

**Zeitschrift:** IABSE publications = Mémoires AIPC = IVBH Abhandlungen  
**Band:** 27 (1967)  
  
**Artikel:** Sur certains cas exceptionnels dans la théorie des ponts à poutres multiples  
**Autor:** Massonnet, Ch. / Gandolfi, A.  
**DOI:** <https://doi.org/10.5169/seals-21544>

### **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. [Siehe Rechtliche Hinweise.](#)

### **Conditions d'utilisation**

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. [Voir Informations légales.](#)

### **Terms of use**

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. [See Legal notice.](#)

**Download PDF:** 17.05.2025

**ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>**

## Sur certains cas exceptionnels dans la théorie des ponts à poutres multiples

*Über Ausnahmefälle in der Theorie der Mehrbalkenbrücken*

*Some Exceptional Cases in the Theory of Multi-Girder Bridges*

CH. MASSONNET

Professeur à l'Université de Liège

A. GANDOLFI

Assistant à l'Université de Naples<sup>1)</sup>

### Introduction

La méthode de calcul des ponts à poutres multiples connue généralement sous le nom de «Méthode GUYON-MASSONNET» [1, 2] a reçu ces dernières années de très nombreuses confirmations expérimentales et est aujourd'hui pratiquement utilisée dans un grand nombre de pays<sup>2)</sup>.

Il faut cependant se rendre compte que la méthode a des limitations; elles découlent de ses deux hypothèses fondamentales, à savoir:

1. Le pont réel est assimilable à un grillage de poutres et d'entretoises.
2. Les rigidités des poutres et des entretoises sont réparties de façon continue dans les sens  $x$  et  $y$ .

Les erreurs provenant de l'hypothèse 2 ont été analysées en détail par l'un des auteurs dans un mémoire antérieur [3]. Par contre, les erreurs entraînées par l'hypothèse 1 n'ont jamais été discutées en détail, et cette discussion est précisément le but du présent mémoire.

De manière générale, on peut dire que la méthode risque de donner des résultats incorrects pour deux raisons principales:

1. Les ponts réels ont toujours une dalle de roulement, généralement en béton, et le système formé par cette dalle et un ou deux cours de nervures en acier

---

<sup>1)</sup> Cette étude a été réalisée pendant le séjour que le second auteur a fait à l'Université de Liège sous les auspices de la «Fondazione Alberto Beneduce».

<sup>2)</sup> Un livre consacré à l'exposé complet de cette méthode sous la signature conjointe de R. BARES et de l'un des auteurs vien de paraître chez DUNOD à Paris. Ce livre donne la bibliographie complète du sujet.

ou béton est un système n'obéissant pas rigoureusement aux mêmes équations qu'un grillage de poutres.

2. Le pont peut avoir une structure telle que la déformation des entretoises par cisaillement ne soit pas négligeable.

La théorie correcte des systèmes formés d'une dalle et d'un cours de nervures excentriques parallèles ou de deux familles de nervures excentriques perpendiculaires entre elles a été faite par PFLÜGER [4] et GIENCKE [5, 6].

Ces deux chercheurs ont montré que le comportement de ces systèmes était gouverné par un système de deux équations couplées aux dérivées partielles du quatrième ordre contenant le déplacement transversal  $w$  d'un point du feuillet moyen de la dalle et la fonction de tension  $\varphi$  représentant l'état plan de tension dans cette dalle. L'un des auteurs [7], partant de la théorie de PFLÜGER, a montré qu'il n'était pas possible de remplacer un tel système par un grillage continu obéissant à l'équation classique de Huber:

$$\rho_P \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2 \alpha \sqrt{\rho_P \rho_E} \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + \rho_E \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} = p, \quad (1.1)$$

