{array}$ 

Edge disturbances from the upper edge are of minor importance, as the particular quantities are small at this edge. For this reason they may be left out when the edge equations for the lower edge are formed, without loss in accuracy.

As  $N_{\varphi} = E h w/r$ , the edge equations for the lower edge may be written

$$N_{\varphi 0} + N_{\varphi p} = 0,$$
  
$$M_0 + M_{xp} = 0.$$

 $N_{\varphi 0}$  and  $M_0$  are forces from the edge disturbances. According to Eqs. (19)

$$h_0 N_{\omega 0} = a_{31} M_0 + a_{32} \sqrt{r} h_0 Q_0,$$

 $a_{31}$  and  $a_{32}$  are found from Tables 15 and 16 for  $\alpha \sqrt{r/h_0} = -0.036 \sqrt{58.8/3.0} = -0.16$  and x = 0. The edge equations become

$$\begin{array}{l} 3.99\,M_{0} + 2.95\,\sqrt{r\,h_{0}}\,Q_{0} = 2172\cdot 3.0\,,\\ M_{0} = -\,37\,\mathrm{t}\\ \sqrt{r\,h_{0}}\,Q_{0} = 2260\,\mathrm{t}\,,\\ Q_{0} = 170\,\mathrm{t/m} \end{array}$$

giving

The edge quantities being known,  $M_x$ , for instance, may be found from

$$M_x = M_{xp} + a_{11}M_0 + a_{12}\sqrt{rh_0}Q_0,$$

 $a_{11}$  and  $a_{12}$  are found for  $\alpha \sqrt{r/h_0} = 0.16$  by interpolation in Tables 11 and 12. This moment is shown in Fig. 7. The figure demonstrates that edge disturbances from the upper edge give a small correction near the crown. The correction is without practical importance, and it is included below for the sake of completeness only.



Fig. 7. Diagrams of  $M_x$ ,  $N_{\varphi}$  and w in the Case of Axial Symmetry. —— Total. ——— Without Edge Disturbances from the Upper Edge.

The magnitude at the upper edge of the edge disturbances from the lower edge are found from Tables 12, 14 and 16 for

$$\begin{aligned} \frac{x}{\sqrt{r h_0}} &= \frac{34.7}{\sqrt{58.8 \cdot 3.0}} = 2.61, \\ M_x &= -0.005 \cdot 2260 = -11 \text{ t}, \\ Q_x &= -0.002 \cdot 170 \approx 0 \text{ t}, \\ N_\varphi &= -\frac{1}{3.0} \cdot 0.04 \cdot 2260 = -30 \text{ t/m} \end{aligned}$$

The additional quantitites are the particular integral quantitites and the edge disturbances from the upper edge, determined by the set of edge quantities,  $M'_0$  and  $Q'_0$ . The resulting bending moment at the edge disappears, hence

$$M'_0 + 37 - 11 = 0$$
,  $M'_0 = -26$  t.

 $Q'_{\mathbf{0}}$  is determined by the condition

$$w_{vault} = w_{ring}$$
.

In the vault

$$N_{\varphi} = \frac{1}{h_0} (a_{31} M'_0 + a_{32} \sqrt{r h_0} Q'_0) - 90 - 30.$$
  
For  $\alpha \sqrt{\frac{r}{h_0}} = 0.036 \sqrt{\frac{58.8}{1.75}} = 0.209.$ 

Tables 5 and 6 give

Hence

$$a_{31} = 2.80$$
  $a_{32} = 2.22$ .  
 $N_{\varphi} = -162 + 12.9 Q_0'.$ 

The displacements are equal when

$$\begin{aligned} -\frac{Q_0'r}{A} &= \frac{1}{h_0}(-162 + 12.9\,Q_0')\,,\\ Q_0' &\approx 1 \text{ t/m}\,. \end{aligned}$$

which gives

This shear force is so small that it may be neglected in actual design.

The particular integrals and the edge disturbances from both edges being known, the remaining work will be to compute forces and displacements by aid of the tables. The resulting values of  $M_x$ ,  $N_{\omega}$  and w are plotted in Fig. 7.

