

Tables for the analysis of cylindrical tanks or tubes with linearly variable thickness

Autor(en): **Holand, Ivar**

Objektyp: **Article**

Zeitschrift: **IABSE publications = Mémoires AIPC = IVBH Abhandlungen**

Band (Jahr): **21 (1961)**

PDF erstellt am: **22.07.2024**

Persistenter Link: <https://doi.org/10.5169/seals-18250>

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern.

Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden.

Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

Haftungsausschluss

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

Tables for the Analysis of Cylindrical Tanks or Tubes with Linearly Variable Thickness

Tables pour le calcul de réservoirs ou de tubes cylindriques à épaisseur linéairement variable

Tabellen zur Berechnung von kreiszylindrischen Behältern oder Rohren mit linear veränderlicher Stärke

IVAR HOLAND

Dr. techn., Technical University of Norway, Trondheim

Basic Theory

The theory of circular cylindrical shells with axial symmetrical load and constant or linearly variable thickness is given in the common textbooks, for instance [1] or [2]. The final expressions for forces and displacements are found by combining a particular integral (approximated by the membrane solution) and a solution of the homogeneous equation (edge disturbances).

Fig. 1 shows a cylindrical shell which is subjected to a moment M_0 and a shear force Q_0 evenly distributed along one edge. When influences from the opposite edge are left out, and the shell thickness h is constant, the expressions for forces and displacements may be written (compare for instance [1]):

$$\begin{aligned}M_x &= e^{-cx/r} \left[M_0 \left(\cos \frac{cx}{r} + \sin \frac{cx}{r} \right) + \frac{r}{c} Q_0 \sin \frac{cx}{r} \right], \\Q_x &= \frac{c}{r} e^{-cx/r} \left[-2 M_0 \sin \frac{cx}{r} + \frac{r}{c} Q_0 \left(\cos \frac{cx}{r} - \sin \frac{cx}{r} \right) \right], \\N_\varphi &= \frac{2c^2}{r} e^{-cx/r} \left[M_0 \left(\cos \frac{cx}{r} - \sin \frac{cx}{r} \right) + \frac{r}{c} Q_0 \cos \frac{cx}{r} \right], \\w &= \frac{r^2}{2c^2 D} e^{-cx/r} \left[M_0 \left(\cos \frac{cx}{r} - \sin \frac{cx}{r} \right) + \frac{r}{c} Q_0 \cos \frac{cx}{r} \right], \\ \frac{dw}{dx} &= -\frac{r}{2cD} e^{-cx/r} \left[2 M_0 \cos \frac{cx}{r} + \frac{r}{c} Q_0 \left(\cos \frac{cx}{r} + \sin \frac{cx}{r} \right) \right].\end{aligned} \tag{1}$$

M_x and Q_x are the bending moment and the shear force at a distance x from the edge. Positive directions for M_x and Q_x are as shown for M_0 and Q_0 in Fig. 1. N_φ is the circumferential force, positive when tensile. w is the radial displacement, positive outwards. D is the flexural rigidity

$$D = \frac{E h^3}{12(1-\nu^2)} \quad (2)$$

and c is a shell parameter

$$c = \sqrt[4]{\frac{3(1-\nu^2)r^2}{h^2}}, \quad (3)$$

where ν is Poisson's ratio.

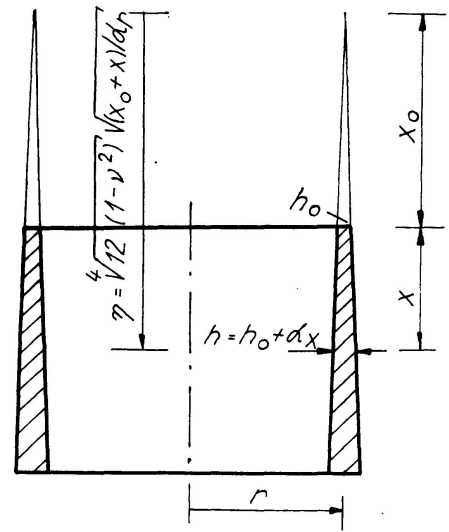
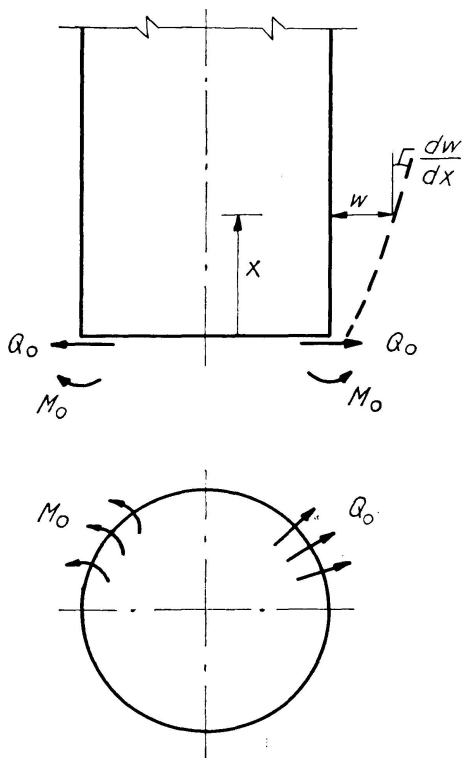


Fig. 2. Cylindrical Shell with Linearly Variable Thickness.

Fig. 1. Cylindrical Shell with Constant Thickness h Subjected to Edge Forces M_0 and Q_0 .

In the case of linearly variable thickness the solution of the homogeneous differential equation is obtained by use of Kelvin functions. When the coordinate system is chosen as shown in Fig. 2, the expressions for forces and displacements may be written (compare for instance [2])

$$\begin{aligned} M_x = \frac{E \alpha^3}{48(1-\nu^2)} \sqrt{x_0+x} \{ & C_1 (-\eta^2 \text{kei}' \eta + 4 \eta \text{kei} \eta + 8 \text{ker}' \eta) \\ & + C_2 (\eta^2 \text{ker}' \eta - 4 \eta \text{ker} \eta + 8 \text{kei}' \eta) + C_3 (-\eta^2 \text{bei}' \eta + 4 \eta \text{bei} \eta + 8 \text{ber}' \eta) \\ & + C_4 (\eta^2 \text{ber}' \eta - 4 \eta \text{ber} \eta + 8 \text{bei}' \eta) \}, \end{aligned} \quad (4)$$

$$\begin{aligned} Q_x = \frac{E \alpha^2}{4r \sqrt{3(1-\nu^2)}} \sqrt{x_0+x} \{ & C_1 (-\eta \text{ker} \eta + 2 \text{kei}' \eta) - C_2 (\eta \text{kei} \eta + 2 \text{ker}' \eta) \\ & + C_3 (-\eta \text{ber} \eta + 2 \text{bei}' \eta) - C_4 (\eta \text{bei} \eta + 2 \text{ber}' \eta) \}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 N_\varphi &= \frac{E\alpha}{r} \sqrt{x_0+x} \{C_1 \ker' \eta + C_2 \operatorname{kei}' \eta + C_3 \operatorname{ber}' \eta + C_4 \operatorname{bei}' \eta\}, \\
 w &= \frac{1}{\sqrt{x_0+x}} \{C_1 \ker' \eta + C_2 \operatorname{kei}' \eta + C_3 \operatorname{ber}' \eta + C_4 \operatorname{bei}' \eta\}, \\
 \frac{dw}{dx} &= -\frac{1}{2(x_0+x)\sqrt{x_0+x}} \{C_1(\eta \operatorname{kei} \eta + 2 \ker' \eta) + C_2(-\eta \ker \eta + 2 \operatorname{kei}' \eta) \\
 &\quad + C_3(\eta \operatorname{bei} \eta + 2 \operatorname{ber}' \eta) + C_4(-\eta \operatorname{ber} \eta + 2 \operatorname{bei}' \eta)\}.
 \end{aligned} \tag{4}$$

In these expressions α is a constant expressing the rate of change of the shell thickness

$$h = h_0 + \alpha x \tag{5}$$

and η is a nondimensional coordinate

$$\eta = 2 \sqrt[4]{12(1-\nu^2)} \sqrt{\frac{x_0+x}{\alpha r}}. \tag{6}$$

$C_1 - C_4$ are constants of integration, which must be determined from the edge conditions at an upper and a lower edge.

The form of solution (4) requires much more laborious numerical work than does the simple solution (1) for constant thickness.

To avoid this, FAVRE [3] has proposed to use a series development where the first term in the series is the solution for a shell of constant thickness equal to the thickness h_0 at the edge. The solution still leaves a considerable amount of numerical work, even when the variation of thickness is so small ($\alpha\sqrt{r/h_0} < \sim 0,2$) that only two terms in the series will suffice.

The present paper shows how a tabulation may be carried out, which gives the solution for variable thickness and constant thickness in the same form.