en ce sens qu'ils n'existe pas de valeurs des rigidités flexionnelles  $\rho_P$ ,  $\rho_E$  et du paramètre de torsion  $\alpha$  telles que la solution de l'équation (1.1) représente correctement le comportement du pont à nervures excentriques. On peut cependant, par des considérations énergétiques, déterminer des valeurs de  $\rho_P$ ,  $\rho_E$  et  $\alpha$  qui sont optimales en moyenne pour un pont déterminé, mais ces valeurs dépendent du genre de mise en charge appliquée à l'ouvrage. Heureusement, l'incertitude sur les valeurs de  $\rho_P$  et  $\rho_E$  est très faible et on peut adopter en pratique les rigidités flexionnelles de deux bandes orthogonales calculées comme si ces bandes étaient des poutres. L'excentricité des nervures ne se fait donc sentir appréciablement que dans le calcul de la rigidité torsionnelle  $D_{xy} = \alpha \sqrt{\rho_P \rho_E}$  pour laquelle l'un des auteurs a proposé [7] une formule de correction simple. Compte tenu de cette formule, la méthode GUYON-MASSONNET donne des valeurs du coefficient de répartition transversale  $K$  qui sont en bon accord avec les résultats expérimentaux et la première hypothèse est généralement acceptable. L'hypothèse 1 ci-dessus implique cependant aussi qu'on peut décemment assimiler une bande transversale de pont à une poutre, dans laquelle on sait que les déformations par cisaillement jouent un rôle négligeable.

Cette hypothèse n'est plus acceptable si les bandes transversales présentent une déformabilité élevée au cisaillement. Ce cas se présente dans deux types de ponts:

- a) Les ponts obtenus par l'accolement de poutres en double té en béton pré- ou post-construit qui se touchent par leurs semelles supérieures et inférieures et qui sont solidarisiées par une précontrainte transversale (fig. 1). Une bande transversale d'un tel pont est en fait une poutre Vierendeel à hauteur

constante, et il est bien connu que les poutres Vierendeel sont des structures hyperstatiques se déformant bien plus par la flexion locale des membrures entre montants que par la flexion d'ensemble comme poutre.

Dans ces ponts le nombre de poutres est généralement grand et on montrera dans le présent mémoire qu'il est possible de considérer la déformation par cisaillement comme répartie continûment et ainsi de généraliser la théorie ordinaire des ponts à poutres multiples pour tenir compte de son effet.

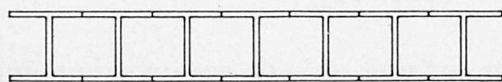
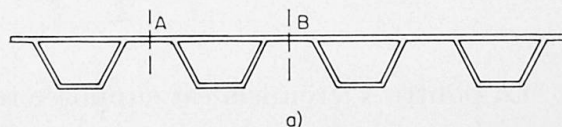
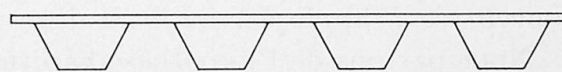


Fig. 1.



a)



b)

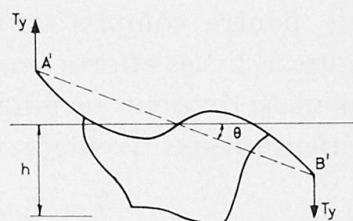
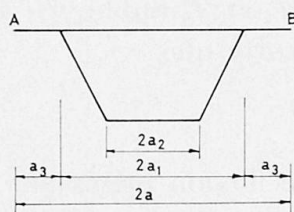


Fig. 3.

b) Les ponts formés de profils tubulaires tout en béton (fig. 2a), ou partiellement en acier (fig. 2b), reliés par une dalle en béton, mais ne possédant pas d'entretoises. La grande déformabilité de ces ponts au cisaillement provient de ce que chaque poutre tubulaire individuelle, telle que celle qui s'étend de  $A$  à  $B$  (fig. 2a) peut se déformer par cisaillement transversal de la façon représentée à la figure 3, ce qui a pour conséquence une dénivellation sensible entre les points  $A$  et  $B$ .

L'analyse de ces ponts est réservée à un mémoire ultérieur.

Le présent mémoire a été inspiré par un mémoire [8] publié par un des deux auteurs.

## Chapitre 1

### Théorie des ponts à poutres multiples dont la section transversale forme une poutre Vierendeel

#### 1.1. Déformation d'une poutre Vierendeel sous l'effet de l'effort tranchant

En 1950, A. HOLMBERG a analysé dans les Mémoires de l'A.I.P.C. [9] le comportement de poutres qui reposent sur une fondation élastique et qui ne se déforment que sous l'effet de l'effort tranchant. Ce mémoire apporte une

contribution utile au problème que nous nous proposons de résoudre dans le présent chapitre. En particulier, HOLMBERG analyse la déformation sous l'effet de l'effort tranchant d'une poutre Vierendeel à hauteur constante et nous n'avons qu'à reproduire ci-dessous l'essentiel de son analyse.

