

**Zeitschrift:** IABSE publications = Mémoires AIPC = IVBH Abhandlungen  
**Band:** 26 (1966)

**Artikel:** Über die Festigkeit von gedruckten Holzstäben  
**Autor:** Ylinen, Arvo  
**DOI:** <https://doi.org/10.5169/seals-20900>

### **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. [Siehe Rechtliche Hinweise.](#)

### **Conditions d'utilisation**

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. [Voir Informations légales.](#)

### **Terms of use**

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. [See Legal notice.](#)

**Download PDF:** 15.05.2025

**ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>**

# **Über die Festigkeit von gedrückten Holzstäben**

*The Buckling Strength of Compressed Wooden Columns*

*Sur la résistance des barres comprimées en bois*

ARVO YLINEN

Prof., Dr., Technische Hochschule, Finnland

## **1. Über die Erweiterung der Bernoullischen Biegungstheorie auf den unelastischen Bereich**

Wir betrachten einen geraden Holzstab, auf den eine exzentrisch angreifende Längskraft  $F$  wirkt. Durch den Schwerpunkt  $S$  des Stabquerschnittes denken wir uns ein rechtwinkliges Achsenkreuz  $y, z$  gelegt in der Weise, daß die Achsen mit den Hauptträgheitsachsen des Querschnittes zusammenfallen. Die Querschnittsfläche des Stabes sei symmetrisch in bezug auf die  $y$ -Achse. Der Angriffspunkt der Kraft  $F$  liege auf dieser Symmetrieachse in der Entfernung  $u$  vom Schwerpunkt des Querschnittes. Die Symmetrieachse liegt dann in der Biegungsebene.

Die der Dehnung  $\epsilon$  entsprechende Spannung  $\sigma$  sei durch eine stetige und eindeutige Formänderungsfunktion

$$\sigma = \sigma(\epsilon) \quad (1)$$

bestimmt. Es wird somit angenommen, daß einem bestimmten Wert der Dehnung ein einziger Wert der Spannung entspricht. Diese Bedingung erfüllen die Materialien im allgemeinen nicht, sondern einem bestimmten Wert der Dehnung entsprechen verschiedene Werte der Spannung je nachdem, ob es sich um eine zunehmende oder eine abnehmende Belastung handelt. Von der Wirkung dieser bleibenden Formänderungen soll hier abgesehen werden. Es wird somit angenommen, daß das Holz dem Formänderungsgesetz (1) uneingeschränkt folgt.

Unter der BERNOULLISCHEN [1] Annahme, daß die Ebenen, die vor der Formänderung senkrecht zur Achse des Stabes liegen, auch nach der Formänderung eben bleiben, kann man für die Krümmung der elastischen Achse des Stabes folgende Reihenentwicklung ableiten [2]

$$\frac{1}{\rho} = -\frac{1}{1+\epsilon_s} \left[ \frac{M}{I \sigma'(\gamma)} + c_2 \left( \frac{M}{I \sigma'(\gamma)} \right)^2 + c_3 \left( \frac{M}{I \sigma'(\gamma)} \right)^3 + \dots \right], \quad (2)$$

wo

$$c_2 = -\frac{I_3 \sigma''(\gamma)}{2! I \sigma'(\gamma)},$$

$$c_3 = -\frac{I_4 \sigma'''(\gamma)}{3! I \sigma'(\gamma)} \left[ 1 - 3 \left( \frac{I_3^2}{I I_4} + \frac{I^2}{A I_4} \right) \frac{[\sigma''(\gamma)]^2}{\sigma'(\gamma) \sigma'''(\gamma)} \right],$$

.....

Hier bedeutet  $\rho$  den Krümmungsradius der elastischen Achse des Stabes,  $\epsilon_s$  die Dehnung im Schwerpunkt des Stabquerschnittes,  $M = Pu$  das Biegemoment,  $A$  die Querschnittsfläche,  $I$  das Trägheitsmoment des Querschnittes in bezug auf die  $z$ -Achse und  $I_3 = \int y^3 dA$ ,  $I_4 = \int y^4 dA \dots$  auf dieselbe Achse bezogene höhere Momente der Querschnittsfläche.  $\gamma$  ist die der mittleren Längsspannung  $\sigma_m = F/A$  entsprechende Dehnung, die durch die Formänderungsfunktion (1) als  $\sigma_m = \sigma(\gamma)$  bestimmt ist.  $\sigma'(\gamma), \sigma''(\gamma) \dots$  sind die Ableitungen von (1) nach  $\epsilon$ , wenn  $\epsilon = \gamma$ . Wir beschränken uns bei unserer Betrachtung auf die an der Druckstauchungsgrenze des Holzes oder unterhalb derselben vorhandenen Spannungen. Für Holz ist dann  $\epsilon_s$  höchstens 0,008. Wir finden, daß man  $\epsilon_s$  in (2), mit Eins verglichen, bei allen technischen Anwendungen ohne erheblichen Fehler weglassen kann.

Die Reihenentwicklung (2) stellt die BERNOULLISCHE Biegungstheorie insoweit verallgemeinert dar, daß sie sowohl unterhalb als oberhalb der Proportionalitätsgrenze  $\sigma_P$  gilt. Herrscht zwischen der Spannung und der Dehnung das HOOKESCHE Gesetz  $\sigma(\epsilon) = E \epsilon$ , so ist  $\sigma'(\epsilon) = \sigma'(\gamma) = E$  und die höheren Ableitungen  $\sigma''(\gamma) = \sigma'''(\gamma) = \dots = 0$ . Die Folge hiervon ist, daß die Koeffizienten  $c_2 = c_3 = \dots = 0$  und die Reihe (2) sich auf die BERNOULLISCHE Formel

$$\frac{1}{\rho} = -\frac{1}{1+\epsilon_s} \frac{M}{E I} \approx -\frac{M}{E I}$$

reduziert.

Wenn  $M \rightarrow 0$ , so erhält man aus (2) als Grenzwert für die Krümmung die von ENGESSER [3] gegebene Formel

$$\frac{1}{\rho} = -\frac{1}{1+\epsilon_s} \frac{M}{I \sigma'(\gamma)} \approx -\frac{M}{I \sigma'(\gamma)}. \quad (3)$$

