

**Zeitschrift:** IABSE publications = Mémoires AIPC = IVBH Abhandlungen  
**Band:** 21 (1961)  
  
**Artikel:** Zur numerischen Lösung von nichtlinearen Differentialgleichungen zweiter Ordnung  
**Autor:** Stüssi, Fritz  
**DOI:** <https://doi.org/10.5169/seals-18258>

### **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. [Siehe Rechtliche Hinweise.](#)

### **Conditions d'utilisation**

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. [Voir Informations légales.](#)

### **Terms of use**

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. [See Legal notice.](#)

**Download PDF:** 17.05.2025

**ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>**

# **Zur numerischen Lösung von nichtlinearen Differentialgleichungen zweiter Ordnung**

*On the Numerical Solution of Non-Linear Second Order Differential Equations*

*Sur la solution numérique des équations différentielles non-linéaires du second ordre*

FRITZ STÜSSI

Prof. Dr., Präsident der IVBH, ETH, Zürich

## **1. Grundgleichungen**

Nachstehend soll ein schon vor längerer Zeit vorgeschlagenes<sup>1)</sup> und seither weiter ausgebaut<sup>2)</sup> Verfahren zur numerischen Lösung von Differentialgleichungen zweiter Ordnung auf die Lösung nichtlinearer Differentialgleichungen erweitert werden.

Der Lösungsweg beruht darauf, daß die zu lösende Differentialgleichung in ein Gleichungssystem umgesetzt wird, das nur noch unbekannte Werte  $y$  enthält, während die Ableitungen  $y'$  und  $y''$  nicht mehr vorkommen. Der wesentliche Schritt besteht in der Elimination der zweiten Ableitung  $y''$ , wozu uns die Seilpolygongleichung

$$\Delta x K_m(y'') = y_{m-1} - 2y_m + y_{m+1} \quad (1)$$

das Hilfsmittel liefert. Dabei bedeutet  $K_m(y'')$  die Knotenlast der «Belastung»  $y''$  im Teilpunkt  $m$  und  $\Delta x$  die hier konstant gewählte Intervallgröße der unabhängigen Veränderlichen  $x$ . Ist nun die vollständige nichtlineare Differentialgleichung zweiter Ordnung

$$y'' + b y' + c f(y) - F(x) = 0 \quad (2)$$

zu lösen, so setzen wir sie um in  $\Delta x$ -fache Knotenlasten und ersetzen den

---

<sup>1)</sup> F. STÜSSI: Die Stabilität des auf Biegung beanspruchten Trägers. Abh. IVBH, Band 3, 1935.

<sup>2)</sup> F. STÜSSI: Entwurf und Berechnung von Stahlbauten, 1. Band: Grundlagen des Stahlbaues. Springer, Berlin/Göttingen/Heidelberg 1958.

von  $y''$  herrührenden Beitrag nach Gleichung (1):

$$y_{m-1} - 2y_m + y_{m+1} + \Delta x K_m(b y') + \Delta x K_m[c f(y)] - \Delta x K_m[F(x)] = 0. \quad (3)$$

Für stetige Funktionen  $p$  läßt sich die Knotenlast mit guter Genauigkeit berechnen,

$$\Delta x K_m(p) = \frac{\Delta x^2}{12} (p_{m-1} + 10 p_m + p_{m+1}); \quad (4)$$

damit wird mit der Abkürzung

$$\gamma = c \frac{\Delta x^2}{12},$$

$$\Delta x K_m[c f(y)] = \gamma_{m-1} f(y_{m-1}) + 10 \gamma_m f(y_m) + \gamma_{m+1} f(y_{m+1}).$$

Da der Verlauf der Störungsfunktion  $F(x)$  gegeben ist, können die entsprechenden Knotenlasten  $K_m(F)$  immer mit den bekannten Mitteln der elementaren Baustatik berechnet werden.