The solution (1) for constant thickness may be written

$$\begin{aligned}
 M_x &= a_{11} M_0 + a_{12} \sqrt{r\bar{h}} Q_0, \\
 \sqrt{r\bar{h}} Q_x &= a_{21} M_0 + a_{22} \sqrt{r\bar{h}} Q_0, \\
 h N_\varphi &= a_{31} M_0 + a_{32} \sqrt{r\bar{h}} Q_0, \\
 \frac{E h^2}{r} w &= a_{41} M_0 + a_{42} \sqrt{r\bar{h}} Q_0, \\
 E h^2 \sqrt{\frac{\bar{h}}{r}} \frac{dw}{dx} &= a_{51} M_0 + a_{52} \sqrt{r\bar{h}} Q_0.
 \end{aligned} \tag{7}$$

The coefficients a_{ik} are functions of the one variable

$$\frac{cx}{r} = \sqrt[4]{3(1-\nu^2)} \frac{x}{\sqrt{r\bar{h}}}, \tag{8}$$

as follows

$$\begin{aligned}
 a_{11} &= e^{-cx/r} \left(\cos \frac{cx}{r} + \sin \frac{cx}{r} \right), \\
 a_{12} &= [3(1-\nu^2)]^{-1/4} e^{-cx/r} \sin \frac{cx}{r}, \\
 a_{21} &= -2[3(1-\nu^2)]^{1/2} a_{12}, \\
 a_{22} &= e^{-cx/r} \left(\cos \frac{cx}{r} - \sin \frac{cx}{r} \right), \\
 a_{31} &= a_{41} = 2[3(1-\nu^2)]^{1/2} a_{22}, \\
 a_{32} &= a_{42} = 2[3(1-\nu^2)]^{1/4} e^{-cx/r} \cos \frac{cx}{r}, \\
 a_{51} &= -2[3(1-\nu^2)]^{1/2} a_{42}, \\
 a_{52} &= -2[3(1-\nu^2)]^{1/2} a_{11}.
 \end{aligned} \tag{9}$$

The coefficients a_{ik} may be tabulated for different values of the nondimensional variable

$$\xi = \frac{x}{\sqrt{r}h}. \tag{10}$$

The first step in order to bring the expressions (4) into a form similar to Eqs. (7), is to introduce similarly reduced quantities. First, all quantities are divided by the constant

$$\frac{E \alpha^3}{48(1-\nu^2)} \frac{\sqrt{\alpha r}}{2^4 \sqrt[4]{12(1-\nu^2)}}.$$

This may be done because of the arbitrary constants occurring in the expressions.

With the new notation

$$\eta_0 = 2^4 \sqrt[4]{12(1-\nu^2)} \sqrt{\frac{x_0}{\alpha r}} = \frac{2^4 \sqrt[4]{12(1-\nu^2)}}{\alpha \sqrt{r/h_0}}, \tag{11}$$

which is the value of η at the edge $x=0$, Eqs. (4) may be written

$$\begin{aligned}
 M_x &= \eta \{ C_1 (-\eta^2 \text{kei}' \eta + 4 \eta \text{kei} \eta + 8 \text{ker}' \eta) \\
 &\quad + C_2 (\eta^2 \text{ker}' \eta - 4 \eta \text{ker} \eta + 8 \text{kei}' \eta) + C_3 (-\eta^2 \text{bei}' \eta + 4 \eta \text{bei} \eta + 8 \text{ber}' \eta) \\
 &\quad + C_4 (\eta^2 \text{ber}' \eta - 4 \eta \text{ber} \eta + 8 \text{bei}' \eta) \}, \\
 \sqrt{r h_0} Q_x &= [12(1-\nu^2)]^{1/4} \eta_0 \eta \{ C_1 (-\eta \text{ker} \eta + 2 \text{kei}' \eta) \\
 &\quad - C_2 (\eta \text{kei} \eta + 2 \text{ker}' \eta) + C_3 (-\eta \text{ber} \eta + 2 \text{bei}' \eta) - C_4 (\eta \text{bei} \eta + 2 \text{ber}' \eta) \}, \\
 h_0 N_\varphi &= [12(1-\nu^2)]^{1/2} \eta_0^2 \eta \{ C_1 \text{ker}' \eta + C_2 \text{kei}' \eta + C_3 \text{ber}' \eta + C_4 \text{bei}' \eta \}, \\
 \frac{E h_0^2}{r} w &= [12(1-\nu^2)]^{1/2} \eta_0^4 \eta^{-1} \{ C_1 \text{ker}' \eta + C_2 \text{kei}' \eta + C_3 \text{ber}' \eta + C_4 \text{bei}' \eta \}, \\
 \frac{E h_0^2}{r} \sqrt{\frac{h_0}{r}} \frac{dw}{dx} &= -[12(1-\nu^2)]^{3/4} \eta_0^5 \eta^{-3} \{ C_1 (\eta \text{kei} \eta + 2 \text{ker}' \eta) \\
 &\quad + C_2 (-\eta \text{ker} \eta + 2 \text{kei}' \eta) + C_3 (\eta \text{bei} \eta + 2 \text{ber}' \eta) + C_4 (-\eta \text{ber} \eta + 2 \text{bei}' \eta) \}.
 \end{aligned} \tag{12}$$

Hence, the reduced quantities depend on the value of η_0 given by Eq. (11), that is on the quantity

$$\beta = \alpha \sqrt{\frac{r}{h_0}}. \quad (13)$$

This parameter expresses the rate of thickness variation. Furthermore, the reduced quantities vary in the axial direction depending on the coordinate

$$\eta = 2 \sqrt[4]{12(1-\nu^2)} \sqrt{\frac{x_0+x}{\alpha r}} = 2 \sqrt[4]{12(1-\nu^2)} \frac{1}{\beta} \sqrt{1+\beta\xi}, \quad (14)$$

where
$$\xi = \frac{x}{\sqrt{r h_0}}. \quad (15)$$

The coordinate ξ is the same as the coordinate for the shell of constant thickness, if only the constant shell thickness h in Eq. (10) is replaced by the edge thickness h_0 .

In Eqs. (4) and (12) the functions \ker and \kei and their derivatives give edge disturbances originating from the upper edge, whereas the functions \ber and \bei and their derivatives give edge disturbances originating from the lower edge. These two groups of edge disturbances may be treated separately. If they interfere, the final result is obtained by superposition.

To treat the edge disturbances from the upper edge only, one must put $C_3 = C_4 = 0$. When the edge is subjected to a moment M_0 and a radial force Q_0 evenly distributed along the edge (Fig. 3), Eqs. (12) give

$$\begin{aligned} M_0 &= C_1 m_1(\eta_0) + C_2 m_2'(\eta_0), \\ \sqrt{r h_0} Q_0 &= C_1 q_1(\eta_0) + C_2 q_2(\eta_0), \end{aligned} \quad (16)$$

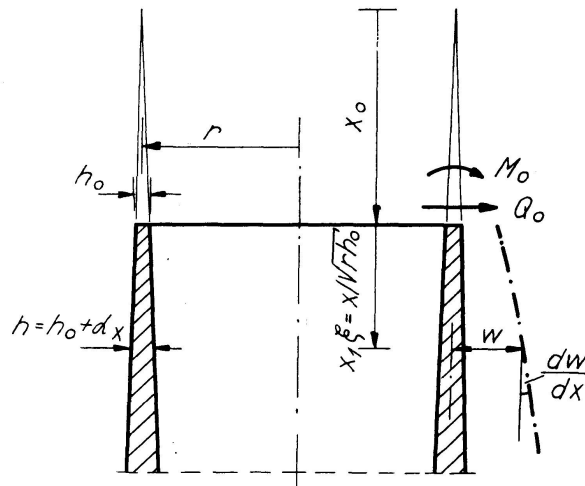


Fig. 3. Cylindrical Shell with Linearly Variable Thickness Subjected to Edge Forces M_0 and Q_0 at the Upper Edge.

where

$$\begin{aligned}
 m_1(\eta_0) &= -\eta_0^3 \operatorname{kei}' \eta_0 + 4 \eta_0^2 \operatorname{kei} \eta_0 + 8 \eta_0 \operatorname{ker}' \eta_0, \\
 m_2(\eta_0) &= \eta_0^3 \operatorname{ker}' \eta_0 - 4 \eta_0^2 \operatorname{ker} \eta_0 + 8 \eta_0 \operatorname{kei}' \eta_0, \\
 q_1(\eta_0) &= [12(1-\nu^2)]^{1/4} (-\eta_0^3 \operatorname{ker} \eta_0 + 2 \eta_0^2 \operatorname{kei}' \eta_0), \\
 q_2(\eta_0) &= [12(1-\nu^2)]^{1/4} (-\eta_0^3 \operatorname{kei} \eta_0 - 2 \eta_0^2 \operatorname{ker}' \eta_0).
 \end{aligned}
 \tag{17}$$

From Eq. (16) the constants C_1 and C_2 may be expressed by M_0 and Q_0 as follows

$$\begin{aligned}
 C_1 &= \frac{q_2(\eta_0) M_0 - m_2(\eta_0) \sqrt{r h_0} Q_0}{m_1(\eta_0) q_2(\eta_0) - m_2(\eta_0) q_1(\eta_0)}, \\
 C_2 &= \frac{-q_1(\eta_0) M_0 + m_1(\eta_0) \sqrt{r h_0} Q_0}{m_1(\eta_0) q_2(\eta_0) - m_2(\eta_0) q_1(\eta_0)}.
 \end{aligned}
 \tag{18}$$

Substituting these values for the constants in Eqs. (12) the quantities are obtained in the form

$$\begin{aligned}
 M_x &= a_{11} M_0 + a_{12} \sqrt{r h_0} Q_0, \\
 \sqrt{r h_0} Q_x &= a_{21} M_0 + a_{22} \sqrt{r h_0} Q_0, \\
 h_0 N_\varphi &= a_{31} M_0 + a_{32} \sqrt{r h_0} Q_0, \\
 \frac{E h_0^2}{r} w &= a_{41} M_0 + a_{42} \sqrt{r h_0} Q_0, \\
 E h_0^2 \sqrt{\frac{h_0}{r}} \frac{dw}{dx} &= a_{51} M_0 + a_{52} \sqrt{r h_0} Q_0.
 \end{aligned}
 \tag{19}$$

The coefficients a_{ik} are functions of the variable ξ and the parameter of thickness variation β . For $\beta=0$ they are replaced by corresponding coefficients in Eqs. (7).