Die Spannungsverteilung im Querschnitt ist durch folgende Reihenentwicklung bestimmt

$$\begin{aligned} \sigma = & \left[ \frac{F}{A} - \frac{1}{2F} \sigma''(\gamma) \left( \frac{M}{I \sigma'(\gamma)} \right)^2 - \frac{I_3}{6A} \sigma'''(\gamma) \left( 1 - 3 \frac{[\sigma''(\gamma)]^2}{\sigma'(\gamma) \sigma'''(\gamma)} \right) \left( \frac{M}{I \sigma'(\gamma)} \right)^3 + \dots \right] \\ & + y \left[ \sigma'(\gamma) \left( \frac{M}{I \sigma'(\gamma)} \right) - \frac{I_3}{2I} \sigma''(\gamma) \left( \frac{M}{I \sigma'(\gamma)} \right)^2 \right. \\ & \quad \left. - \frac{I_4}{6I} \sigma'''(\gamma) \left( 1 - 3 \frac{I_3^2}{I I_4} \frac{[\sigma''(\gamma)]^2}{\sigma'(\gamma) \sigma'''(\gamma)} \right) \left( \frac{M}{I \sigma'(\gamma)} \right)^3 + \dots \right] \\ & + y^2 \left[ \frac{1}{2} \sigma''(\gamma) \left( \frac{M}{I \sigma'(\gamma)} \right)^2 - \frac{I_3}{2I} \frac{[\sigma''(\gamma)]^2}{\sigma'(\gamma)} \left( \frac{M}{I \sigma'(\gamma)} \right)^3 + \dots \right] \\ & + y^3 \left[ \frac{1}{6} \sigma'''(\gamma) \left( \frac{M}{I \sigma'(\gamma)} \right)^3 + \dots \right] \\ & \dots \dots \dots \end{aligned}$$

Gilt zwischen der Spannung und der Dehnung das HOOKESche Gesetz  $\sigma(\epsilon) = E \epsilon$ , so sind die Ableitungen  $\sigma''(\gamma) = \sigma'''(\gamma) = \dots = 0$ . Von der Reihe (4) bleibt dann übrig

$$\sigma = \frac{F}{A} + \frac{M}{I}y, \quad (5)$$

was die bekannte Formel der Normalspannungen von NAVIER [4] darstellt.

## 2. Exzentrisch belasteter gerader Stab

Der ursprünglich gerade Stab von der Länge  $l$  stehe unter dem Einfluß einer an dem Hebelarm  $a$  angreifenden Längskraft  $F$  (Fig. 1). Wir nehmen an, daß die Angriffslinie der Kraft  $F$  und die Stabachse  $AB$  in derselben Ebene liegen. Der Stabquerschnitt sei symmetrisch in bezug auf die Haupt-

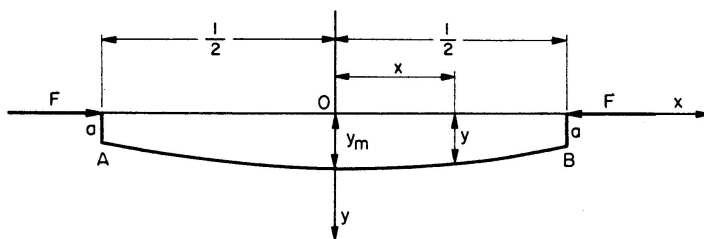


Fig. 1. Exzentrisch belasteter Stab.

trägheitsachse des größten Trägheitsmomentes und diese liege in der Biegeebene. Wir beziehen den Stab auf ein rechtwinkliges Achsenkreuz, dessen  $x$ -Achse mit der Wirkungslinie der Kraft zusammenfällt und dessen  $y$ -Achse ihre positive Richtung nach unten hat. Die Biegemomente werden in üblicher Weise als positiv betrachtet, wenn sie den Stab nach oben hohl krümmen.

Nach den Lehren der analytischen Geometrie gilt für die Krümmung der elastischen Linie des Stabes die Formel

$$\frac{1}{\rho} = \frac{y''}{(1 + y'^2)^{3/2}}. \quad (6)$$



Die Verbindung der Gleichungen (2) und (6) ergibt mit dem Biegemoment  $M = F y$

$$\frac{y''}{(1+y'^2)^{3/2}} = -\frac{1}{1+\epsilon_s} \left[ \frac{F y}{I \sigma'(\gamma)} + c_2 \left( \frac{F y}{I \sigma'(\gamma)} \right)^2 + c_3 \left( \frac{F y}{I \sigma'(\gamma)} \right)^3 + \dots \right]. \quad (7)$$

Diese Differentialgleichung der elastischen Linie des exzentrisch belasteten geraden Stabes gilt sowohl unterhalb als oberhalb der Proportionalitätsgrenze des Materials. Weil bei der Ableitung von (2) keine Annahme von der Unveränderlichkeit der Querschnitte gemacht wurde, gilt (7) auch für den Stab mit veränderlichem Querschnitt. Dann sind  $\gamma$ ,  $I$  und  $A$ ,  $I_3$ ,  $I_4 \dots$ , die in den Beiwerten  $c$  auftreten, als Funktionen von  $x$  zu betrachten.

Die Festigkeit eines exzentrisch belasteten geraden Holzstabes kann mit für die Praxis genügender Genauigkeit bestimmt werden, indem man auf der rechten Seite der Differentialgleichung (7) in den eckigen Klammern nur das erste Glied berücksichtigt. Diese Vereinfachung kann auf folgende Weise begründet werden: Wenn die Exzentrizität  $a$  klein ist, so bleibt auch die Durchbiegung  $y$  bei den gedrunenen Stäben klein und die Restsumme

$$S = c_2 \left( \frac{F y}{I \sigma'(\gamma)} \right)^2 + c_3 \left( \frac{F y}{I \sigma'(\gamma)} \right)^3 + \dots$$

in den eckigen Klammern kann, verglichen mit dem ersten Glied  $F y / I \sigma'(\gamma)$ , ohne erheblichen Fehler weggelassen werden. Bei den schlanken Stäben kann die Durchbiegung  $y$  dagegen ziemlich große Werte erhalten. Dann ist aber die mittlere Längsspannung  $\sigma_m = F/A < \sigma_P$  und  $\sigma''(\gamma) = \sigma'''(\gamma) = \dots = 0$ . Infolgedessen sind auch die Koeffizienten  $c_2 = c_3 = \dots = 0$  und  $S = 0$ . Bei großen Exzentrizitäten wird die mittlere Längsspannung sowohl bei gedrunenen als bei schlanken Stäben stark herabgesetzt und wenn  $F/A < \sigma_P$ , so sind wiederum  $\sigma''(\gamma) = \sigma'''(\gamma) = \dots = 0$  und  $S = 0$ . Wir sehen somit, daß die Summe  $S$ , verglichen mit dem ersten Glied  $F y / I \sigma'(\gamma)$ , in allen Fällen ohne erheblichen Fehler vernachlässigt werden darf. Diese Vereinfachung kann ihre weitere Berechtigung dadurch erhalten, daß die mit Hilfe der derart vereinfachten Differentialgleichung bestimmten Werte der Festigkeit in Übereinstimmung mit den Versuchsergebnissen stehen.