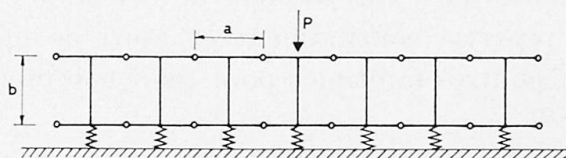


Fig. 1.1.

La poutre Vierendeel est supposée reposer sur une série de ressorts de même tate placés au droit des montants; elle est chargée par exemple d'une force concentrée  $P$  appliquée au droit d'un montant (fig. 1.1.).

Nous partons de l'hypothèse habituelle que les points d'inflexion des membrures sont situés à mi-distance des montants.

Un élément de poutre compris entre 4 points d'inflexion adjacents est représenté à la figure 1.2. Les efforts tranchants  $T$  appliqués aux deux sections limitant cet élément se divisent en efforts  $T_1$  et  $T_2$  appliqués aux membrures supérieure et inférieure respectivement, de sorte que

$$T_1 + T_2 = T. \quad (1.1.)$$

La figure 1.2 montre les déformations de flexion prises par les membrures et le montant. La Résistance des Matériaux élémentaire nous fournit les équations suivantes:

$$\begin{aligned} \delta_1 &= T_1 \frac{a^2}{2} \frac{b}{3 E I_3} - T_2 \frac{a^2}{2} \frac{b}{6 E I_3} = \frac{a^2 b}{6 E I_3} \left( T_1 - \frac{T_2}{2} \right); \\ \delta_2 &= T_1 \frac{a^3}{24 E I_1}; \quad \delta_3 = \frac{a^2 b}{6 E I_3} \left( T_2 - \frac{T_1}{2} \right); \quad \delta_4 = T_2 \frac{a^3}{24 E I_2}. \end{aligned} \quad (1.2)$$

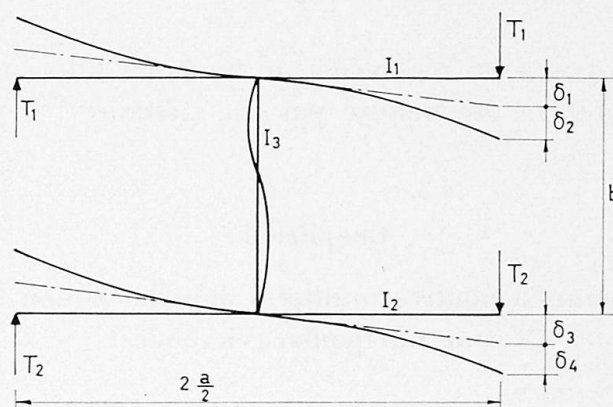


Fig. 1.2.

Les efforts  $T_1$  et  $T_2$  sont déterminés par l'équation d'équilibre (1.1) et l'équation de compatibilité

$$\delta_1 + \delta_2 = \delta_3 + \delta_4; \quad (1.3)$$

on trouve ainsi

$$\begin{aligned} T_1 &= T I_1 \frac{6 b I_2 + a I_3}{12 b I_1 I_2 + a I_1 I_3 + a I_2 I_3}, \\ T_2 &= T I_2 \frac{6 b I_1 + a I_2}{12 b I_1 I_2 + a I_1 I_3 + a I_2 I_3}. \end{aligned} \quad (1.4)$$

L'inclinaison moyenne  $\gamma$  de l'axe de la poutre dans l'intervalle  $a$  considéré vaut, d'après la figure 1.2,

$$\gamma = \frac{2(\delta_1 + \delta_2)}{a}. \quad (1.5)$$

$\delta_1$  et  $\delta_2$  étant proportionnels à l'effort tranchant  $T$ , on voit qu'on peut finalement poser

$$\begin{aligned} \gamma &= S T \\ \text{avec } S &= \frac{a b}{12 E I_3} + \frac{a^2}{12 E} \frac{3 b I_1 + 3 b I_2 + a I_3}{12 b I_1 I_2 + a I_1 I_3 + a I_2 I_3}. \end{aligned} \quad (1.6)$$

### 1.2. Equation fondamentale gouvernant la déformation d'un pont à structure cellulaire

Nous considérerons le pont comme un grillage continu, ainsi que nous l'avons fait dans notre mémoire de 1950 [2] et nous compléterons la théorie développée dans ce mémoire par la prise en compte de la déformation des entretoises sous l'effet de l'effort tranchant. Désignons par  $B_p = E I_p$  la rigidité flexionnelle des poutres espacées de  $a$  et par  $C_p$  leur rigidité torsionnelle.