Eine gewisse Schwierigkeit bietet die genaue Bestimmung der Knotenlast  $K_m(b y')$ ; da es sich bei diesem Glied normalerweise um einen kleinen Nebeneinfluß handelt, ist es zulässig, diese Knotenlast mit etwas gröberer Annäherung zu berechnen. Nehmen wir deshalb an, die gesuchte Funktion  $y$  verlaufe im Bereich von  $m-1$  bis  $m+1$  parabelförmig, so ist nach Fig. 1

$$y'_{m-1} \Delta x = \frac{1}{2} (-3 y_{m-1} + 4 y_m - y_{m+1}),$$

$$y'_m \Delta x = \frac{1}{2} (-y_{m-1} + y_{m+1}),$$

$$y'_{m+1} \Delta x = \frac{1}{2} (y_{m-1} - 4 y_m + 3 y_{m+1});$$

nehmen wir noch, zur Vereinfachung der Rechnung, den Koeffizienten  $b$  mit seinem Mittelwert als konstant über das Doppelintervall von  $m-1$  bis  $m+1$  an, so erhalten wir mit der Abkürzung

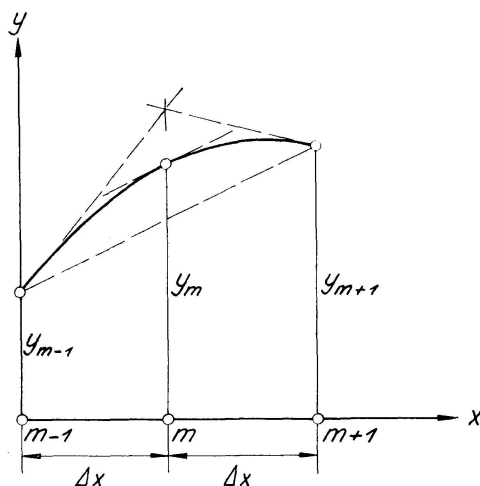


Fig. 1.

$$\beta = \frac{b \Delta x}{2}$$

die  $\Delta x$ -fache Knotenlast zu

$$\Delta x K_m(b y') = \beta_m (-y_{m-1} + y_{m+1}).$$

Setzen wir diese Werte der Knotenlasten in Gleichung (3) ein, so ergibt sich die *Grundgleichung* der gesuchten numerischen Lösung, in Form einer Rekursionsformel geschrieben, zu

$$\frac{y_{m+1}(1 + \beta_m) + \gamma_{m+1} f(y_{m+1}) = \Delta x K_m(F) + 2 y_m - 10 \gamma_m f(y_m)}{-y_{m-1}(1 - \beta_m) - \gamma_{m-1} f(y_{m-1})}. \quad (5)$$

Wenn somit zwei aufeinanderfolgende Werte  $y_m$  und  $y_{m-1}$  und damit auch die zugehörigen Werte  $f(y)$  bekannt sind, so kann aus Gleichung (5) der nächste Wert  $y_{m+1}$  durch Schätzung und Interpolation bestimmt werden.

Bei Anfangswertproblemen sind die ersten beiden Werte  $y_A$  und  $y_1$  aus den beiden vorgeschriebenen Anfangsbedingungen zu bestimmen. In der Regel sind  $y_A$  und  $y'_A$  gegeben; damit kann für  $y_1$  (in Analogie zum Vorgehen bei der Lösung der linearen Differentialgleichung<sup>2)</sup>) die Bestimmungsgleichung

$$y_1 \left(1 + \frac{2\beta}{3}\right) + 2 \gamma_1 f(y_1) = \Delta x K_A(F) + y_A \left(1 + \frac{2\beta}{3}\right) - 4 \gamma_A f(y_A) + y'_A \Delta x \left(1 - \frac{\beta}{3}\right) \quad (6a)$$

aufgestellt werden.

Die Gleichung ist etwas weniger genau als die Grundgleichung (5), weil wir hier mit Rücksicht auf eine einfache Formulierung linearen Verlauf der Unbekannten  $y'$  im ersten Feld vorausgesetzt haben; dieser Nachteil kann leicht durch Unterteilung des ersten Feldes kompensiert werden.

Für den Sonderfall  $y'_A = 0$  ist eine genauere Erfassung der Knotenlast  $K_A[cf(y)]$  möglich, die auf die Gleichung

$$y_1 \left(1 + \frac{2\beta}{3}\right) + \gamma_1 f(y_1) = \Delta x K_A(F) + y_A \left(1 + \frac{2\beta}{3}\right) - 5 \gamma_A f(y_A) \quad (6b)$$

führt.