Wenn so kleine Durchbiegungen vorausgesetzt werden, daß  $y^2$  gegen die Einheit vernachlässigt werden darf und wenn der Kürze halber

$$\sigma'(\gamma) = \left( \frac{d\sigma}{d\epsilon} \right)_{\epsilon=\gamma} = E_t \quad (8)$$

bezeichnet wird, wo  $E_t$  den Tangentenmodul bedeutet, so erhält man mit  $\epsilon_s = 0$  aus (7)

$$y'' = -\frac{F}{E_t I} y$$

oder, wenn

$$\alpha^2 = \frac{F}{E_t I} \quad (9)$$

gesetzt wird,

$$y'' = -\alpha^2 y. \quad (10)$$

Diese vereinfachte Differentialgleichung unterscheidet sich von den üblichen, zur Bestimmung der elastischen Linie des exzentrisch belasteten geraden Stabes unterhalb der Proportionalitätsgrenze verwendeten Differentialgleichung nur dadurch, daß in (9) an Stelle des Elastizitätsmoduls  $E$  der Tangentenmodul (8) getreten ist. Dieselbe Differentialgleichung (10) hätte man auch dadurch erhalten können, daß man  $y''$  mit dem ENGESSERSchen Wert (3) der Stabkrümmung gleichsetzt. Die dadurch sich ergebende Differentialgleichung würde aber nur für unendlich kleine Stabausbiegungen gelten. Dagegen ist die Gültigkeit der formell gleichlautenden Differentialgleichung (10) durch das Vorhandensein der Reihenentwicklung (7) auf endliche Ausbiegungen, wie sie bei dem exzentrisch belasteten Stab vorkommen, erweitert.

Die allgemeine Lösung der Differentialgleichung (10) ist

$$y = A \sin \alpha x + B \cos \alpha x, \quad (11)$$

wo  $A$  und  $B$  die Integrationskonstanten sind. Letztere sind aus den Grenzbedingungen  $x = \pm l/2$ ,  $y = a$  zu bestimmen. Daraus folgt

$$A = 0 \quad \text{und} \quad B = \frac{a}{\cos \alpha \frac{l}{2}}.$$

Durch Einsetzen dieser Werte in (11) ergibt sich als Gleichung der elastischen Linie

$$y = \frac{a}{\cos \alpha \frac{l}{2}} \cos \alpha x. \quad (12)$$

Für  $x = 0$  erhält die Durchbiegung den größten Wert

$$y_m = \frac{a}{\cos \alpha \frac{l}{2}}. \quad (13)$$

Das größte Biegemoment ist

$$M = F y_m = \frac{F a}{\cos \alpha \frac{l}{2}}. \quad (14)$$

Wenn die größte Randspannung in dem Stab die Druckfestigkeit  $\sigma_D$  des Holzes erreicht, so wachsen die Ausbiegungen schneller als nach der Formel (13) und die größte Tragkraft wird danach bald erreicht. Für die Bestimmung der größten Randspannung benutzen wir an Stelle von (4) die einfache NAVIERsche Spannungsformel (5). Indem man in dieselbe den größten Wert des Biegemomentes (14) einsetzt, erhält man

$$\sigma = \frac{F}{A} + \frac{F a}{I \cos \alpha \frac{l}{2}} e,$$

wo  $e$  den Abstand der äußersten Faser von der  $z$ -Achse auf der Innenseite des gebogenen Stabes bedeutet. Es wird somit angenommen, daß die Tragfähig-

keit des Stabes nur von der Bruchgefahr am Biegedruckrand abhängt und daher durch Druckspannungen begrenzt ist. Wird in die obige Formel  $\sigma = \sigma_D$  und  $I = i^2 A$  eingesetzt — wobei  $i$  den Trägheitsradius des Querschnittes bedeutet — und außerdem (9) berücksichtigt, so erhält man durch Auflösung der Gleichung nach dem der kritischen Druckspannung  $\sigma_{kr} = F/A$  entsprechenden Schlankheitsgrad

$$\lambda = 2 \sqrt{\frac{E_t}{\sigma_{kr}}} \arccos \frac{\frac{a e}{i^2} \sigma_{kr}}{\sigma_D - \sigma_{kr}}.$$

Bezeichnet man als Exzentrizitätsmaß  $m$  den Quotienten aus der Exzentrizität  $a$  des Kraftangriffes durch die dem Hebelarm gegenüberliegende Kernweite  $k = W/A$ , wo  $W = I/e$  das Widerstandsmoment des Biegedruckrandes bedeutet, so ist

$$m = \frac{a}{k} = \frac{a e}{i^2} \quad (15)$$

und die obige Gleichung kann

$$\lambda = 2 \sqrt{\frac{E_t}{\sigma_{kr}}} \arccos \frac{m \sigma_{kr}}{\sigma_D - \sigma_{kr}} \quad (16)$$

geschrieben werden. Diese ist als unsere Hauptformel für die Bestimmung der Tragfähigkeit eines exzentrisch belasteten geraden Stabes zu betrachten. Die Formel gilt, solange  $\sigma_{kr} < \sigma_D$ .

Nach (16) ist die kritische Spannung  $\sigma_{kr}$  unabhängig von der jeweiligen Querschnittsform des Stabes. Dieses Ergebnis stimmt nicht mit der Erfahrung überein, denn die durch Versuche ermittelten kritischen Spannungen haben bei den verschiedenen Querschnittsformen für dasselbe Exzentrizitätsmaß  $m$  einen voneinander etwas abweichenden Wert. Um diesen Mangel in der Theorie zu beseitigen, müßte man auf der rechten Seite der Differentialgleichung (7) und in der Reihenentwicklung (4) mehr Glieder in Betracht ziehen, als im obigen geschah. Die hier entwickelte einfache Theorie kann dadurch ihre Berechtigung erhalten, daß die auf Grund derselben ermittelte kritische Spannung im allgemeinen unterhalb der tatsächlichen kritischen Spannung liegt, daß man also sicher geht, wenn man (16) verwendet.

Wenn die Exzentrizität  $a = 0$ , so geht (16) in die Knickspannungsformel von ENGESSER [3]

$$\sigma_{kr} = \frac{\pi^2 E_t}{\lambda^2} \quad (17)$$

über. Liegt ferner die Spannung unterhalb der Proportionalitätsgrenze  $\sigma_P$  des Materials, so tritt anstelle der Funktion (1) das HOOKEsche Gesetz  $\sigma(\epsilon) = E \epsilon$ . Hieraus folgt  $\sigma'(\epsilon) = \sigma'(\gamma) = E$  und (16) verwandelt sich in die EULERSche Knickspannungsformel

$$\sigma_{kr} = \frac{\pi^2 E}{\lambda^2}. \quad (18)$$

Wenn  $a \neq 0$  und  $E_t = E$ , so geht (16) in die Formel von FÖPPL [5] über

$$\lambda = 2 \sqrt{\frac{E}{\sigma_{kr}}} \arccos \frac{m \sigma_{kr}}{\sigma_D - \sigma_{kr}}. \quad (19)$$

Nach Formel (17) entspricht der Knickspannung  $\sigma_{kr}$  der Schlankheitsgrad

$$\lambda_0 = \pi \sqrt{\frac{E_t}{\sigma_{kr}}}. \quad (20)$$

Dividiert man (16) durch diese Gleichung, so ergibt sich als Verhältnis der Schlankheitsgrade eines exzentrisch und eines zentrisch gedrückten Stabes bei ein und derselben Spannung

$$\frac{\lambda}{\lambda_0} = \frac{2}{\pi} \arccos \frac{m \sigma_{kr}}{\sigma_D - \sigma_{kr}}. \quad (21)$$

Die Anwendung der Formel (16) setzt die Kenntnis von Tangentenmodul  $E_t$  aus. Da die Abhängigkeit zwischen der Spannung und der Drehung nicht theoretisch bekannt ist, können zur Feststellung der Formänderungsfunktion (1) nur empirische Formeln verwendet werden. Die gewählte Funktion muß genügend viele freie Beiwerte enthalten, durch deren geeignete Wahl die Werte der Funktion mit hinreichender Genauigkeit in Einklang mit den Versuchsergebnissen gebracht werden kann. Außerdem muß der Ausdruck des Tangentenmoduls  $E_t$  ihrer Form nach möglichst einfach und eine Funktion nur von der Spannung  $\sigma$  sein. Aus diesem Grunde empfiehlt es sich eine Annahme gerade in bezug auf den Ausdruck des Tangentenmoduls  $E_t = d\sigma/d\epsilon$  zu machen und zu zeigen, daß die durch Integration aus demselben abgeleitete Formänderungsfunktion mit den Versuchsergebnissen übereinstimmt.