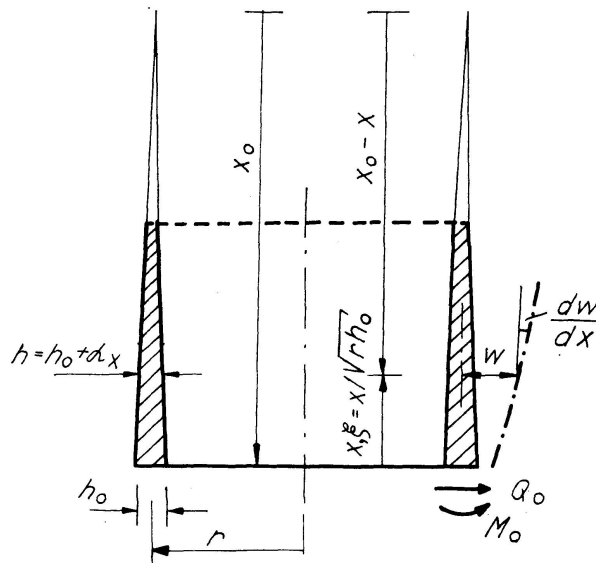


Fig. 4. Cylindrical Shell with Linearly Variable Thickness Subjected to Edge Forces M_0 and Q_0 at the Lower Edge.

To treat the edge disturbances from the lower edge one must put $C_1 = C_2 = 0$ in Eqs. (12). Again, it is convenient to measure the coordinates x and ξ positive from the edge (Fig. 4). Hence, α in Eq. (5) is negative. The change of the sign of x makes it necessary to change the signs of Q_x and $\frac{dw}{dx}$ in Eqs. (12). A procedure which otherwise is the same as the one shown above, again leads to expressions in the form (19).

In the expressions above Poisson's ratio ν only occurs in $1 - \nu^2$. Hence, the real value of ν is of minor importance. In the tables it has been put equal to 0.2.

The calculations outlined were programmed by the Mathematics Group at the Norwegian Defence Research Establishment and carried out on their Ferranti Mercury computer.

The resulting values of a_{ik} are given in Tables 1—10 for disturbances from the upper edge ($\beta = 0, 0.1, 0.2 \dots 1.0$), and in Tables 11—20 for disturbances from the lower edge ($\beta = 0, -0.1, -0.2 \dots -1.0$). In both cases the values of the variable are $\xi = 0, 0.2, 0.4 \dots 4.0$. When edge disturbances from the lower edge are considered, one must have

$$x \leq x_0$$

hence, in Tables 11—20

$$\xi \leq \frac{x_0}{\sqrt{r h_0}} = -\frac{1}{\beta}.$$

The computations were carried through with a maximal error of the order of magnitude 10^{-6} . The tables, however, give only 3 digits (4 when the first digit is 1) in the maximum values of each column. More digits than those given were found to be of no interest in actual design.

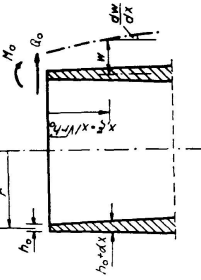
A Comparison with Favre's Approximation

As mentioned previously, FAVRE [3] has proposed to solve the differential equation for the cylindrical shell with variable thickness by a series development. This solution gives an arbitrary quantity in the form

$$f(\xi) = f_0(\xi) + \epsilon f_1(\xi) + \epsilon^2 f_2(\xi) + \dots \quad (20)$$

where $f_0(\xi)$ is the solution found for a shell of constant thickness equal to the edge thickness h_0 , and

$$\epsilon = \frac{\beta}{\sqrt[4]{3(1-\nu^2)}}. \quad (21)$$



Tables for Edge Disturbances from an Upper Edge (Table 1—10)

Table 1, a_{11} . $M_x = a_{11} M_0 + a_{12} \sqrt{r h_0} Q_0$

$\frac{x}{\sqrt{r h_0}}$	$\alpha \sqrt{r/h_0}$										
	0	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	1,0
0,0	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000
0,2	0,943	0,948	0,952	0,956	0,959	0,962	0,965	0,968	0,970	0,972	0,974
0,4	0,811	0,825	0,838	0,850	0,861	0,871	0,879	0,888	0,895	0,902	0,908
0,6	0,647	0,671	0,693	0,714	0,732	0,749	0,765	0,780	0,794	0,806	0,818
0,8	0,482	0,513	0,542	0,569	0,594	0,617	0,639	0,660	0,680	0,698	0,715
1,0	0,334	0,367	0,399	0,429	0,459	0,486	0,513	0,538	0,562	0,585	0,606
1,2	0,211	0,242	0,274	0,304	0,335	0,365	0,393	0,421	0,448	0,474	0,499
1,4	0,116	0,142	0,169	0,198	0,227	0,256	0,285	0,314	0,342	0,370	0,397
1,6	0,047	0,066	0,087	0,111	0,136	0,163	0,191	0,219	0,247	0,275	0,302
1,8	0,002	0,012	0,026	0,043	0,064	0,086	0,110	0,136	0,162	0,189	0,216
2,0	-0,026	-0,024	-0,018	-0,007	0,007	0,025	0,044	0,067	0,090	0,115	0,141
2,2	-0,039	-0,045	-0,046	-0,042	-0,035	-0,023	-0,008	0,010	0,030	0,051	0,075
2,4	-0,043	-0,054	-0,062	-0,065	-0,064	-0,058	-0,049	-0,036	-0,020	-0,002	0,018
2,6	-0,041	-0,056	-0,069	-0,078	-0,082	-0,083	-0,079	-0,071	-0,060	-0,045	-0,029
2,8	-0,035	-0,053	-0,070	-0,083	-0,093	-0,098	-0,099	-0,097	-0,090	-0,080	-0,067
3,0	-0,028	-0,047	-0,066	-0,083	-0,096	-0,107	-0,113	-0,115	-0,113	-0,107	-0,098
3,2	-0,021	-0,039	-0,059	-0,078	-0,095	-0,109	-0,119	-0,126	-0,128	-0,127	-0,122
3,4	-0,015	-0,031	-0,051	-0,071	-0,090	-0,107	-0,121	-0,131	-0,138	-0,140	-0,139
3,6	-0,009	-0,023	-0,042	-0,062	-0,083	-0,102	-0,119	-0,133	-0,143	-0,149	-0,152
3,8	-0,005	-0,017	-0,033	-0,053	-0,075	-0,095	-0,114	-0,130	-0,144	-0,153	-0,159
4,0	-0,002	-0,011	-0,025	-0,044	-0,065	-0,087	-0,107	-0,126	-0,141	-0,154	-0,163

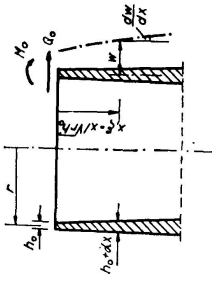


Table 2, a_{12} . $M_x = a_{11} M_0 + a_{12} \sqrt{r h_0} Q_0$

$\frac{x}{\sqrt{r h_0}}$	$\alpha \sqrt{r/h_0}$										
	0	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	1,0
0,0	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000
0,2	0,152	0,156	0,159	0,161	0,164	0,166	0,168	0,170	0,172	0,174	0,176
0,4	0,227	0,237	0,247	0,256	0,264	0,272	0,280	0,287	0,294	0,300	0,306
0,6	0,248	0,266	0,283	0,300	0,316	0,331	0,346	0,359	0,372	0,384	0,396
0,8	0,234	0,259	0,284	0,308	0,331	0,354	0,375	0,396	0,416	0,435	0,453
1,0	0,201	0,231	0,261	0,291	0,321	0,350	0,378	0,406	0,432	0,457	0,482
1,2	0,161	0,193	0,226	0,260	0,294	0,328	0,362	0,395	0,428	0,459	0,489
1,4	0,120	0,152	0,186	0,222	0,258	0,296	0,334	0,371	0,408	0,445	0,480
1,6	0,083	0,113	0,145	0,181	0,218	0,257	0,297	0,338	0,379	0,419	0,459
1,8	0,053	0,078	0,108	0,141	0,178	0,217	0,257	0,300	0,343	0,386	0,429
2,0	0,029	0,049	0,074	0,105	0,139	0,176	0,217	0,259	0,303	0,348	0,394
2,2	0,012	0,027	0,047	0,073	0,103	0,138	0,177	0,218	0,262	0,308	0,354
2,4	0,001	0,010	0,025	0,046	0,073	0,104	0,140	0,179	0,222	0,267	0,314
2,6	-0,006	-0,002	0,008	0,024	0,046	0,074	0,106	0,143	0,183	0,227	0,273
2,8	-0,010	-0,009	-0,004	0,008	0,025	0,048	0,076	0,109	0,147	0,188	0,233
3,0	-0,011	-0,013	-0,012	-0,005	0,007	0,026	0,050	0,079	0,114	0,153	0,195
3,2	-0,010	-0,015	-0,017	-0,014	-0,006	0,008	0,028	0,053	0,084	0,119	0,159
3,4	-0,009	-0,015	-0,019	-0,020	-0,016	-0,006	0,009	0,031	0,058	0,090	0,126
3,6	-0,007	-0,014	-0,020	-0,023	-0,022	-0,017	-0,006	0,012	0,035	0,063	0,096
3,8	-0,005	-0,012	-0,019	-0,024	-0,027	-0,025	-0,017	-0,004	0,015	0,039	0,069
4,0	-0,004	-0,010	-0,017	-0,024	-0,029	-0,030	-0,026	-0,017	-0,002	0,019	0,045