Le grillage continu fictif équivalent aura pour rigidités unitaires dans le sens des poutres:

$$\rho_p = \frac{B_p}{a} \quad \text{et} \quad \gamma_p = \frac{C_p}{a}. \quad (2.1)$$

D'autre part, si nous découpons dans le pont une bande transversale de largeur unitaire, nous obtenons la section représentée à la figure 2.1, qui est formée de deux rectangles inégaux. Nous pouvons évaluer les rigidités flexionnelle et torsionnelle de ce profil, que nous désignons par  $\rho_E$  et  $\gamma_E$  respectivement.

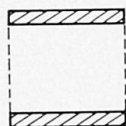


Fig. 2.1.

La courbure  $\left(-\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right)$ , du feuillet moyen du pont est liée au moment fléchissant unitaire  $M_x$  par la même relation que dans notre mémoire antérieur [2], à savoir:

$$M_x = -\rho_p \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}. \quad (2.2)$$

Par contre, l'équation

$$M_y = \rho_E \frac{\partial^2 w}{\partial y^2}$$

n'est plus correcte. En effet, la courbure  $\left(-\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right)$  peut se subdiviser en une courbure due à la flexion  $-\frac{\partial^2 w_M}{\partial y^2}$  et une courbure supplémentaire  $-\frac{\partial^2 w_T}{\partial y^2}$  due à la déformation provoquée par l'effort tranchant  $T_y$

$$-\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = -\frac{\partial^2 w_M}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 w_T}{\partial y^2}. \quad (a)$$

La courbure due à la flexion est liée au moment  $M_y$  par la relation classique

$$M_y = -\rho_E \frac{\partial^2 w_M}{\partial y^2}.$$

La courbure supplémentaire due à  $T_y$  se déduit de

$$\gamma \equiv \frac{\partial w_T}{\partial y^2} = S T_y \quad (1.6)$$

en dérivant partiellement par rapport à  $y$ , ce qui donne

$$\frac{\partial^2 w_T}{\partial y^2} = S \frac{\partial T_y}{\partial y}.$$

Substituant les valeurs ci-dessus de  $\frac{\partial^2 w_M}{\partial y^2}$  et  $\frac{\partial^2 w_T}{\partial y^2}$  dans (a), on trouve

$$M_y = -\rho_E \left( \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} - S \frac{\partial T_y}{\partial y} \right). \quad (2.3)$$

De même, les équations liant les moments de torsion unitaires dans les poutres et entretoises  $M_{xy}$  et  $M_{yx}$  à la torsion  $\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}$ , à savoir

$$M_{xy} = \gamma_P \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}, \quad M_{yx} = -\gamma_E \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y},$$

ne sont plus correctes parce qu'une partie  $W_T = M_T(x, y)$  de la déformée du pont provient de la déformation de l'entretoise unitaire sous l'effet de l'effort tranchant transversal  $T_y$ . En effet, en dérivant partiellement (11.6) par rapport à  $x$ , on trouve la partie

$$\frac{\partial^2 w_T}{\partial x \partial y} = S \frac{\partial T_y}{\partial x} \quad (2.4)$$

de la torsion du feuillet moyen qui est imputable à la déformation produite par  $T_y$ . En soustrayant cette partie de la torsion  $\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}$ , on trouve la partie

$$\theta = \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} - S \frac{\partial T_y}{\partial x} \quad (2.5)$$

de la torsion qui est produite par les moments de torsion unitaires dans les poutres et entretoises:

$$M_{xy} = \gamma_p \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} - S \frac{\partial T_y}{\partial x} \right); \quad M_{yx} = -\gamma_E \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} - S \frac{\partial T_y}{\partial x} \right). \quad (2.6)$$