Wir nehmen im folgenden an, daß im Bereich  $0 \leq \sigma \leq \sigma_D$

$$\frac{d\sigma}{d\epsilon} = E \frac{\sigma_D - \sigma}{\sigma_D - c \sigma} \quad (22)$$

ist [6]. Dieser Ausdruck enthält drei Beiwerte  $E$ ,  $\sigma_D$  und  $c$ , durch deren geeignete Wahl er in Übereinstimmung mit den Versuchsergebnissen gebracht werden kann. Von diesen Beiwerten sind der Elastizitätsmodul  $E$  und die Druckfestigkeit  $\sigma_D$  für jede Holzart bekannt.

Zur Bestimmung des Beiwertes  $c$  brauchen wir die Formänderungsfunktion (1) selbst. Dafür bilden wir aus (22) durch Trennung der Veränderlichen die Differentialgleichung

$$d\epsilon = \frac{1}{E} \left[ c + \frac{(1-c) \sigma_D}{\sigma_D - \sigma} \right] d\sigma.$$

Die Lösung dieser Differentialgleichung ist

$$\epsilon = \frac{1}{E} [c \sigma - (1-c) \sigma_D \ln (\sigma_D - \sigma) + C], \quad (23)$$

wo  $C$  die Integrationskonstante ist. Weil das Formänderungsdiagramm durch

den Koordinatenursprung geht, müssen die Werte  $\epsilon=0$ ,  $\sigma=0$  einander entsprechen. Aus dieser Bedingung folgt

$$C = (1-c)\sigma_D \ln \sigma_D.$$

Durch Einsetzung dieses Wertes in (23) ergibt sich als Gleichung der Formänderungsfunktion

$$\epsilon = \frac{1}{E} \left[ c\sigma - (1-c)\sigma_D \ln \left( 1 - \frac{\sigma}{\sigma_D} \right) \right]. \quad (24)$$

Mit  $c=1$  geht diese in das HOOKEsche Gesetz über.

Um eine allgemeine Auffassung über die Form der Formänderungsdiagramme zu gewinnen, die durch die Funktion (24) dargestellt werden, bringen wir sie in eine für die graphische Darstellung besser geeignete Form, indem wir sie mit dem Verhältnis  $E/\sigma_D$  multiplizieren, wobei wir finden

$$\frac{E\epsilon}{\sigma_D} = c \frac{\sigma}{\sigma_D} - (1-c) \ln \left( 1 - \frac{\sigma}{\sigma_D} \right). \quad (25)$$

Diese Form hat, mit (24) verglichen, den Vorzug, daß  $E\epsilon/\sigma_D$  nur eine Funktion des Verhältnisses  $\sigma/\sigma_D$  und des Beiwertes  $c$  ist. In (24) treten auf der rechten Seite die Variablen  $E$ ,  $\sigma$ ,  $\sigma_D$  und  $c$  auf.

Nach den Untersuchungen des Verfassers gilt für Kiefernholz  $c=0,8 \dots 0,875$  und für Fichtenholz  $c=0,93$ . Diese Werte scheinen von den Faktoren, die im allgemeinen auf die Festigkeit des Holzes einwirken, nämlich von dem Feuchtigkeitsgehalt und der Spätholzmenge, nur schwach abhängig zu sein. In Fig. 2 sind die entsprechenden Formänderungsdiagramme nach (25) in dimensionsloser Darstellung wiedergegeben.

Setzt man den Ausdruck des Tangentenmoduls aus (22) in (16) ein und berücksichtigt, daß  $\sigma=\sigma_{kr}$  ist, so erhält man

$$\lambda = 2 \sqrt{\frac{E}{\sigma_{kr}} \frac{\sigma_D - \sigma_{kr}}{\sigma_D - c\sigma_{kr}}} \arccos \frac{m\sigma_{kr}}{\sigma_D - \sigma_{kr}}. \quad (26)$$

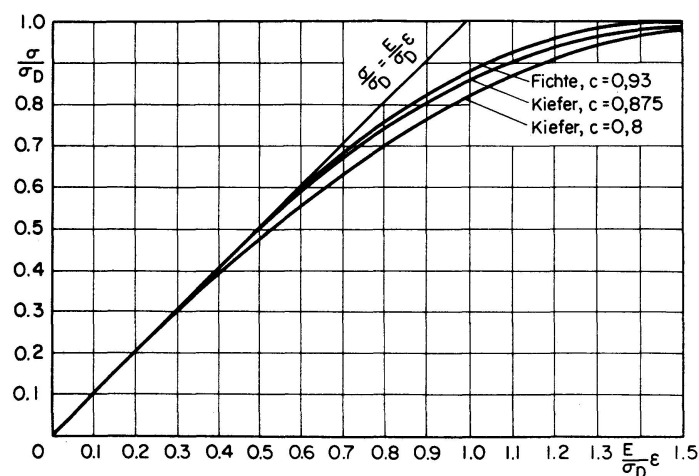


Fig. 2. Die Formänderungsdiagramme von Kiefern- und Fichtenholz nach Formel (25).

Diese ist als unsere Hauptformel für die praktische Berechnung der Tragfähigkeit eines exzentrisch belasteten geraden Stabes zu betrachten. Die Formel gilt in dem Bereich  $0 \leq \sigma_{kr} \leq \sigma_D$ .