Bei Randwertproblemen sind durch die beiden Randbedingungen die beiden Werte  $y_A$  und  $y_B$  an den beiden Enden des Integrationsbereiches bestimmt. Wir kennen somit die beiden aufeinanderfolgenden Werte  $y_A$  und  $y_1$  nicht, die uns die Anwendung der Rekursionsgleichung (5) erlauben würden. Wir sind deshalb hier auf den Weg der wiederholten Schätzung und Interpolation angewiesen. Sind zum Beispiel  $y_A$  und  $y_B$  gegeben, so schätzen wir  $y_1$  und verbessern diese Schätzung solange, bis auch die zweite Randbedingung erfüllt ist. Gerade hier ist die ausgezeichnete numerische Genauigkeit des Verfahrens wertvoll, weil sie uns die Lösung mit großen Intervallen  $\Delta x$  oder also mit einer kleinen Zahl von Bestimmungsgleichungen erlaubt.

## 2. Zahlenbeispiel

Wir untersuchen, als einfaches Beispiel eines Anfangswertproblems, die Schwingungen eines Pendels mit großem Ausschlag (Fig. 2) mit der Differentialgleichung

$$\frac{d^2 \varphi}{dt^2} + \frac{g}{l} \sin \varphi = \ddot{\varphi} + \frac{g}{l} \sin \varphi = 0$$

und den Anfangsbedingungen

$$\varphi_A = \varphi_0, \quad \left( \frac{d\varphi}{dt} \right)_A = \dot{\varphi}_A = 0.$$

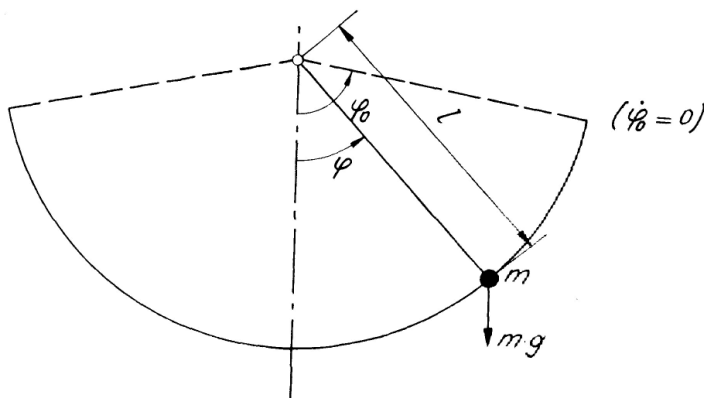


Fig. 2.

Dabei bedeutet  $g$  die Erdbeschleunigung. Als Kriterium für die Genauigkeit der numerischen Lösung sei die Schwingungsdauer  $T$  beigezogen, deren genauer Wert

$$T = 4K\left(\frac{\varphi_0}{2}\right)\sqrt{\frac{l}{g}}$$

beträgt;  $K$  ist das vollständige elliptische Integral erster Art zum Winkel  $\varphi_0/2$ , wie es in mathematischen Tabellenwerken, z. B. Hütte, Jahnke und Emde oder Hayashi gefunden werden kann.

Eine erste Rechnung sei durchgeführt für

$$\varphi_0 = \frac{\pi}{2} = 1,570\,796, \quad \sin \varphi_0 = 1,000$$

und für 
$$\gamma = \frac{g}{l} \frac{\Delta t^2}{12} = 0,04.$$

Aus der Anfangsbedingung (6b) (mit  $\beta = 0$ ,  $F = 0$ ) ergibt sich

$$\varphi_1 + \gamma \sin \varphi_1 = 1,570\,796 - 5 \cdot 0,04 \cdot 1,000 = 1,370\,796.$$

Es ist nun leicht abzuschätzen, daß  $\varphi_1$  zwischen  $\varphi = 1,34$  und  $\varphi = 1,33$  liegen muß; aus den beiden Werten

$$\varphi_1 + \gamma \sin \varphi_1 = 1,34 + 0,04 \cdot 0,97348 = 1,378939$$

und

$$\varphi_1 + \gamma \sin \varphi_1 = 1,33 + 0,04 \cdot 0,97115 = 1,368846$$

mit den Differenzen

$$\Delta_1 = 1,378\,939 - 1,370\,796 = 0,008\,143,$$

$$\Delta_2 = 1,370\,796 - 1,368\,846 = 0,001\,950$$

bzw. mit den Verteilzahlen

$$\mu_1 = \frac{\Delta_2}{\Delta_1 + \Delta_2} = 0,193\,20, \quad \mu_2 = \frac{\Delta_1}{\Delta_1 + \Delta_2} = 0,806\,80$$

folgt durch lineare Interpolation

$$\varphi_1 = 1,331\,932, \quad \sin \varphi_1 = 0,971\,60.$$

Damit kann mit Gleichung (5) der Wert von

$$\varphi_2 + \gamma \sin \varphi_2 = 0,664\,428$$

und daraus wieder  $\varphi_2$  gefunden werden. Der Rechnungsgang ist in der folgenden Tabelle 1 für die ersten 9 Punkte vollständig durchgeführt und der Verlauf von  $\varphi$  ist in Fig. 3 aufgetragen.