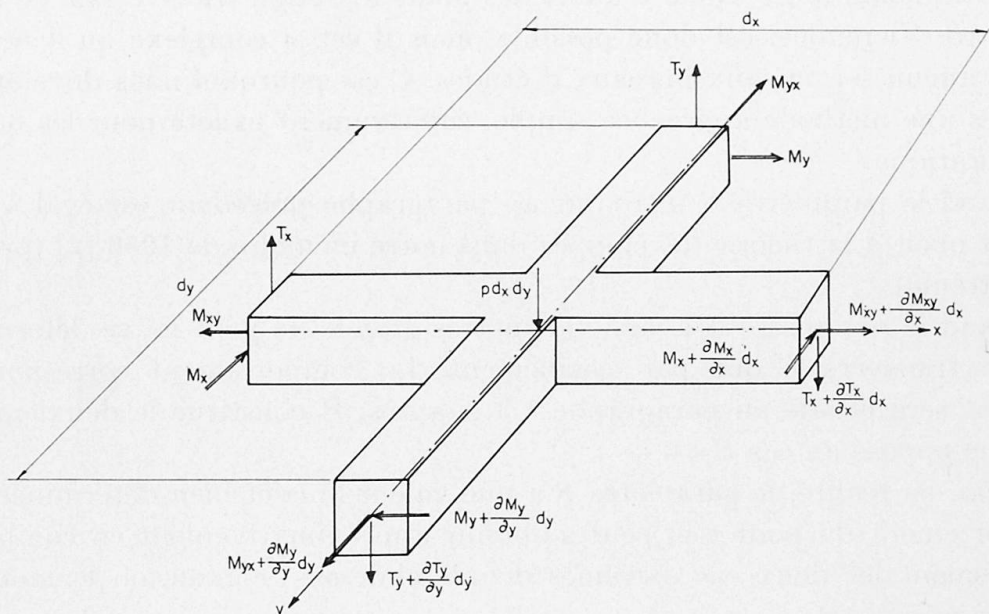


Fig. 2.2.

L'équilibre de l'élément de grillage (fig. 2.2) fournit les équations:

$$\begin{aligned} T_x &= \frac{\partial M_x}{\partial x} + \frac{\partial M_{yx}}{\partial y}, \\ T_y &= \frac{\partial M_y}{\partial y} - \frac{\partial M_{xy}}{\partial x}, \\ \frac{\partial T_x}{\partial x} + \frac{\partial T_y}{\partial y} + p &= 0. \end{aligned} \quad (2.7)$$

En remplaçant dans les deux premières équations (2.7) les moments par leurs expressions (2.2), (2.3) et (2.6), on trouve

$$\begin{aligned} T_x &= -\rho_p \frac{\partial^3 w}{\partial x^3} - \gamma_E \left( \frac{\partial^3 w}{\partial x \partial y^2} - S \frac{\partial^2 T_y}{\partial x \partial y} \right), \\ T_y &= -\rho_E \left( \frac{\partial^3 w}{\partial y^3} - S \frac{\partial^2 T_y}{\partial y^2} \right) - \gamma_p \left( \frac{\partial^3 w}{\partial x^2 \partial y} - S \frac{\partial^2 T_y}{\partial x^2} \right). \end{aligned} \quad (2.8)$$

Comme l'expression (2.8) de  $T_y$  contient les dérivées de ce même  $T_y$ , il n'est pas possible d'obtenir l'équation fondamentale de déformation en  $w$  en opérant comme dans la théorie classique des plaques orthotropes, c'est-à-dire en substituant les valeurs (2.8) de  $T_x$  et  $T_y$  dans l'équation d'équilibre de translation

$$\frac{\partial T_x}{\partial x} + \frac{\partial T_y}{\partial y} + p = 0. \quad (2.7)$$

Au contraire, l'élimination de  $T_y$  entraîne des calculs très complexes qui sont d'ailleurs très semblables à ceux exécutés pour éliminer les efforts tranchants  $T_x$  et  $T_y$  dans la théorie perfectionnée par REISSNER des plaques isotropes [10] ou orthotropes [11] pour tenir compte des déformations dues aux efforts tranchants. Le calcul «exact» des ponts à section transversale en forme de poutre Vierendeel est donc possible, mais il est si complexe qu'il ne peut rendre aucun service aux bureaux d'études. C'est pourquoi nous développons ci-après une méthode approchée simple, suffisamment exacte pour les besoins de la pratique.

Quand le paramètre  $S$  introduit au paragraphe précédent est égal à zéro, le pont obéit à la théorie développée dans notre mémoire de 1950 [2] (premier cas extrême).

Quand le paramètre  $S$  a une valeur très grande, le pont ne se déforme en section transversale que par cisaillement. Le comportement correspondant du pont sera étudié au paragraphe 1.3 ci-après. Il constitue le deuxième cas extrême opposé au cas  $S = 0$ .