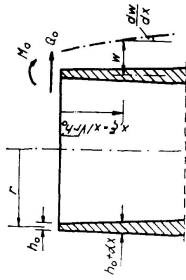


Table 3, a_{21} . $\sqrt{r h_0} Q_x = a_{21} M_0 + a_{22} \sqrt{r h_0} Q_0$

$\frac{x}{\sqrt{r h_0}}$	$\alpha \sqrt{r/h_0}$										
	0	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	1,0
0,0	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000
0,2	-0,517	-0,476	-0,439	-0,406	-0,376	-0,348	-0,323	-0,301	-0,280	-0,261	-0,244
0,4	-0,770	-0,719	-0,672	-0,628	-0,588	-0,550	-0,516	-0,484	-0,454	-0,426	-0,401
0,6	-0,840	-0,798	-0,757	-0,718	-0,681	-0,645	-0,611	-0,579	-0,548	-0,520	-0,492
0,8	-0,794	-0,771	-0,746	-0,720	-0,693	-0,666	-0,639	-0,612	-0,585	-0,560	-0,535
1,0	-0,683	-0,682	-0,676	-0,666	-0,653	-0,637	-0,620	-0,601	-0,582	-0,563	-0,543
1,2	-0,546	-0,564	-0,575	-0,581	-0,582	-0,579	-0,572	-0,563	-0,552	-0,540	-0,527
1,4	-0,407	-0,440	-0,465	-0,484	-0,497	-0,505	-0,508	-0,509	-0,506	-0,501	-0,494
1,6	-0,282	-0,323	-0,357	-0,385	-0,408	-0,425	-0,437	-0,446	-0,451	-0,453	-0,452
1,8	-0,179	-0,221	-0,260	-0,293	-0,322	-0,346	-0,365	-0,380	-0,391	-0,399	-0,404
2,0	-0,098	-0,138	-0,176	-0,212	-0,244	-0,272	-0,296	-0,316	-0,332	-0,345	-0,355
2,2	-0,040	-0,074	-0,109	-0,143	-0,176	-0,205	-0,232	-0,255	-0,275	-0,292	-0,305
2,4	-0,002	-0,027	-0,056	-0,087	-0,118	-0,147	-0,175	-0,200	-0,222	-0,241	-0,258
2,6	0,021	0,005	-0,017	-0,043	-0,071	-0,099	-0,126	-0,151	-0,174	-0,195	-0,213
2,8	0,033	0,025	0,010	-0,010	-0,033	-0,058	-0,084	-0,108	-0,131	-0,153	-0,173
3,0	0,036	0,036	0,028	0,014	-0,005	-0,026	-0,049	-0,072	-0,094	-0,116	-0,136
3,2	0,035	0,040	0,038	0,030	0,016	-0,001	-0,021	-0,042	-0,063	-0,083	-0,103
3,4	0,030	0,040	0,043	0,040	0,031	0,018	0,002	-0,017	-0,036	-0,055	-0,074
3,6	0,024	0,036	0,044	0,045	0,040	0,031	0,019	0,003	-0,014	-0,031	-0,049
3,8	0,018	0,031	0,041	0,046	0,046	0,040	0,031	0,019	0,004	-0,011	-0,028
4,0	0,013	0,026	0,037	0,045	0,048	0,046	0,040	0,031	0,019	0,005	-0,010

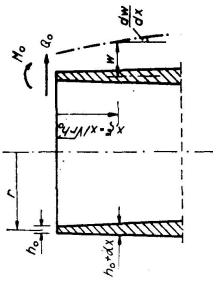


Table 4, a_{22} . $\sqrt{r h_0} Q_x = a_{21} M_0 + a_{22} \sqrt{r h_0} Q_0$

x $\sqrt{r h_0}$	$\alpha \sqrt{r/h_0}$										
	0	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	1,0
0,0	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000
0,2	0,546	0,574	0,601	0,626	0,649	0,671	0,691	0,711	0,728	0,745	0,760
0,4	0,219	0,259	0,297	0,334	0,369	0,402	0,434	0,464	0,493	0,520	0,545
0,6	0,002	0,041	0,080	0,119	0,157	0,194	0,230	0,265	0,298	0,331	0,362
0,8	-0,127	-0,096	-0,064	-0,030	0,004	0,039	0,074	0,109	0,143	0,177	0,210
1,0	-0,190	-0,172	-0,151	-0,126	-0,098	-0,069	-0,039	-0,007	0,024	0,056	0,088
1,2	-0,208	-0,203	-0,194	-0,179	-0,161	-0,140	-0,116	-0,091	-0,064	-0,036	-0,007
1,4	-0,197	-0,204	-0,206	-0,202	-0,194	-0,182	-0,166	-0,147	-0,126	-0,103	-0,079
1,6	-0,170	-0,187	-0,198	-0,204	-0,205	-0,201	-0,193	-0,181	-0,167	-0,150	-0,131
1,8	-0,136	-0,159	-0,178	-0,192	-0,201	-0,204	-0,204	-0,199	-0,191	-0,180	-0,167
2,0	-0,101	-0,128	-0,152	-0,171	-0,186	-0,197	-0,203	-0,205	-0,203	-0,197	-0,189
2,2	-0,070	-0,098	-0,123	-0,147	-0,166	-0,182	-0,193	-0,201	-0,204	-0,204	-0,201
2,4	-0,045	-0,070	-0,096	-0,121	-0,143	-0,162	-0,178	-0,190	-0,199	-0,203	-0,205
2,6	-0,025	-0,047	-0,071	-0,096	-0,120	-0,141	-0,160	-0,176	-0,188	-0,197	-0,202
2,8	-0,010	-0,028	-0,050	-0,073	-0,097	-0,120	-0,140	-0,159	-0,174	-0,186	-0,195
3,0	-0,001	-0,014	-0,032	-0,053	-0,076	-0,099	-0,120	-0,140	-0,158	-0,173	-0,185
3,2	0,005	-0,003	-0,018	-0,036	-0,057	-0,079	-0,101	-0,122	-0,141	-0,158	-0,172
3,4	0,008	0,004	-0,007	-0,022	-0,041	-0,061	-0,083	-0,104	-0,124	-0,142	-0,158
3,6	0,009	0,008	0,001	-0,011	-0,027	-0,046	-0,066	-0,087	-0,107	-0,126	-0,143
3,8	0,009	0,010	0,006	-0,003	-0,016	-0,033	-0,051	-0,071	-0,091	-0,110	-0,128
4,0	0,007	0,010	0,009	0,003	-0,007	-0,021	-0,038	-0,056	-0,076	-0,095	-0,113

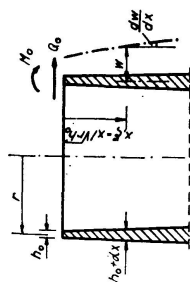


Table 5, a_{31} . $h_0 N_\varphi = a_{31} M_0 + a_{32} \sqrt{r h_0} Q_0$

$\frac{x}{\sqrt{r h_0}}$	$\alpha \sqrt{r/h_0}$										
	0	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	1,0
0,0	3,39	3,09	2,82	2,58	2,37	2,18	2,01	1,854	1,714	1,588	1,474
0,2	1,85	1,74	1,63	1,52	1,43	1,34	1,26	1,182	1,111	1,045	0,983
0,4	0,74	0,75	0,75	0,74	0,73	0,71	0,69	0,673	0,651	0,628	0,605
0,6	0,01	0,09	0,15	0,20	0,24	0,26	0,29	0,302	0,312	0,319	0,322
0,8	-0,43	-0,32	-0,23	-0,16	-0,09	-0,04	0,01	0,042	0,072	0,097	0,117
1,0	-0,65	-0,54	-0,45	-0,36	-0,29	-0,23	-0,18	-0,132	-0,092	-0,058	-0,029
1,2	-0,71	-0,62	-0,54	-0,47	-0,40	-0,34	-0,29	-0,240	-0,198	-0,161	-0,128
1,4	-0,67	-0,61	-0,55	-0,50	-0,44	-0,39	-0,34	-0,300	-0,260	-0,224	-0,191
1,6	-0,58	-0,55	-0,52	-0,48	-0,44	-0,40	-0,36	-0,326	-0,291	-0,258	-0,228
1,8	-0,46	-0,46	-0,45	-0,44	-0,41	-0,39	-0,36	-0,328	-0,299	-0,272	-0,246
2,0	-0,34	-0,37	-0,38	-0,38	-0,37	-0,35	-0,33	-0,314	-0,293	-0,271	-0,249
2,2	-0,24	-0,28	-0,30	-0,31	-0,31	-0,31	-0,30	-0,290	-0,276	-0,260	-0,243
2,4	-0,15	-0,20	-0,23	-0,25	-0,26	-0,27	-0,27	-0,261	-0,253	-0,242	-0,231
2,6	-0,08	-0,13	-0,16	-0,19	-0,21	-0,22	-0,23	-0,229	-0,227	-0,221	-0,214
2,8	-0,03	-0,07	-0,11	-0,14	-0,16	-0,18	-0,19	-0,197	-0,199	-0,198	-0,195
3,0	0,00	-0,04	-0,07	-0,10	-0,12	-0,14	-0,16	-0,166	-0,172	-0,175	-0,174
3,2	0,02	-0,01	-0,04	-0,06	-0,09	-0,11	-0,13	-0,138	-0,146	-0,151	-0,154
3,4	0,03	0,01	-0,01	-0,04	-0,06	-0,08	-0,10	-0,111	-0,122	-0,129	-0,134
3,6	0,03	0,02	0,01	-0,01	-0,04	-0,06	-0,07	-0,088	-0,100	-0,109	-0,116
3,8	0,03	0,03	0,02	0,00	-0,02	-0,04	-0,05	-0,068	-0,080	-0,090	-0,098
4,0	0,03	0,03	0,02	0,01	0,00	-0,02	-0,04	-0,050	-0,063	-0,073	-0,082