Wenn man Knickbiegeversuche mit gewöhnlichem Holz ausführt und die kritische Spannung  $\sigma_{kr}$  in üblicher Weise als Funktion des Schlankheitsgrades  $\lambda$  darstellt, so zerstreuen sich die Versuchspunkte stark, weil die Druckfestigkeit und der Elastizitätsmodul des Holzes und infolgedessen auch die Knickbiegefestigkeit beträchtlich schwanken. Die hierauf beruhende Streuung der Versuchspunkte kann vermieden werden [7], indem man die Gleichung (26) auf beiden Seiten mit  $\frac{1}{\pi} \sqrt{\frac{\sigma_D}{E}}$  multipliziert und die auf diese Weise sich ergebende Gleichung

$$\frac{\lambda}{\pi} \sqrt{\frac{\sigma_D}{E}} = \frac{2}{\pi} \sqrt{\frac{\sigma_D}{\sigma_{kr}} \frac{1 - \frac{\sigma_{kr}}{\sigma_D}}{1 - c \frac{\sigma_{kr}}{\sigma_D}}} \arccos \frac{m \frac{\sigma_{kr}}{\sigma_D}}{1 - \frac{\sigma_{kr}}{\sigma_D}} \quad (27)$$

zur Auswertung der Versuchsergebnisse verwendet. Diese Form hat, verglichen mit (26) den Vorzug, daß die Größe  $\frac{\lambda}{\pi} \sqrt{\frac{\sigma_D}{E}}$  eine Funktion allein des Exzentrizitätsmaßes  $m$  und des Verhältnisses  $\sigma_{kr}/\sigma_D$  ist.

Als Beispiel für die Anwendung dieser Methode nehmen wir die Versuche, die OSTENFELD [8] mit Holzstäben aus Kiefernholz ausgeführt hat. Die Versuche wurden mit Schlankheitsgraden  $\lambda = 40, 60, 80, 100, 120, 160, 200$  und Exzentrizitätsmassen  $m = 0, 1, 2, 5, 10$  durchgeführt. Die verwendeten Querschnittsformen waren quadratisch oder kreisförmig. Das Holzmaterial der quadratischen Stäbe war südschwedischen Ursprungs, 4 Jahre hindurch gelagert, und der kreisförmigen Stäbe polnische Kiefer, 2 Jahre gelagert. Die

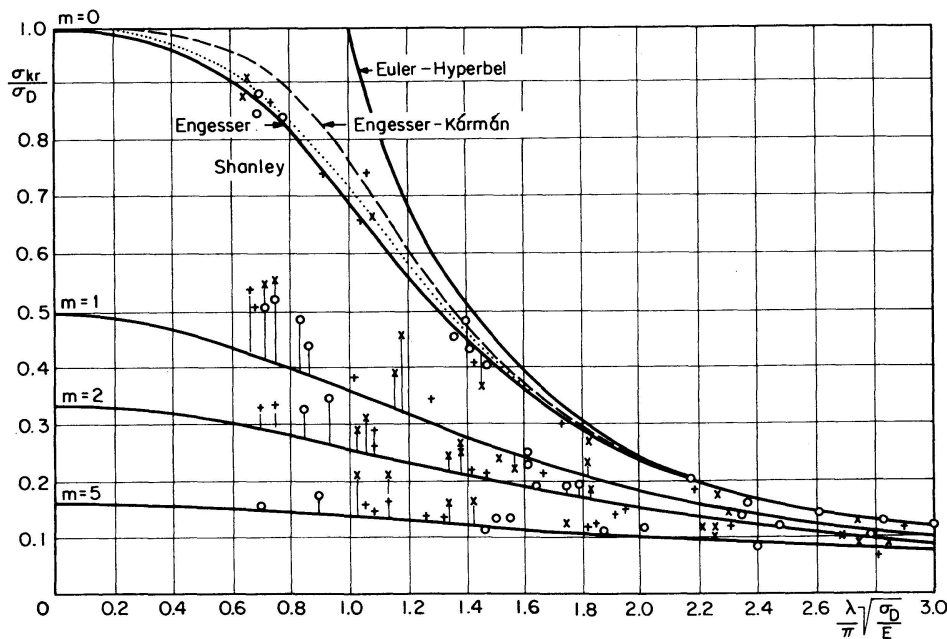


Fig. 3. Knickbiegeversuche mit Kiefernholzstäben.

Querschnittsgrößen waren  $5 \times 5$  cm für die quadratischen und 6 cm Durchmesser für die kreisförmigen Stäbe. Mit diesen ziemlich kleinen Querschnittsabmessungen war es von Wichtigkeit, möglichst astfreies, gleichartiges Holzmaterial zu wählen. Die Druckfestigkeit des Holzes variierte in den Grenzen  $\sigma_D = (297 \dots 758) \text{ kp/cm}^2$  und der Elastizitätsmodul  $E = (83000 \dots 188000) \text{ kp/cm}^2$ .

Die Ergebnisse der Knick- und Knickbiegeversuche sind teilweise in Fig. 3 angegeben. Bei den Stäben mit quadratischem Querschnitt lag der Kraftangriffspunkt entweder in einer mit den Seiten gleichlaufenden Achse (in der Fig. 3 mit + bezeichnet) oder in der Diagonale ( $\times$ ). Die Ergebnisse mit den kreisförmigen Stäben sind mit kleinen Zirkeln ( $\circ$ ) angedeutet. Die durch die Versuchspunkte laufenden Kurven geben graphisch die Funktion (27) wieder, mit  $c = 0,8$ . Der Übersichtlichkeit wegen wurden für das Exzentrizitätsmaß nur die Werte  $m = 0, 1, 2, 5$  gewählt. Die dem Wert  $m = 0$  entsprechende unterste Kurve ist identisch mit der Knickspannungslinie von ENGESSER nach Formel (17). Bei der gestrichelten Linie wurde die Wirkung der bleibenden Formänderungen mit Hilfe des von KÁRMÁN für den rechteckigen Querschnitt abgeleiteten ENGESSERSchen [9] Knickmoduls

$$T = \frac{4 E E_t}{(\sqrt{E} + \sqrt{E_t})^2} \quad (28)$$

berücksichtigt. Die Wirkung des SHANLEY-Effektes [10] auf die Knickspannung der Stäbe mit rechteckigem Querschnitt ist auf Grund des Formänderungsgesetzes (24) nach den Untersuchungen von LARSSON [11] durchgeführt und in der Abbildung mit punktierter Linie dargestellt. Sie liegt etwas höher als die ENGESSERSche Knickspannung, ist aber immer kleiner als die ENGESSER-KÁRMÁNSche Knickspannung. Als kritische Spannung kann die ENGESSERSche Knickspannung betrachtet werden.

Die Versuchsergebnisse von den zentrisch gedrückten Stäben ( $m = 0$ ) schließen sich sehr gut an die theoretischen Knickspannungskurven von ENGESSER und SHANLEY an. Dagegen befinden sich die den exzentrisch belasteten Stäben ( $m \neq 0$ ) entsprechenden Versuchspunkte vorwiegend beträchtlich oberhalb der theoretisch ermittelten Kurven. Dies kommt davon her, daß die einfache NAVIERSche Formel (5) nicht richtig die in dem Stab entstehende größte Randspannung in dem Bruchstadium wiedergibt. Nach OSTENFELD [8] kann die Formel (5) trotzdem für exzentrisch beanspruchte Holzstäbe bis zum Bruch angewandt werden, wenn ein Beiwert  $\beta$  von der Größe

$$\beta = \frac{\sigma_D}{\sigma_B} \quad (29)$$

zum Momentenglied in der Formel hinzugefügt und die Formel also in der Form

$$\sigma = \frac{F}{A} + \beta \frac{M}{I} e \quad (30)$$

geschrieben wird. Das Verhältnis (29), wobei  $\sigma_D$  die Druckfestigkeit und  $\sigma_B$  die Biegefestigkeit des Holzes bedeutet, ist sowohl von der Krümmung des Druckstauchungsdiagrammes als von der Form des Querschnittes abhängig. Je größer die Abweichung des Druckstauchungsdiagrammes von der Geraden, und je mehr die Querschnittsfläche in der Nähe der Nulllinie konzentriert ist, um so kleiner wird  $\beta$ . Nach den Untersuchungen von OSTENFELD beträgt der Mittelwert dieser Verhältniszahl etwa

$$\begin{aligned} \text{für rechteckigen Querschnitt } (+) \quad \beta &= 0,80, \\ \text{für rechteckigen Querschnitt } (\times) \quad \beta &= 0,61, \\ \text{für kreisförmigen Querschnitt } (\circ) \quad \beta &= 0,70. \end{aligned} \quad (31)$$