Enfin, en réalité, le paramètre  $S$  a une valeur finie et bien déterminée et le comportement du pont réel peut s'obtenir approximativement en combinant linéairement les deux cas extrêmes définis ci-dessus, comme on le montrera au paragraphe 1.4.

### 1.3. Etude du cas limite du pont extrêmement déformable sous l'effet de l'effort tranchant $T_y$

Si  $S$  est très grand, la torsion géométrique du pont  $\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}$  résulte uniquement de la déformation par effort tranchant et les moments de torsion  $M_{xy}$ ,  $M_{yx}$ , sont négligeables. La déformation du pont dans le sens des  $x$  découle de la déformation par flexion des poutres, soit

$$M_x = -\rho_p \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}. \quad (3.1)$$

La courbure du pont dans le sens des  $y$  provoquée par  $M_y$  est également négligeable et la déformation du pont dans ce sens est due uniquement à la déformation par cisaillement des entretoises déduite de (1.6)

$$T_y = \frac{1}{S} \frac{\partial w}{\partial y}. \quad (3.2)$$

En dérivant (3.1) par rapport à  $x$ , on trouve

$$T_x = -\rho_p \frac{\partial^3 w}{\partial x^3}. \quad (3.3)$$

Substituant ensuite les valeurs (3.2) et (3.3) de  $T_x$  et  $T_y$  dans l'équation d'équilibre vertical

$$\frac{\partial T_x}{\partial x} + \frac{\partial T_y}{\partial y} + p = 0, \quad (2.7)$$

on trouve l'équation de déformation du pont

$$\boxed{\rho_p \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} - \frac{1}{S} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = p.} \quad (3.4)$$

Considérons à présent (fig. 3.1) un pont de portée  $l$  et de largeur  $2b$ , chargé suivant une parallèle à l'axe longitudinal, d'excentricité  $e$ , d'une ligne de charges réparties suivant la demi-onde de sinusoïde

$$p = p_m \sin \frac{m \pi x}{l}. \quad (3.5)$$

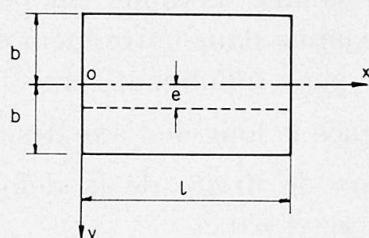


Fig. 3.1.

Le pont est simplement appuyé sur ses culées, de sorte que les conditions aux limites correspondantes s'écrivent

$$\text{pour } x=0 \text{ ou } l, \quad w=0, \quad M_x=0. \quad (3.6)$$

Il est libre sur ses bords latéraux et les conditions aux limites correspondantes sont:

$$\text{pour } y = \pm b, \quad T_y = 0 \text{ c'est-à-dire } \frac{\partial w}{\partial y} = 0. \quad (3.7)$$

L'intensité des charges  $p$ , est partout nulle, sauf le long de la ligne de charges  $y=e$ , donc l'équation de déformation est partout, sauf le long de cette ligne, l'équation homogène

$$\rho_p \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} - \frac{1}{S} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = 0. \quad (3.8)$$

On vérifie de suite que cette équation admet, pour la déformée du pont, la solution à variables séparées

$$w(x, y) = f_m(y) \sin \frac{m \pi x}{l}, \quad (3.9)$$

qui vérifie les conditions aux limites le long des deux bords appuyés  $x=0$  ou  $l$ . La fonction  $f_m(y)$  doit satisfaire à l'équation différentielle déduite de (3.8)

$$f_m''(y) - S \rho_p \frac{m^4 \pi^4}{l^4} f_m = 0. \quad (3.10)$$

En posant

$$S \rho_p \frac{m^4 \pi^4}{l^4} = \beta_m^2, \quad (3.11)$$

On peut mettre l'équation (3.10) sous la forme

$$f_m''(y) - \beta_m^2 f_m(y) = 0 \quad (3.12)$$

dont l'intégrale générale est

$$f_m(y) = A e^{\beta_m y} + B e^{-\beta_m y}. \quad (3.12)$$

Puisque les moments de torsion sont nuls, nous savons par notre mémoire antérieur [3] qu'une entretoise du pont se comporte comme une poutre sur appuis élastiques, qui dans le cas actuel ne se déforme que par cisaillement. La recherche de la déformée d'une telle poutre a déjà été effectuée par HOLMBERG [9], mais nous suivrons une méthode un peu différente, basée sur le principe de superposition, comme dans notre mémoire de 1950 [2].