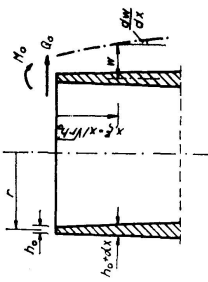


Table 6, a_{32} . $h_0 N_\varphi = a_{31} M_0 + a_{32} \sqrt{r h_0} Q_0$

$\frac{x}{\sqrt{r h_0}}$	$\alpha \sqrt{r/h_0}$										
	0	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	1,0
0,0	2,61	2,41	2,24	2,07	1,923	1,785	1,657	1,539	1,430	1,330	1,238
0,2	1,94	1,85	1,75	1,66	1,579	1,497	1,419	1,345	1,275	1,208	1,145
0,4	1,34	1,32	1,29	1,26	1,226	1,190	1,153	1,114	1,076	1,038	1,000
0,6	0,85	0,87	0,89	0,90	0,904	0,902	0,895	0,885	0,871	0,856	0,839
0,8	0,46	0,52	0,56	0,60	0,628	0,650	0,665	0,675	0,681	0,683	0,682
1,0	0,19	0,25	0,31	0,36	0,405	0,441	0,470	0,494	0,513	0,528	0,539
1,2	0,00	0,07	0,13	0,18	0,232	0,275	0,312	0,344	0,371	0,394	0,413
1,4	-0,11	-0,05	0,00	0,06	0,103	0,147	0,187	0,223	0,254	0,282	0,306
1,6	-0,16	-0,12	-0,08	-0,03	0,011	0,053	0,091	0,127	0,160	0,190	0,217
1,8	-0,17	-0,15	-0,12	-0,09	-0,051	-0,015	0,021	0,055	0,086	0,116	0,143
2,0	-0,17	-0,16	-0,14	-0,12	-0,089	-0,060	-0,030	0,001	0,030	0,058	0,084
2,2	-0,14	-0,15	-0,14	-0,13	-0,110	-0,088	-0,063	-0,038	-0,012	0,013	0,038
2,4	-0,11	-0,13	-0,13	-0,13	-0,118	-0,103	-0,084	-0,064	-0,042	-0,020	0,002
2,6	-0,09	-0,11	-0,12	-0,12	-0,117	-0,108	-0,096	-0,080	-0,063	-0,044	-0,025
2,8	-0,06	-0,08	-0,10	-0,11	-0,110	-0,107	-0,100	-0,089	-0,076	-0,061	-0,045
3,0	-0,04	-0,06	-0,08	-0,09	-0,100	-0,102	-0,099	-0,093	-0,083	-0,072	-0,059
3,2	-0,02	-0,04	-0,06	-0,08	-0,087	-0,093	-0,094	-0,092	-0,086	-0,078	-0,068
3,4	-0,01	-0,03	-0,05	-0,06	-0,075	-0,083	-0,088	-0,088	-0,086	-0,080	-0,073
3,6	-0,00	-0,02	-0,03	-0,05	-0,062	-0,072	-0,079	-0,083	-0,083	-0,080	-0,075
3,8	0,00	-0,01	-0,02	-0,04	-0,050	-0,062	-0,070	-0,076	-0,078	-0,078	-0,075
4,0	0,01	-0,00	-0,01	-0,03	-0,040	-0,052	-0,061	-0,068	-0,072	-0,074	-0,074

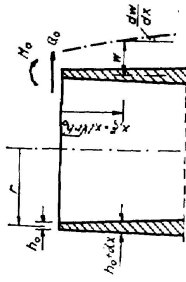


Table 7, a_{41} . $\frac{Eh_0^2}{r} w = a_{11} M_0 + a_{42} \sqrt{r h_0} Q_0$

$\frac{x}{\sqrt{r h_0}}$	$\alpha \sqrt{r/h_0}$										
	0	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	1,0
0,0	3,39	3,09	2,82	2,58	2,37	2,18	2,01	1,854	1,714	1,588	1,474
0,2	1,85	1,70	1,56	1,44	1,32	1,22	1,12	1,037	0,958	0,886	0,820
0,4	0,74	0,72	0,69	0,66	0,63	0,59	0,56	0,526	0,493	0,462	0,432
0,6	0,01	0,08	0,13	0,17	0,19	0,20	0,21	0,212	0,211	0,207	0,202
0,8	-0,43	-0,30	-0,20	-0,13	-0,07	-0,03	0,00	0,027	0,044	0,056	0,065
1,0	-0,65	-0,49	-0,37	-0,28	-0,21	-0,15	-0,11	-0,078	-0,051	-0,031	-0,014
1,2	-0,71	-0,55	-0,44	-0,34	-0,27	-0,21	-0,17	-0,130	-0,101	-0,077	-0,058
1,4	-0,67	-0,54	-0,43	-0,35	-0,28	-0,23	-0,19	-0,152	-0,123	-0,099	-0,080
1,6	-0,58	-0,47	-0,39	-0,32	-0,27	-0,22	-0,19	-0,154	-0,128	-0,106	-0,088
1,8	-0,46	-0,39	-0,33	-0,28	-0,24	-0,20	-0,17	-0,145	-0,123	-0,104	-0,088
2,0	-0,34	-0,31	-0,27	-0,24	-0,20	-0,18	-0,15	-0,131	-0,113	-0,097	-0,083
2,2	-0,24	-0,23	-0,21	-0,19	-0,17	-0,15	-0,13	-0,114	-0,100	-0,087	-0,076
2,4	-0,15	-0,16	-0,15	-0,14	-0,13	-0,12	-0,11	-0,097	-0,087	-0,077	-0,068
2,6	-0,08	-0,10	-0,11	-0,11	-0,10	-0,10	-0,09	-0,081	-0,074	-0,066	-0,059
2,8	-0,03	-0,06	-0,07	-0,08	-0,08	-0,08	-0,07	-0,067	-0,062	-0,056	-0,051
3,0	0,00	-0,03	-0,04	-0,05	-0,06	-0,06	-0,06	-0,054	-0,051	-0,047	-0,044
3,2	0,02	-0,01	-0,02	-0,03	-0,04	-0,04	-0,04	-0,042	-0,041	-0,039	-0,037
3,4	0,03	0,01	-0,01	-0,02	-0,03	-0,03	-0,03	-0,033	-0,033	-0,032	-0,031
3,6	0,03	0,02	0,00	-0,01	-0,01	-0,02	-0,02	-0,025	-0,026	-0,026	-0,025
3,8	0,03	0,02	0,01	0,00	-0,01	-0,01	-0,02	-0,019	-0,020	-0,020	-0,020
4,0	0,03	0,02	0,01	0,01	0,00	-0,01	-0,01	-0,013	-0,015	-0,016	-0,016