Eine Rechenkontrolle ist nun sehr einfach dadurch möglich, daß wir zu den «Belastungen»  $\sin \varphi$  ein Seilpolygon mit der Feldweite  $\Delta x$ ,

$$\Delta x = \sqrt{12\gamma},$$

berechnen. Dabei zeigt sich, daß Aufrundungsfehler wohl die letzte Dezimalstelle beeinflussen können, sich aber in der vorletzten Stelle um höchstens eine Einheit auswirken.

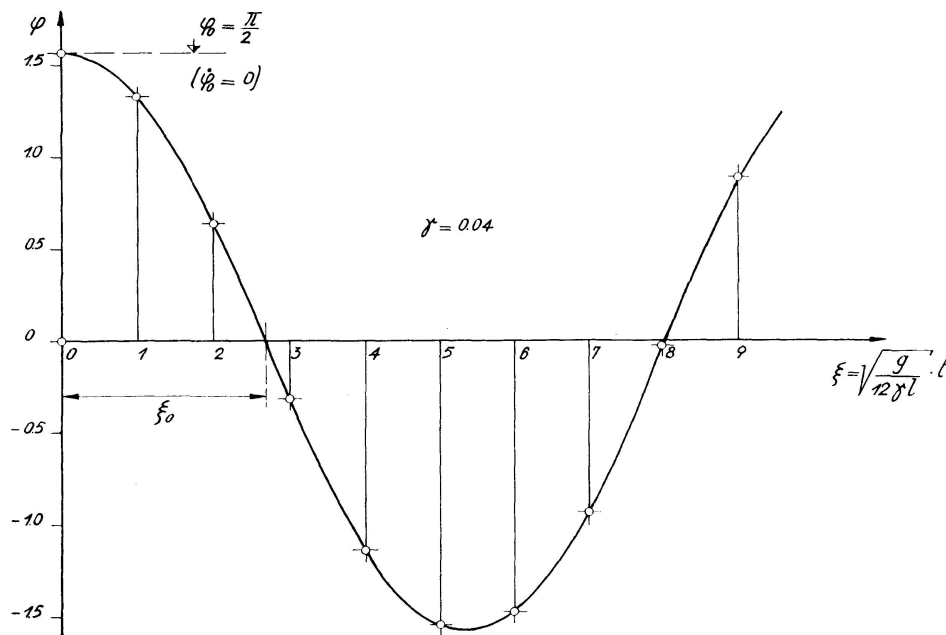


Fig. 3.