In the actual arch dam the radial displacement along the valley sides is prevented. To complete the analysis above one must find the additional stresses necessary to force the displacement shown in Fig. 7 back to zero along the valley sides. TÖLKE [4] carries this correction through by imagining the vault divided in several separate arches without any mutual connection («dritte Näherungsstufe»). One may improve this rather rough approximation by taking into account the tangential restraining force acting on the arches. For a complete investigation of the additional stresses mentioned, however, the shell theory must be used. In the case of irregular valley sides the analysis may be carried through by transforming the differential equations of the shell to difference equations.

Analyses of the additional stresses show that they have the character of damped edge disturbances originating from the valley sides. Thus the axially symmetrical state of stress calculated above will prevail in the central part of the dam.

### Notations

shell radius
shell thickness
nondimensional parameter
shell thickness at the edge
rate of change of shell thickness
nondimensional parameter
nondimensional parameter
coordinate measured in the direction of the axis
nondimensional coordinate
$\overline{+\beta \xi}/\beta$ nondimensional coordinate
distance from point of intersection of wall faces to shell edge
bending moment
bending moment originating from the particular integral
bending moment at the edge
shear force
shear force at the edge
circumferential force, positive when tensile
circumferential force in the membrane state of stress
circumferential force at the edge
normal displacement, positive when outwards
modulus of elasticity
Poisson's ratio
flexural rigidity
constants of integration
nondimensional coefficients

160

### Acknowledgement

I wish to express my gratitude to the Mathematics Group of the Norwegian Defence Research Establishment for programming and carrying out the computations of this paper, and to The Technical University of Norway Fund for bearing the computing expenses.

### References

- 1. TIMOSHENKO, S. and WOINOWSKY-KRIEGER, S.: Theory of Plates and Shells. Sec. ed. McGraw-Hill, New York, Toronto, London 1959.
- 2. FLÜGGE, W.: Statik und Dynamik der Schalen. Zweite Auflage, Springer-Verlag Berlin/Göttingen/Heidelberg 1957.
- 3. FAVRE, H.: Sur une méthode de calcul des coques cylindriques d'épaisseur linéairement variable. IX<sup>e</sup> Congrès International de Mécanique appliquée, Tome VI, p. 297, Bruxelles 1957.
- 4. LUDIN, A.: Wasserkraftanlagen. Zweite Hälfte. Erster Teil von Friedrich Tölke. Springer, Berlin 1938.

### Summary

The paper presents tables for the analysis of circular cylindrical shells with axially symmetrical loads and a thickness which varies linearly in the axial direction. The tables give the internal forces and displacements of the shell expressed by the edge forces  $M_0$  and  $Q_0$ . The mathematical basis for the tables is the well known solution with Kelvin functions.

In a numerical example an approximate analysis of a cylindrical arch dam, approximated by a complete cylinder, is shown.

# Résumé

L'auteur présente des tables permettant de calculer les voiles cylindriques de révolution qui sont chargés symétriquement par rapport à leur axe et dont l'épaisseur varie linéairement le long des génératrices. Ces tables donnent les sollicitations et les déformations du voile en fonction des efforts  $M_0$  et  $Q_0$ appliqués à son extrémité. Les valeurs contenues dans les tables ont été calculées à l'aide de la solution bien connue qui utilise des fonctions de Kelvin.

Dans une application numérique, l'auteur expose le calcul approché d'un barrage-voûte cylindrique, assimilé approximativement à un cylindre fermé.

#### IVAR HOLAND

## Zusammenfassung

Es werden Tabellen vorgelegt zur Untersuchung kreiszylindrischer Schalen bei symmetrisch zur Zylinderachse angeordneter Belastung und linear veränderlicher Stärke in Richtung der Achse. Die Tabellen geben die Schnittkräfte und Durchbiegungen in Funktion der Randkräfte  $M_0$  und  $Q_0$ . Mathematisch beruhen sie auf der wohlbekannten Auflösungsmethode mit Hilfe von Kelvinfunktionen.

Als numerisches Beispiel wird eine Näherungsberechnung einer zylindrischen Bogenstaumauer angegeben, in welcher die Mauer durch einen geschlossenen Zylinder ersetzt wird.