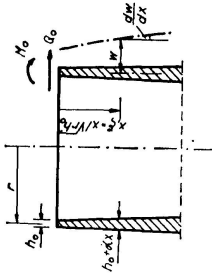


Table 8, a_{42} .
$$\frac{Eh_0^2}{r} w = a_{41} M_0 + a_{42} \sqrt{r h_0} Q_0$$

$\frac{x}{\sqrt{r h_0}}$	$\alpha \sqrt{r/h_0}$										
	0	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	1,0
0,0	2,61	2,41	2,24	2,07	1,923	1,785	1,657	1,539	1,430	1,330	1,238
0,2	1,94	1,81	1,69	1,57	1,462	1,361	1,267	1,180	1,099	1,024	0,954
0,4	1,34	1,27	1,20	1,13	1,057	0,992	0,929	0,871	0,815	0,763	0,714
0,6	0,85	0,82	0,80	0,76	0,729	0,693	0,658	0,623	0,589	0,556	0,524
0,8	0,46	0,48	0,49	0,48	0,476	0,464	0,449	0,433	0,415	0,397	0,379
1,0	0,19	0,23	0,26	0,28	0,289	0,294	0,294	0,291	0,285	0,278	0,270
1,2	0,00	0,06	0,10	0,13	0,157	0,172	0,181	0,187	0,189	0,190	0,188
1,4	-0,11	-0,04	0,00	0,04	0,066	0,087	0,102	0,112	0,120	0,125	0,128
1,6	-0,16	-0,10	-0,06	-0,02	0,007	0,029	0,047	0,060	0,070	0,078	0,083
1,8	-0,17	-0,13	-0,09	-0,06	-0,029	-0,008	0,010	0,024	0,035	0,044	0,051
2,0	-0,17	-0,13	-0,10	-0,07	-0,049	-0,030	-0,013	0,000	0,012	0,021	0,028
2,2	-0,14	-0,12	-0,10	-0,08	-0,058	-0,042	-0,027	-0,015	-0,004	0,004	0,012
2,4	-0,11	-0,10	-0,09	-0,07	-0,060	-0,047	-0,035	-0,024	-0,015	-0,006	0,001
2,6	-0,09	-0,08	-0,08	-0,07	-0,057	-0,047	-0,037	-0,029	-0,021	-0,013	-0,007
2,8	-0,06	-0,06	-0,06	-0,06	-0,052	-0,045	-0,037	-0,030	-0,024	-0,017	-0,012
3,0	-0,04	-0,05	-0,05	-0,05	-0,045	-0,041	-0,035	-0,030	-0,025	-0,019	-0,015
3,2	-0,02	-0,03	-0,04	-0,04	-0,038	-0,036	-0,032	-0,028	-0,024	-0,020	-0,016
3,4	-0,01	-0,02	-0,03	-0,03	-0,032	-0,031	-0,029	-0,026	-0,023	-0,020	-0,017
3,6	0,00	-0,01	-0,02	-0,02	-0,025	-0,026	-0,025	-0,023	-0,021	-0,019	-0,016
3,8	0,00	0,00	-0,01	-0,02	-0,020	-0,021	-0,021	-0,021	-0,019	-0,018	-0,016
4,0	0,01	0,00	-0,01	-0,01	-0,015	-0,017	-0,018	-0,018	-0,017	-0,016	-0,015

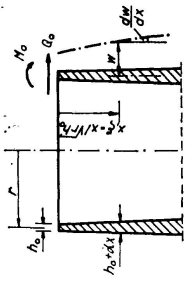


Table 10, a_{52} . $Eh_0^2 \sqrt{h_0/r} \frac{dw}{dx} = a_{51} M_0 + a_{52} \sqrt{r h_0} Q_0$

$\frac{x}{\sqrt{r h_0}}$	$\alpha \sqrt{r/h_0}$										
	0	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	1,0
0,0	-3,39	-3,09	-2,82	-2,58	-2,37	-2,18	-2,01	-1,854	-1,714	-1,588	-1,474
0,2	-3,20	-2,90	-2,64	-2,40	-2,20	-2,01	-1,84	-1,693	-1,559	-1,437	-1,326
0,4	-2,75	-2,48	-2,24	-2,03	-1,84	-1,67	-1,52	-1,393	-1,275	-1,168	-1,073
0,6	-2,20	-1,97	-1,77	-1,60	-1,45	-1,31	-1,19	-1,087	-0,992	-0,907	-0,831
0,8	-1,64	-1,47	-1,33	-1,20	-1,09	-0,99	-0,90	-0,822	-0,751	-0,687	-0,630
1,0	-1,13	-1,03	-0,94	-0,86	-0,79	-0,72	-0,66	-0,607	-0,558	-0,513	-0,472
1,2	-0,72	-0,67	-0,63	-0,59	-0,55	-0,51	-0,47	-0,439	-0,407	-0,378	-0,350
1,4	-0,39	-0,40	-0,39	-0,38	-0,37	-0,35	-0,33	-0,312	-0,293	-0,275	-0,258
1,6	-0,16	-0,20	-0,22	-0,23	-0,23	-0,23	-0,22	-0,217	-0,208	-0,198	-0,188
1,8	-0,01	-0,06	-0,10	-0,12	-0,14	-0,14	-0,15	-0,146	-0,144	-0,140	-0,136
2,0	0,09	0,02	-0,02	-0,05	-0,07	-0,08	-0,09	-0,095	-0,097	-0,098	-0,097
2,2	0,13	0,07	0,03	0,00	-0,02	-0,04	-0,05	-0,059	-0,063	-0,066	-0,068
2,4	0,15	0,10	0,06	0,03	0,00	-0,01	-0,02	-0,033	-0,039	-0,043	-0,046
2,6	0,14	0,10	0,07	0,04	0,02	0,01	-0,01	-0,015	-0,022	-0,027	-0,030
2,8	0,12	0,09	0,07	0,05	0,03	0,02	0,01	-0,003	-0,010	-0,015	-0,019
3,0	0,10	0,08	0,06	0,05	0,03	0,02	0,01	0,005	-0,001	-0,006	-0,010
3,2	0,07	0,07	0,06	0,05	0,03	0,03	0,02	0,010	0,004	-0,001	-0,005
3,4	0,05	0,05	0,05	0,04	0,03	0,03	0,02	0,013	0,008	0,003	-0,000
3,6	0,03	0,04	0,04	0,03	0,03	0,02	0,02	0,014	0,009	0,006	0,003
3,8	0,02	0,03	0,03	0,03	0,03	0,02	0,02	0,014	0,010	0,007	0,004
4,0	0,01	0,02	0,02	0,02	0,02	0,02	0,02	0,013	0,011	0,008	0,005

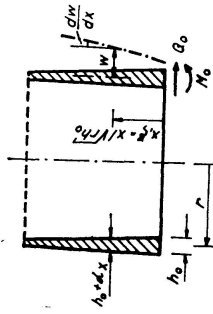


Table 15, a_{31} . $h_0 N_\varphi = a_{31} M_0 + a_{32} \sqrt{r h_0} Q_0$

$\frac{x}{\sqrt{r h_0}}$	$\alpha \sqrt{r h_0}$										
	0	-0,1	-0,2	-0,3	-0,4	-0,5	-0,6	-0,7	-0,8	-0,9	-1,0
0,0	3,39	3,74	4,15	4,62	5,18	5,87	6,73	7,86	9,30	11,05	13,10
0,2	1,85	1,98	2,12	2,28	2,44	2,64	2,86	3,12	3,37	3,58	3,69
0,4	0,74	0,73	0,69	0,64	0,56	0,45	0,28	0,01	-0,41	-1,04	-1,88
0,6	0,01	-0,09	-0,22	-0,37	-0,57	-0,83	-1,16	-1,64	-2,28	-3,08	-3,97
0,8	-0,43	-0,56	-0,71	-0,89	-1,11	-1,37	-1,69	-2,11	-2,59	-3,00	-3,11
1,0	-0,65	-0,77	-0,90	-1,05	-1,21	-1,39	-1,58	-1,76	-1,79	-1,35	
1,2	-0,71	-0,80	-0,89	-0,97	-1,05	-1,09	-1,10	-0,96	-0,38		
1,4	-0,67	-0,72	-0,76	-0,77	-0,75	-0,68	-0,52				
1,6	-0,58	-0,59	-0,58	-0,53	-0,45	-0,30	-0,08				
1,8	-0,46	-0,44	-0,39	-0,31	-0,19	-0,05					
2,0	-0,34	-0,30	-0,23	-0,14	-0,04						
2,2	-0,24	-0,18	-0,11	-0,03	0,03						
2,4	-0,15	-0,10	0,03	0,02	0,02						
2,6	-0,08	-0,03	0,01	0,03	0,03						
2,8	-0,03	0,00	0,03	0,02	0,02						
3,0	0,00	0,02	0,03	0,01	0,01						
3,2	0,02	0,03	0,03	0,00	0,00						
3,4	0,03	0,03	0,02	0,02	0,02						
3,6	0,03	0,03	0,01	0,01	0,01						
3,8	0,03	0,02	0,00	0,00	0,00						
4,0	0,03	0,01	0,00	0,00	0,00						

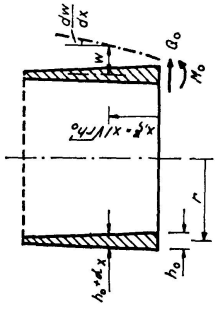


Table 16, a_{32} . $h_0 N_\varphi = a_{31} M_0 + a_{32} \sqrt{r h_0} Q_0$

$\frac{x}{\sqrt{r h_0}}$	$\alpha \sqrt{r/h_0}$										
	0	-0,1	-0,2	-0,3	-0,4	-0,5	-0,6	-0,7	-0,8	-0,9	-1,0
0,0	2,61	2,81	3,04	3,29	3,57	3,88	4,24	4,66	5,13	5,64	6,18
0,2	1,94	2,04	2,14	2,24	2,34	2,45	2,56	2,67	2,76	2,83	2,86
0,4	1,34	1,36	1,37	1,36	1,35	1,32	1,26	1,18	1,04	0,86	0,64
0,6	0,85	0,81	0,76	0,69	0,61	0,50	0,37	0,19	-0,03	-0,27	-0,51
0,8	0,46	0,40	0,32	0,22	0,12	-0,01	-0,16	-0,33	-0,51	-0,64	-0,67
1,0	0,19	0,11	0,03	-0,06	-0,16	-0,27	-0,37	-0,47	-0,49	-0,36	
1,2	0,00	-0,07	-0,14	-0,21	-0,27	-0,33	-0,36	-0,33	-0,13		
1,4	-0,11	-0,16	-0,21	-0,25	-0,27	-0,27	-0,22	-0,04			
1,6	-0,16	-0,19	-0,22	-0,22	-0,21	-0,21	-0,15				
1,8	-0,17	-0,19	-0,19	-0,17	-0,12	-0,15	-0,05				
2,0	-0,17	-0,16	-0,14	-0,11	-0,05	-0,05					
2,2	-0,14	-0,13	-0,10	-0,05	-0,01						
2,4	-0,11	-0,09	-0,05	-0,02	0,00						
2,6	-0,09	-0,06	-0,02	0,00	0,00						
2,8	-0,06	-0,03	-0,01	0,01	0,01						
3,0	-0,04	-0,01	0,00	0,00	0,00						
3,2	-0,02	-0,00	0,01	0,00	0,00						
3,4	-0,01	0,00	0,01	0,01	0,01						
3,6	0,00	0,01	0,00	0,00	0,00						
3,8	0,00	0,01	0,00	0,00	0,00						
4,0	0,01	0,01	0,00	0,00	0,00						