Wird in die Formel (30)  $\sigma = \sigma_D$ ,  $I = i^2 A$  und der Ausdruck des größten Biegemomentes aus (14) eingesetzt und im übrigen genau so verfährt wie vorher bei der Ableitung der Gleichung (27), so erhält man schließlich

$$\frac{\lambda}{\pi} \sqrt{\frac{\sigma_D}{E}} = \frac{2}{\pi} \sqrt{\frac{\sigma_D}{\sigma_{kr}} \frac{1 - \frac{\sigma_{kr}}{\sigma_D}}{1 - c \frac{\sigma_{kr}}{\sigma_D}}} \arccos \frac{\beta m \frac{\sigma_{kr}}{\sigma_D}}{1 - \frac{\sigma_{kr}}{\sigma_D}}. \quad (32)$$

Diese unterscheidet sich von der Gleichung (27) nur dadurch, daß an Stelle des Exzentrizitätsmaßes  $m$  in (27) in Gleichung (32) das reduzierte Exzentrizitätsmaß  $\beta m$  steht.

In Fig. 4 ist  $\sigma_{kr}/\sigma_D$  als Funktion von der Größe  $\frac{\lambda}{\pi} \sqrt{\frac{\sigma_D}{E}}$ , mit  $\beta m$  als Parameter, nach (32) dargestellt. Vergleicht man den Verlauf der Kurven mit den in der Fig. 3 angegebenen Versuchspunkten, so sieht man, daß die Übereinstimmung gut ist.

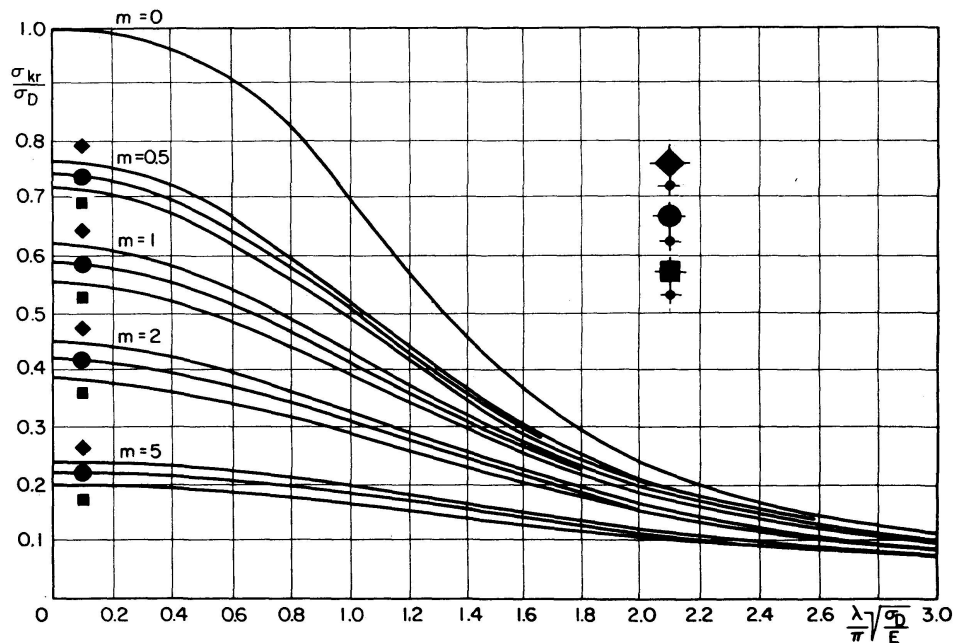


Fig. 4. Nomogramm zur Bestimmung der kritischen Spannung eines exzentrisch gedrückten Holzstabes nach Formel (32).



### 3. Zentrisch belasteter ursprünglich gekrümmter Stab

Bei dem schwach gekrümmten Stab von der Länge  $l$  mit drehbar gelagerten Enden greife die axiale Druckkraft  $F$  an. Der Stabquerschnitt sei symmetrisch in bezug auf die Hauptträgheitsachse des größten Trägheitsmomentes und diese liege in der Krümmungsebene. Wir beziehen den Stab in der in Fig. 5

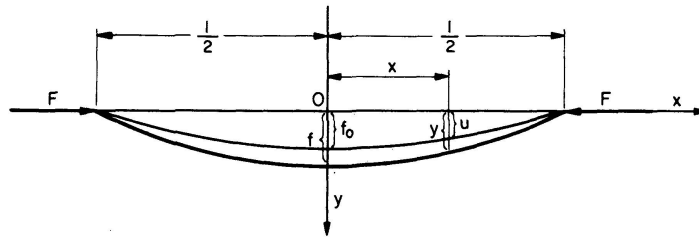


Fig. 5. Zentrisch belasteter Stab mit ursprünglicher Krümmung.

angedeuteten Weise auf ein rechtwinkliges Achsenkreuz, dessen  $x$ -Achse mit der Wirkungslinie der Kraft  $F$  zusammenfällt und dessen  $y$ -Achse ihre positive Richtung nach unten hat. Der an der Stelle  $x$  vorhandene Abstand der Stabmittellinie von der  $x$ -Achse sei vor der Verformung  $u$ . Wir nehmen an, daß die anfänglich gebogene Stabmittellinie mit dem Pfeile  $f_0$  genau genug als Bogen einer Cosinuslinie betrachtet werden kann, daß also

$$u = f_0 \cos \pi \frac{x}{l} \quad (33)$$

ist. Bezeichnet man mit  $y$  den Abstand der Stabmittellinie von der Wirkungslinie der Kraft  $F$  nach der Verformung, so ist das an der Stelle  $x$  erzeugte Biegemoment

$$M = F y. \quad (34)$$

Dabei ist zu beachten, daß das Moment als positiv betrachtet werden muß, wenn es bestrebt ist, den Krümmungsradius  $\rho$  des Stabes zu verkleinern.