Tabelle 1.  $\varphi_0 = \pi/2$ ,  $\gamma = 0,04$ 

| Pkt. | $\varphi + \gamma \sin \varphi$ | $\varphi$      | $\sin \varphi$       | $\varphi + \gamma \sin \varphi$ | $\Delta$                         | $\mu$              | $\varphi$ | $\sin \varphi$ |
|------|---------------------------------|----------------|----------------------|---------------------------------|----------------------------------|--------------------|-----------|----------------|
| 0    |                                 |                |                      |                                 |                                  |                    | 1,570796  | 1,00000        |
| 1    | 1,370796                        | 1,34<br>1,33   | 0,97348<br>0,97115   | 1,378939<br>1,368846            | 0,008143<br>0,001950<br>0,010093 | 0,19320<br>0,80680 | 1,331932  | 0,97160        |
| 2    | 0,664428                        | 0,65<br>0,64   | 0,60519<br>0,59720   | 0,674208<br>0,663888            | 0,009780<br>0,000540<br>0,010320 | 0,05233<br>0,94767 | 0,640523  | 0,59762        |
| 3    | -0,328798                       | -0,32<br>-0,31 | -0,31457<br>-0,30506 | -0,332583<br>-0,322202          | 0,003785<br>0,006596<br>0,010381 | 0,63539<br>0,36461 | -0,316354 | -0,31110       |
| 4    | -1,172696                       | -1,14<br>-1,13 | -0,90863<br>-0,90441 | -1,176345<br>-1,166176          | 0,003649<br>0,006520<br>0,010169 | 0,64116<br>0,35884 | -1,136412 | -0,90712       |
| 5    | -1,581178                       | -1,55<br>-1,54 | -0,99978<br>-0,99953 | -1,589991<br>-1,579981          | 0,008813<br>0,001197<br>0,010010 | 0,11958<br>0,88042 | -1,541196 | -0,99956       |
| 6    | -1,509871                       | -1,48<br>-1,47 | -0,99588<br>-0,99492 | -1,519835<br>-1,509797          | 0,009964<br>0,000074<br>0,010038 | 0,00737<br>0,99263 | -1,470074 | -0,99493       |
| 7    | -0,960998                       | -0,93<br>-0,92 | -0,80162<br>-0,79560 | -0,962065<br>-0,951824          | 0,001067<br>0,009174<br>0,010241 | 0,89581<br>0,10419 | -0,928958 | -0,80099       |
| 8    | -0,027649                       | -0,03<br>-0,02 | -0,03000<br>-0,02000 | -0,031200<br>-0,020800          | 0,003551<br>0,006849<br>0,010400 | 0,65856<br>0,34144 | -0,026586 | -0,02659       |
| 9    | 0,918462                        | 0,89<br>0,88   | 0,77707<br>0,77074   | 0,921083<br>0,910830            | 0,002621<br>0,007632<br>0,010253 | 0,74437<br>0,25563 | 0,887444  | 0,77545        |

Der erste Schnittpunkt der  $\varphi$ -Kurve mit der Abszissenachse zwischen den Punkten 2 und 3 liefert uns mit

$$x_0 = \xi_0 \Delta x = \xi_0 \Delta t \sqrt{\frac{g}{l}}$$

den Wert der Schwingungsdauer

$$T = 4 x_0 \sqrt{\frac{l}{g}}$$

oder es muß

$$x_0 = \xi_0 \Delta x = K(\varphi_0/2)$$

sein. Die lineare Interpolation zwischen den Punkten 2 und 3 liefert

$$\xi_0 = 2,669\,39, \quad x_0 = \xi_0 \sqrt{0,48} = 1,849\,41$$

mit einem Fehler von 0,306 % gegenüber dem genauen Wert von  $K(45^\circ) = 1,8540747$ . Wenn wir dagegen durch die Punkte 1, 2, 3 und 4 eine kubische Parabel legen, so erhalten wir für die Abszisse des Schnittpunktes

$$\xi_0 = 2,674\,093, \quad x_0 = 1,852\,665$$

mit einem Fehler von noch 0,076 % gegenüber dem genauen Wert. Für Berechnungen der normalen Konstruktionspraxis dürfte die damit erreichte Genauigkeit wohl stets reichlich genügen. Da es uns aber hier darauf ankommt, die Zuverlässigkeit der in Tabelle 1 durchgeführten Berechnung zu prüfen, muß die Interpolation verfeinert werden. Wir können dies dadurch tun, daß wir im Bereich zwischen den Punkten 2 und 3 die  $\varphi$ -Kurve als Seilpolygon zu den (zunächst geschätzten) Belastungen  $\sin \varphi$  berechnen; das Verfahren konvergiert sehr gut.

In Tabelle 2 ist der dritte und letzte Rechnungsgang einer solchen Berechnung wiedergegeben.

$$\text{Tabelle 2. } \bar{\gamma} = \frac{\Delta x^2}{12} = 0,2^2 \cdot 0,04 = 0,0016$$

| Pkt. | $\varphi$ | $\sin \varphi$ | $K$     | $Q$     | $\Delta \varphi$ | $\varphi_s$ | $\varphi$ |
|------|-----------|----------------|---------|---------|------------------|-------------|-----------|
| 2    | 0,640523  | 0,59762        |         |         | 0                | 0,640523    | 0,640523  |
| 2,2  | 0,459075  | 0,44312        | 5,2947  | 6,2041  | 0,009927         | 0,449148    | 0,459075  |
| 2,4  | 0,269154  | 0,26591        | 3,1763  | 0,9094  | 0,011382         | 0,257772    | 0,269154  |
| 2,6  | 0,074152  | 0,07408        | 0,8848  | -2,2669 | 0,007755         | 0,066397    | 0,074152  |
| 2,8  | -0,122267 | -0,12196       | -1,4566 | -3,1516 | 0,002712         | -0,124979   | -0,122267 |
| 3    | -0,316354 | -0,31110       |         | -1,6950 | 0                | -0,316354   | -0,316354 |