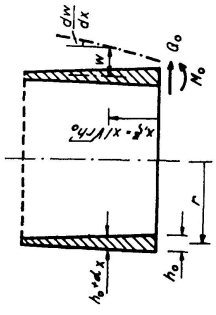


Table 18, a_{42} . $\frac{Eh_0^2}{r}w = a_{41}M_0 + a_{42}\sqrt{r}h_0Q_0$

$\frac{x}{\sqrt{r}h_0}$	$\alpha\sqrt{r/h_0}$										
	0	-0,1	-0,2	-0,3	-0,4	-0,5	-0,6	-0,7	-0,8	-0,9	-1,0
0,0	2,61	2,81	3,04	3,29	3,57	3,88	4,24	4,66	5,13	5,64	6,18
0,2	1,94	2,08	2,23	2,38	2,55	2,72	2,91	3,10	3,29	3,45	3,58
0,4	1,34	1,41	1,48	1,55	1,61	1,65	1,66	1,63	1,53	1,34	1,06
0,6	0,85	0,86	0,86	0,84	0,80	0,72	0,57	0,32	-0,06	-0,59	-1,28
0,8	0,46	0,43	0,38	0,30	0,17	-0,02	-0,31	-0,75	-1,40	-2,27	-3,36
1,0	0,19	0,12	0,03	-0,09	-0,27	-0,53	-0,93	-1,55	-2,45	-3,64	
1,2	0,00	-0,07	-0,18	-0,33	-0,53	-0,82	-1,29	-2,04	-3,15		
1,4	-0,11	-0,19	-0,29	-0,43	-0,62	-0,89	-1,36	-2,19			
1,6	-0,16	-0,23	-0,32	-0,43	-0,57	-0,77	-1,17				
1,8	-0,17	-0,23	-0,29	-0,37	-0,43	-0,50					
2,0	-0,17	-0,20	-0,24	-0,26	-0,24						
2,2	-0,14	-0,16	-0,17	-0,15	-0,05						
2,4	-0,11	-0,12	-0,11	-0,06	-0,11						
2,6	-0,09	-0,08	-0,05	-0,01	-0,05						
2,8	-0,06	-0,04	0,01	0,05	0,05						
3,0	-0,04	-0,02	0,01	0,05	0,05						
3,2	-0,02	0,00	0,02	0,03	0,03						
3,4	-0,01	0,01	0,02	0,02	0,02						
3,6	0,00	0,01	0,02	0,02	0,02						
3,8	0,00	0,01	0,01	0,01	0,01						
4,0	0,01	0,01	0,00	0,00	0,00						

FAVRE includes only the two first terms in the series (20) and gives closed formulas for the edge quantities ($\xi=0$), which in the notation used in this paper may be written

$$\begin{aligned}(a_{31})_{\xi=0} &= (a_{31})_{\xi=0, \beta=0} \left(1 - \frac{5}{4} \epsilon\right) = -(a_{52})_{\xi=0}, \\(a_{32})_{\xi=0} &= (a_{31})_{\xi=0, \beta=0} (1 - \epsilon), \\(a_{52})_{\xi=0} &= (a_{52})_{\xi=0, \beta=0} \left(1 - \frac{5}{4} \epsilon\right).\end{aligned}$$

A comparison of these values with those of the tables is shown in Fig. 5. The figure shows that FAVRE's solution with two series terms may be used with sufficient accuracy even outside the eventual limits given by FAVRE.

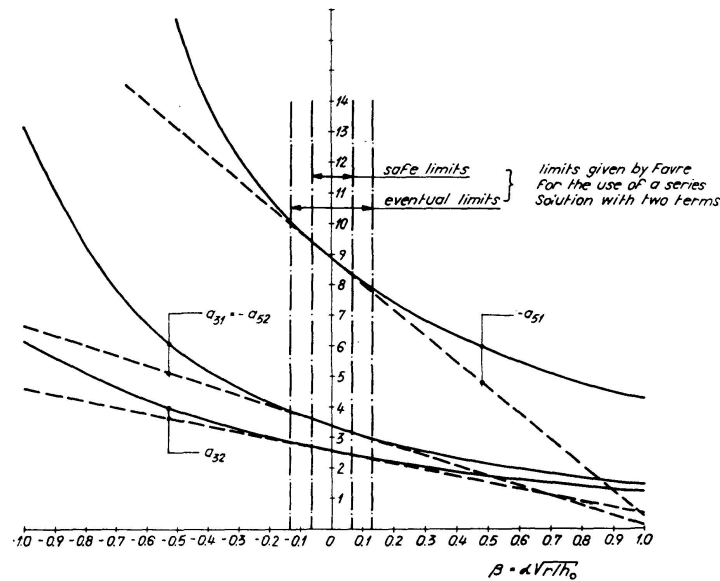


Fig. 5. Comparison of Table Values with Favre's Approximation.

— Tables --- Favre, Two Terms.

Numerical Example

As an example to demonstrate the use of the tables, an approximate analysis of a cylindrical arch dam will be shown. A vertical section through the dam is shown in Fig. 6a. The radius measured to the upstream face is constant and equal to 60 m, and the thickness varies from 1.8 to 3.0 m. The arch dam is supported by a bottom vault of much larger thickness and smaller radius. The joint is designed so as to take no bending moment.

It is fully satisfactory for a preliminary design to approximate the arch dam by a cylindrical tank with the same cross section. This method has been proposed by TÖLKE [4] («zweite Näherungsstufe»).

The bottom vault is very rigid in comparison with the flexible thin arch dam, and the edge conditions are supposed to be

$$w = M_x = 0.$$

The extended concrete dimensions at the crown are of little importance to the stress distribution. The additional concrete area may be considered a ring of area $A = 1 \text{ m}^2$ supporting the upper edge. The edge conditions at the upper edge are then

$$M_x = 0,$$

$$w_{\text{vault}} = w_{\text{ring}}.$$

Fig. 6 b shows the idealized static system and the hydrostatic load.

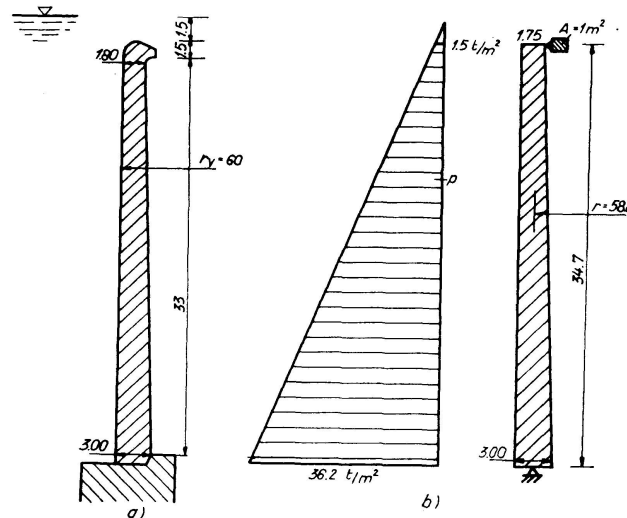


Fig. 6. Section Through Arch Dam. Dimensions in Metres.

a) Actual Shape.

b) Idealized Static System and Hydrostatic Loading.

As shown in [2] the particular integral gives a tangential force as in the membrane state, hence

$$\text{at the upper edge } N_{\varphi p} = - 1.5 \cdot 60 = - 90 \text{ t/m},$$

$$\text{at the lower edge } N_{\varphi p} = - 36.2 \cdot 60 = - 2172 \text{ t/m}.$$

Furthermore, the particular integral gives a bending moment

$$M_{xp} = \gamma r^2 \alpha^2 x_1 / 6 (1 - \nu^2)$$

where

γ	= specific weight of water	= 1 t/m ²
α	= rate of thickness variation	= $\frac{1.25}{34.7} = 0.036$
ν	= Poisson's ratio	= 0.2
x_1	= distance from intersection point of wall faces to the zero point of load diagram	= $1.75/\alpha - 1.5 = 47 \text{ m}$

Hence

$$M_{xp} = 37 \text{ tm}.$$

Edge disturbances from the upper edge are of minor importance, as the particular quantities are small at this edge. For this reason they may be left out when the edge equations for the lower edge are formed, without loss in accuracy.