Geht man ebenso wie beim geraden Stab auch bei dem ursprünglich gekrümmten Stab von der BERNOULLISCHEN Annahme aus, nach welcher die Ebenen, die vor der Verformung senkrecht zur Achse des Stabes liegen, auch nach der Verformung eben verbleiben, so kann man für die Krümmung  $1/\rho$  des Stabes eine der Formel (2) entsprechende Reihenentwicklung ableiten. Unter der Annahme, daß die Querschnittshöhe im Vergleich zum kleinsten Krümmungsradius  $\rho_0$  der Anfangskrümmung der Stabachse klein ist, daß es sich also um einen «schwach gekrümmten» Stab handelt, beginnt diese Reihenentwicklung folgendermaßen

$$\frac{1}{\rho} = \frac{1}{\rho_0} - \frac{1}{1 + \epsilon_s} \frac{M}{I \sigma'(\gamma)} + \dots \quad (35)$$

Für die Bestimmung der Tragfähigkeit eines schwach gekrümmten Stabes

genügt es ebenso wie bei dem geraden Stab, nur diesen linearen Teil der Reihenentwicklung zu berücksichtigen. Setzt man  $M = Fy$  ein und vernachlässigt man  $\epsilon_s$  gegen Eins, so geht diese Gleichung in

$$\frac{1}{\rho} = \frac{1}{\rho_0} - \frac{F}{I \sigma'(\gamma)} y$$

über oder, wenn man sich auf so kleine Verformungen beschränkt, daß annähernd  $1/\rho = y''$  und  $1/\rho_0 = u''$  gesetzt werden können,

$$y'' = u'' - \frac{F}{I \sigma'(\gamma)} y. \quad (36)$$

Nach (33) ist

$$u'' = -\left(\frac{\pi}{l}\right)^2 f_0 \cos \pi \frac{x}{l}.$$

Wird dieser Wert in die Gleichung (36) eingesetzt und die Abkürzung (9)  $\alpha^2 = F/E_t I$  benutzt, so ergibt sich als Differentialgleichung der elastischen Linie des schwach gekrümmten Stabes

$$y'' = -\alpha^2 y - \left(\frac{\pi}{l}\right)^2 f_0 \cos \pi \frac{x}{l}. \quad (37)$$

*Dies gilt sowohl unterhalb als oberhalb der Proportionalitätsgrenze des Materials.*

Die allgemeine Lösung dieser Differentialgleichung ist

$$y = A \sin \alpha x + B \cos \alpha x + f \cos \pi \frac{x}{l}, \quad (38)$$

wo  $A$  und  $B$  die Integrationskonstanten sind und mit  $f$  abkürzungshalber der Ausdruck

$$f = \frac{f_0}{1 - \left(\frac{\alpha l}{\pi}\right)^2} \quad (39)$$

bezeichnet ist. Die Integrationskonstanten sind aus den Grenzbedingungen  $x = \pm l/2, y = 0$  zu bestimmen. Daraus folgt  $A = 0$  und  $B = 0$ . Mit diesen Werten erhält man aus (38) als Gleichung der elastischen Linie des Stabes

$$y = f \cos \pi \frac{x}{l}. \quad (40)$$

Aus dieser Gleichung geht die geometrische Bedeutung von  $f$  deutlich hervor. Für  $x = 0$  erhält  $y$  den größten Wert  $f$ . Es ist somit die größte Ausbiegung, die die Stabmitte infolge der ursprünglichen Krümmung und unter der Last  $F$  erfährt.

Wenn man den Wert (9) von  $\alpha$  in die Formel (39) einsetzt, so erhält man

$$f = \frac{f_0}{1 - \frac{F}{F_0}}. \quad (41)$$

Darin kann

$$F_0 = \frac{\pi^2 E_t I}{l^2} \quad (42)$$

als die Knickkraft eines zentrisch gedrückten geraden Stabes von der Länge  $l$ , mit einem Querschnitt gleich dem des gegebenen Stabes und mit dem Elastizitätsmodul gleich  $E_t$  gedeutet werden.

Das größte Biegemoment ergibt sich aus (34) mit Rücksicht auf (41) als

$$M = Ff = \frac{Ff_0}{1 - \frac{F}{F_0}}. \quad (43)$$

Wir fassen nochmals die Ermittlung der Tragfähigkeit des zentrisch gedrückten Stabes mit ursprünglicher Krümmung als Spannungsproblem auf. Die ursprüngliche Krümmung des Stabes führt zu der Frage, inwieweit die für den geraden Stab geltende NAVIERSche Formel (5) in der von OSTENFELD korrigierten Form (30) auch für die Bestimmung der Spannungen bei dem ursprünglich gekrümmten Stab verwendet werden darf. Unter den bei (35) gemachten Voraussetzungen kann man zeigen, daß die Spannungsformel (30) auch für den schwach gekrümmten Stab mit in der Praxis genügender Genauigkeit gilt.

Die größte Spannung im Stab tritt am Innenrand des Mittelquerschnittes auf. Nach (43) erhält man aus der Spannungsformel (30)

$$\sigma = \frac{F}{A} + \frac{F\beta f_0 e}{I\left(1 - \frac{F}{F_0}\right)},$$

wo  $e$  den Abstand der äußersten Faser von der  $z$ -Achse auf der Innenseite des gebogenen Stabes bedeutet. Wenn  $\sigma = \sigma_D$ , so ist die Tragfähigkeit des Stabes erreicht und die äußere Last  $F$  kann nicht mehr gesteigert werden. Die größte Tragkraft  $F$  muß daher der Gleichung

$$\sigma_D = \frac{F}{A} + \frac{F\beta f_0 e}{I\left(1 - \frac{F}{F_0}\right)} \quad (44)$$

genügen. Führt man  $I = i^2 A$  ein, bezeichnet gemäß (15)

$$m' = \frac{f_0}{k} = \frac{f_0 e}{i^2} \quad (45)$$

das Exzentrizitätsmaß und beachtet (42), so ergibt die Auflösung der Gleichung (44) nach dem der kritischen Spannung  $\sigma_{kr} = F/A$  entsprechenden Schlankheitsgrad

$$\lambda = \pi \sqrt{\frac{E_t}{\sigma_{kr}} \left(1 - \frac{\beta m' \sigma_{kr}}{\sigma_D - \sigma_{kr}}\right)}. \quad (46)$$

Setzt man den Ausdruck des Tangentenmoduls aus (22) ein und berücksichtigt, daß darin jetzt  $\sigma = \sigma_{kr}$  ist, so kann (46) geschrieben werden

$$\frac{\lambda}{\pi} \sqrt{\frac{\sigma_D}{E}} = \sqrt{\frac{\frac{\sigma_D}{\sigma_{kr}} - (1 + \beta m')}{1 - c \frac{\sigma_{kr}}{\sigma_D}}}. \quad (47)$$

Diese Form hat, im Vergleich zu (46), den Vorzug, daß die Größe  $\frac{\lambda}{\pi} \sqrt{\frac{\sigma_D}{E}}$  eine Funktion allein des reduzierten Exzentrizitätsmaßes  $\beta m'$  und des Verhältnisses  $\sigma_{kr}/\sigma_D$  ist.