Eine lineare Interpolation zwischen den Punkten 2,6 und 2,8 liefert uns

$$\xi_0 = 2,675\,504, \quad x_0 = 1,853\,643.$$

Auch diese Interpolation befriedigt noch nicht vollständig. Eine kubische Interpolation oder eine weitere Unterteilung liefern den «richtigen» Schnittpunkt mit

$$\xi_0 = 2,675\,466_3, \quad x_0 = 1,853\,617$$

mit einem Fehler von 0,025 % gegenüber dem genauen Wert von  $K(45^\circ)$ .

In Tabelle 3 ist das Ergebnis der Berechnung mit halber Feldteilung  $\gamma = 0,01$  sowie für  $\varphi_0 = 2\pi/3$  und  $\gamma = 0,04$  bzw.  $\gamma = 0,01$  zusammengestellt und die Schwingungsdauer bzw.  $x_0$  mit den genauen Werten von  $K$  verglichen.

Tabelle 3. Werte  $\varphi$ 

| Punkt    | $\varphi_0 = \alpha/2$ |                 | $\varphi_0 = 2\alpha/3$ |                 |
|----------|------------------------|-----------------|-------------------------|-----------------|
|          | $\gamma = 0,01$        | $\gamma = 0,04$ | $\gamma = 0,01$         | $\gamma = 0,04$ |
| 0        | 1,570796<br>1,510814   | 1,570796        | 2,094395<br>2,042185    | 2,094395        |
| 1        | 1,331297<br>1,036050   | 1,331932        | 1,882704<br>1,609147    | 1,883126        |
| 2        | 0,639084<br>0,172155   | 0,640523        | 1,216767<br>0,714048    | 1,219022        |
| 3        | -0,314773              | -0,316354       | 0,135114<br>-0,459404   | 0,135930        |
| 4        |                        |                 | -1,002499               | -1,005146       |
| $x_0$    | 1,854063               | 1,853617        | 2,156527                | 2,156790        |
| $K$      | 1,8540747              |                 | 2,1565156               |                 |
| $\Delta$ | 0,0006 %               | 0,025 %         | 0,0005 %                | 0,013 %         |

Damit dürfte die Leistungsfähigkeit und Zuverlässigkeit des vorgeschlagenen numerischen Lösungsverfahrens nachgewiesen sein. Es ist doch erstaunlich, daß schon recht komplizierte mathematische Funktionen, wie in unserem Beispiel das vollständige elliptische Integral erster Art, mit Hilfe der Seilpolygongleichung durch elementare Rechenoperationen in mehr als genügender Genauigkeit bestimmt werden können.

Wichtig scheint, daß auch nichtlineare Differentialgleichungen auf den gleichen Grundlagen numerisch zuverlässig gelöst werden können wie lineare Gleichungen, wenn sich auch in der Art der Auflösung des Systems der Differentialgleichungen je nach der zu lösenden Differentialgleichung gewisse Verschiedenheiten ergeben können. Dabei ist wertvoll, daß eine genügend genaue Lösung meist mit einer kleinen Zahl von Bestimmungsgleichungen erreicht werden kann.

### **Zusammenfassung**

Ein früherer Vorschlag zur numerischen Lösung von linearen inhomogenen Differentialgleichungen zweiter Ordnung mit Hilfe der Seilpolygongleichung wird auf die Lösung von nichtlinearen Differentialgleichungen erweitert. Am Beispiel der Schwingungen eines Pendels mit großem Ausschlag wird die Leistungsfähigkeit des Verfahrens nachgewiesen.

### **Summary**

This paper deals with the numerical solution of non-linear, second-order differential equations. The author makes use of the funicular polygon method which has previously enabled him to solve numerically linear and non-homogeneous second order differential equations. The efficiency of the procedure is demonstrated by an example of its application to the oscillations of a pendulum of considerable amplitude.

### **Résumé**

Cette contribution traite de la résolution numérique d'équations différentielles non-linéaires du second ordre. L'auteur a recours à la méthode du polygone funiculaire, méthode qui lui avait déjà permis de résoudre numériquement les équations différentielles linéaires et inhomogènes du second ordre. Une application — les oscillations d'un pendule à grande amplitude — montre l'efficacité du procédé.

Leere Seite  
Blank page  
Page vide