As $N_\varphi = E h w/r$, the edge equations for the lower edge may be written

$$N_{\varphi 0} + N_{\varphi p} = 0,$$

$$M_0 + M_{xp} = 0.$$

$N_{\varphi 0}$ and M_0 are forces from the edge disturbances. According to Eqs. (19)

$$h_0 N_{\varphi 0} = a_{31} M_0 + a_{32} \sqrt{r h_0} Q_0,$$

a_{31} and a_{32} are found from Tables 15 and 16 for $\alpha \sqrt{r/h_0} = -0.036 \sqrt{58.8/3.0} = -0.16$ and $x = 0$. The edge equations become

$$3.99 M_0 + 2.95 \sqrt{r h_0} Q_0 = 2172 \cdot 3.0,$$

$$M_0 = -37 \text{ t}$$

giving

$$\sqrt{r h_0} Q_0 = 2260 \text{ t},$$

$$Q_0 = 170 \text{ t/m}$$

The edge quantities being known, M_x , for instance, may be found from

$$M_x = M_{xp} + a_{11} M_0 + a_{12} \sqrt{r h_0} Q_0,$$

a_{11} and a_{12} are found for $\alpha \sqrt{r/h_0} = 0.16$ by interpolation in Tables 11 and 12. This moment is shown in Fig. 7. The figure demonstrates that edge disturbances from the upper edge give a small correction near the crown. The correction is without practical importance, and it is included below for the sake of completeness only.

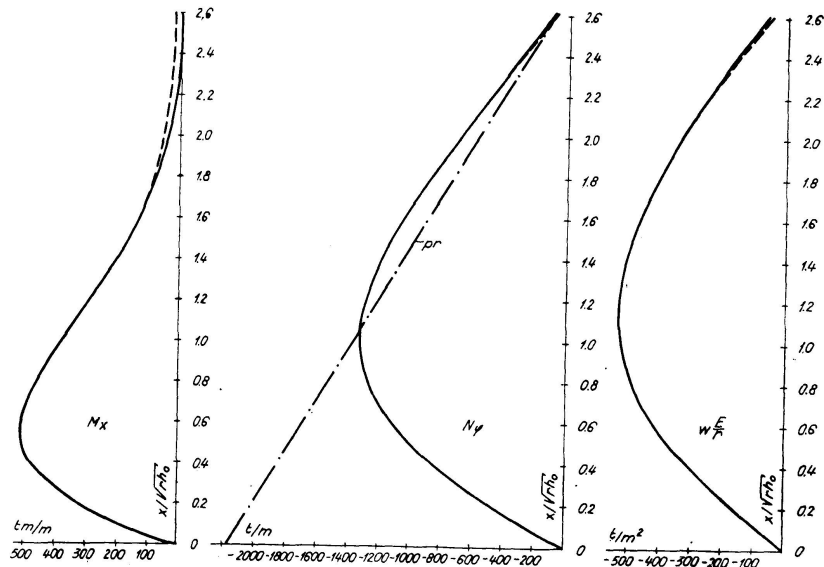


Fig. 7. Diagrams of M_x , N_φ and w in the Case of Axial Symmetry.
 — Total. ---- Without Edge Disturbances from the Upper Edge.

The magnitude at the upper edge of the edge disturbances from the lower edge are found from Tables 12, 14 and 16 for

$$\frac{x}{\sqrt{r h_0}} = \frac{34.7}{\sqrt{58.8 \cdot 3.0}} = 2.61,$$

$$M_x = -0.005 \cdot 2260 = -11 \text{ t},$$

$$Q_x = -0.002 \cdot 170 \approx 0 \text{ t},$$

$$N_\varphi = -\frac{1}{3.0} \cdot 0.04 \cdot 2260 = -30 \text{ t/m}.$$

The additional quantities are the particular integral quantities and the edge disturbances from the upper edge, determined by the set of edge quantities, M'_0 and Q'_0 . The resulting bending moment at the edge disappears, hence

$$M'_0 + 37 - 11 = 0, \quad M'_0 = -26 \text{ t}.$$

Q'_0 is determined by the condition

$$w_{\text{vault}} = w_{\text{ring}}.$$

In the vault

$$N_\varphi = \frac{1}{h_0} (a_{31} M'_0 + a_{32} \sqrt{r h_0} Q'_0) - 90 - 30.$$

$$\text{For } \alpha \sqrt{\frac{r}{h_0}} = 0.036 \sqrt{\frac{58.8}{1.75}} = 0.209.$$

Tables 5 and 6 give

$$a_{31} = 2.80 \quad a_{32} = 2.22.$$

Hence

$$N_\varphi = -162 + 12.9 Q'_0.$$

The displacements are equal when

$$-\frac{Q'_0 r}{A} = \frac{1}{h_0} (-162 + 12.9 Q'_0),$$

which gives

$$Q'_0 \approx 1 \text{ t/m}.$$

This shear force is so small that it may be neglected in actual design.

The particular integrals and the edge disturbances from both edges being known, the remaining work will be to compute forces and displacements by aid of the tables. The resulting values of M_x , N_φ and w are plotted in Fig. 7.

In the actual arch dam the radial displacement along the valley sides is prevented. To complete the analysis above one must find the additional stresses necessary to force the displacement shown in Fig. 7 back to zero along the valley sides. TÖLKE [4] carries this correction through by imagining the vault divided in several separate arches without any mutual connection

(«dritte Näherungsstufe»). One may improve this rather rough approximation by taking into account the tangential restraining force acting on the arches. For a complete investigation of the additional stresses mentioned, however, the shell theory must be used. In the case of irregular valley sides the analysis may be carried through by transforming the differential equations of the shell to difference equations.

Analyses of the additional stresses show that they have the character of damped edge disturbances originating from the valley sides. Thus the axially symmetrical state of stress calculated above will prevail in the central part of the dam.

Notations

r	shell radius
h	shell thickness
$c = \sqrt[4]{3(1-\nu^2)r^2/h^2}$	nondimensional parameter
h_0	shell thickness at the edge
α	rate of change of shell thickness
$\beta = \alpha\sqrt{r/h_0}$	nondimensional parameter
$\epsilon = \beta/\sqrt[4]{3(1-\nu^2)}$	nondimensional parameter
x	coordinate measured in the direction of the axis
$\xi = x/\sqrt{r h_0}$	nondimensional coordinate
$\eta = 2\sqrt[4]{12(1-\nu^2)}\sqrt{1+\beta\xi/\beta}$	nondimensional coordinate
x_0	distance from point of intersection of wall faces to shell edge
M_x	bending moment
M_{xp}	bending moment originating from the particular integral
M_0	bending moment at the edge
Q_x	shear force
Q_0	shear force at the edge
N_φ	circumferential force, positive when tensile
$N_{\varphi p}$	circumferential force in the membrane state of stress
$N_{\varphi 0}$	circumferential force at the edge
w	normal displacement, positive when outwards
E	modulus of elasticity
ν	Poisson's ratio
$D = Eh^3/12(1-\nu^2)$	flexural rigidity
$C_1 - C_4$	constants of integration
a_{ik}	nondimensional coefficients

Acknowledgement

I wish to express my gratitude to the Mathematics Group of the Norwegian Defence Research Establishment for programming and carrying out the computations of this paper, and to The Technical University of Norway Fund for bearing the computing expenses.

References

1. TIMOSHENKO, S. and WOINOWSKY-KRIEGER, S.: Theory of Plates and Shells. Sec. ed. McGraw-Hill, New York, Toronto, London 1959.
2. FLÜGGE, W.: Statik und Dynamik der Schalen. Zweite Auflage, Springer-Verlag Berlin/Göttingen/Heidelberg 1957.
3. FAVRE, H.: Sur une méthode de calcul des coques cylindriques d'épaisseur linéairement variable. IX^e Congrès International de Mécanique appliquée, Tome VI, p. 297, Bruxelles 1957.
4. LUDIN, A.: Wasserkraftanlagen. Zweite Hälfte. Erster Teil von Friedrich Tölke. Springer, Berlin 1938.

Summary

The paper presents tables for the analysis of circular cylindrical shells with axially symmetrical loads and a thickness which varies linearly in the axial direction. The tables give the internal forces and displacements of the shell expressed by the edge forces M_0 and Q_0 . The mathematical basis for the tables is the well known solution with Kelvin functions.

In a numerical example an approximate analysis of a cylindrical arch dam, approximated by a complete cylinder, is shown.

Résumé

L'auteur présente des tables permettant de calculer les voiles cylindriques de révolution qui sont chargés symétriquement par rapport à leur axe et dont l'épaisseur varie linéairement le long des génératrices. Ces tables donnent les sollicitations et les déformations du voile en fonction des efforts M_0 et Q_0 appliqués à son extrémité. Les valeurs contenues dans les tables ont été calculées à l'aide de la solution bien connue qui utilise des fonctions de Kelvin.

Dans une application numérique, l'auteur expose le calcul approché d'un barrage-voûte cylindrique, assimilé approximativement à un cylindre fermé.

Zusammenfassung

Es werden Tabellen vorgelegt zur Untersuchung kreiszylindrischer Schalen bei symmetrisch zur Zylinderachse angeordneter Belastung und linear veränderlicher Stärke in Richtung der Achse. Die Tabellen geben die Schnittkräfte und Durchbiegungen in Funktion der Randkräfte M_0 und Q_0 . Mathematisch beruhen sie auf der wohlbekannten Auflösungsmethode mit Hilfe von Kelvinfunktionen.

Als numerisches Beispiel wird eine Näherungsberechnung einer zylindrischen Bogenstaumauer angegeben, in welcher die Mauer durch einen geschlossenen Zylinder ersetzt wird.