In der Praxis kommt oft der Fall in Betracht, daß der Schlankheitsgrad des Stabes bekannt ist und man die ihm entsprechende kritische Druckspannung  $\sigma_{kr}$  zu wissen wünscht. Löst man die obige Gleichung in bezug auf das Verhältnis  $\sigma_{kr}/\sigma_D$ , so erhält man

$$\frac{\sigma_{kr}}{\sigma_D} = \frac{\pi^2 E}{2 c \sigma_D \lambda^2} \left[ 1 + \beta m' + \frac{\sigma_D \lambda^2}{\pi^2 E} - \sqrt{\left( 1 + \beta m' + \frac{\sigma_D \lambda^2}{\pi^2 E} \right)^2 - 4 c \frac{\sigma_D \lambda^2}{\pi^2 E}} \right]. \quad (48)$$

Unterhalb der Proportionalitätsgrenze, wo  $E_t = E$  und infolgedessen die Gleichung (42) die EULERSche Knickkraft eines zentrisch gedrückten geraden Stabes von der Länge  $l$  und mit einem Querschnitt gleich dem des gegebenen Stabes darstellt, ist (44) identisch mit der Formel von KAYSER [12].

Dividiert man (46) durch (20), so ergibt sich als Verhältnis der Schlankheitsgrade eines ursprünglich gekrümmten Stabes und eines geraden Stabes bei ein und derselben Spannung

$$\frac{\lambda}{\lambda_0} = \sqrt{1 - \frac{\beta m' \frac{\sigma_{kr}}{\sigma_D}}{1 - \frac{\sigma_{kr}}{\sigma_D}}}. \quad (49)$$

In Fig. 6 ist  $\sigma_{kr}/\sigma_D$  als Funktion von der Größe  $\frac{\lambda}{\pi} \sqrt{\frac{\sigma_D}{E}}$  mit  $\beta m'$  als Parameter nach (47) dargestellt. Der Übersichtlichkeit halber wurden für das Exzentrizitätsmaß nur die Werte  $m' = 0, 0,5, 1, 2, 5$  gewählt.

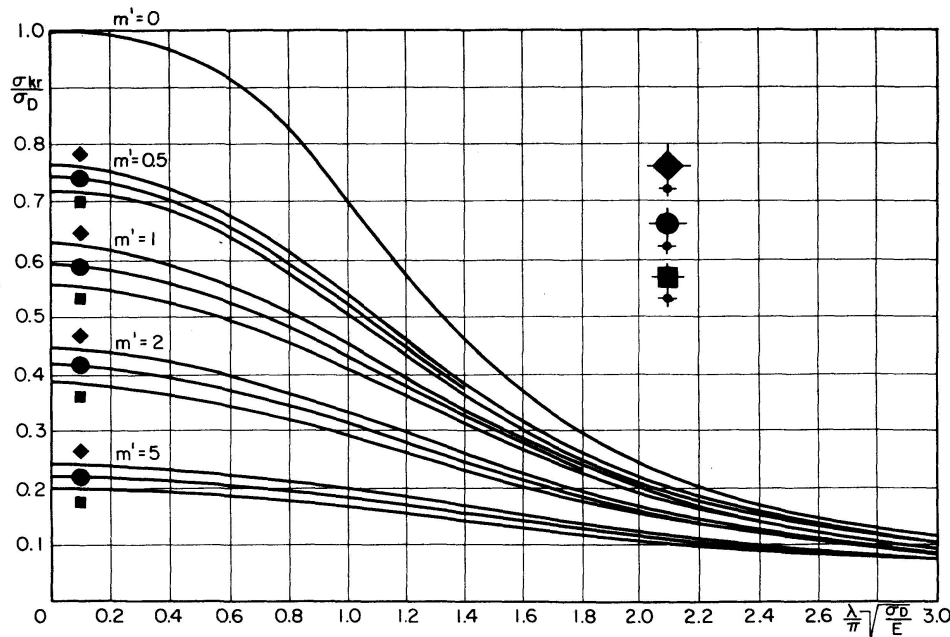


Fig. 6. Nomogramm zur Bestimmung der kritischen Spannung eines ursprünglich gekrümmten Stabes nach der Formel (47).

Weil Versuchsergebnisse von den zentrisch belasteten ursprünglich gekrümmten Holzstäben dem Verfasser nicht bekannt gewesen sind, ist ein Vergleich von den in der Fig. 6 angegebenen theoretisch ermittelten Kurven mit den Versuchswerten nicht möglich gewesen.

### Bibliographie

1. JACOB BERNOULLI: Acta eruditorum. Leipzig 1691; Opera, Bd. I, S. 451. Genf 1744; Mémoires de Paris. 1705; Oeuvres, Bd. I, S. 976. Genf 1744.
2. ARVO YLINEN: Erweiterung der BERNOULLISCHEN Biegungstheorie auf den unelastischen Bereich. Annales Acad. Scient. Fenn. Ser. A. Tom. LVII, No. 7. Helsinki 1941.
3. F. ENGESSER: Über die Knickfestigkeit gerader Stäbe. Zeitschrift des Arch.- u. Ing.-Vereins zu Hannover. 1889. S. 455.
4. C. L. NAVIER: Résumé des leçons sur l'application de la mécanique à l'établissement des constructions et des machines. Paris 1826; 3. éd. par B. DE SAINT-VENANT, Paris 1864.
5. A. FÖPPL: Zitiert im Bericht über die II. internationale Tagung für Brückenbau und Hochbau. Wien 1928, S. 342.
6. ARVO YLINEN: Publ. IABSE, Vol. XVI, p. 529. Zürich 1956.
7. Vgl. A. YLINEN: Die Knickfestigkeit eines zentrisch gedrückten geraden Stabes im elastischen und unelastischen Bereich. Diss. T. H. Helsinki 1938.
8. A. OSTENFELD: Exzentrisch beanspruchte Säulen. Versuche mit Holzsäulen. Querschnittsbestimmung. Ingeniørvidenskabelige Skrifter, A Nr. 19. København 1929.
9. F. ENGESSER: Über Knickfragen. Schweizerische Bauzeitung. Band XXVI (1895), S. 24.
10. F. R. SHANLEY: Journ. Aeronaut. Sci., Vol. 13 (1946), S. 678, und Vol. 14 (1947), S. 261.
11. H. LARSSON: Journ. Aeronaut. Sci., Vol. 23 (1956), S. 867.
12. H. KAYSER: Über die Berechnung von Druckstäben. Zentralblatt der Bauverwaltung. 1912, S. 121.

### Zusammenfassung

Der Verfasser untersucht die Knickbiegefestigkeit eines exzentrisch belasteten geraden Holzstabes und eines zentrisch belasteten ursprünglich gekrümmten Holzstabes. Die Resultate werden mit den Versuchsergebnissen von OSTENFELD verglichen.

### Summary

The author investigates the buckling strength of an eccentrically-loaded straight wooden column and a centrally-loaded, initially warped column. The results are compared with those obtained in the tests made by OSTENFELD.

### Résumé

L'auteur examine la résistance des barres droites en bois, comprimées par les forces excentriques, et des barres courbes comprimées par les forces centrées. Les résultats sont comparés avec les essais d'OSTENFELD.