Considérons d'abord un pont infiniment large ( $b = \infty$ ) chargé d'une ligne de charge  $p_m \sin \frac{m \pi x}{l}$  appliquée le long de l'axe des  $x$ . Alors, il suffit par symétrie de considérer la portion de droite de la déformée (3.12). La déformée devant s'annuler pour  $y \rightarrow \infty$ ,  $A = 0$  et

$$f_m(y) = B e^{-\beta_m y}. \quad (3.13)$$

L'effort tranchant est donné par (3.2), qui s'écrit ici

$$T_y = -\frac{\beta_m}{S} B e^{-\beta_m y} \sin \frac{m \pi x}{l}. \quad (3.14)$$

Le long de l'axe des  $x$ , on a

$$(T_y)_{y=0} = -\frac{p_m}{2} \sin \frac{m \pi x}{l},$$

d'où

$$B = \frac{p_m S}{2 \beta_m}$$

et

$$f_m(y) = \frac{p_m S}{2 \beta_m} e^{-\beta_m y}. \quad (3.15)$$

Considérons maintenant le pont réel chargé suivant une parallèle à son axe d'excentricité  $e$  (fig. 3.1); sa déformée transversale peut s'obtenir en ajoutant à la déformée du pont de largeur indéfinie

$$\frac{p_m S}{2 \beta_m} e^{-\beta_m |y-e|}$$

la déformée (3.12) du pont non chargé; on obtient ainsi

$$f_m(y) = \frac{p_m S}{2 \beta_m} e^{-\beta_m |y-e|} + A e^{\beta_m y} + B e^{-\beta_m y} \quad (3.16)$$

d'où

$$S T_y = \frac{-p_m S}{2} e^{-\beta_m |y-e|} \operatorname{Sgn} y + \beta_m A e^{\beta_m y} - \beta_m B e^{-\beta_m y}. \quad (3.17)$$

Les constantes d'intégration  $A$  et  $B$  se déterminent en exprimant que l'effort tranchant s'annule sur les bords latéraux, c'est à dire que  $\frac{ST_y}{\beta_m} = 0$  pour  $y = \pm b$ ; on trouve ainsi les conditions

$$\begin{aligned} \frac{p_m S}{2\beta_m} e^{-\beta_m(b+e)} + A e^{-\beta_m b} - B e^{\beta_m b} &= 0, \\ -\frac{p_m S}{2\beta_m} e^{-\beta_m(b-e)} + A e^{\beta_m b} - B e^{-\beta_m b} &= 0 \end{aligned} \quad (3.18)$$

d'où l'on déduit

$$\begin{aligned} A &= \frac{p_m S}{2\beta_m} \frac{e^{\beta_m e} - e^{-\beta_m(2b+e)}}{e^{2\beta_m b} - e^{-2\beta_m b}}, \\ B &= \frac{p_m S}{2\beta_m} \frac{e^{-\beta_m e} - e^{-\beta_m(2b-e)}}{e^{2\beta_m b} - e^{-2\beta_m b}}. \end{aligned} \quad (0!) \quad (3.19)$$

Considérons maintenant le cas particulier où  $m=1$  et  $p = p_1 \sin \frac{\pi x}{l}$ .

Si la ligne de charges sinusoïdales était étalée uniformément sur la largeur  $2b$  du pont, celui-ci prendrait la déformation moyenne

$$w^0 = \frac{p_1}{2b\rho_p} \frac{\pi^4}{l^4} \sin \frac{\pi x}{l}. \quad (3.20)$$

On appelle par définition coefficient de répartition transversale  $K$ , comme dans la méthode GUYON-MASSONNET, le rapport

$$K = \frac{w_{réel}(e, y)}{w^0}. \quad (3.21)$$

Pour obtenir les lignes d'influence du coefficient  $K$ , il suffit de diviser la déformée réelle pour  $m=1$ , à savoir:

$$w_1 = f_1(y) \sin \frac{\pi x}{l},$$

par la déformée moyenne  $w^0$ ; on trouve ainsi, en tenant compte de ce que  $\beta = \frac{\pi^2}{l^2} \sqrt{S\rho_p}$

$$K(e, y) = b\beta \left[ e^{-\beta(y-e)} + \frac{e^{\beta e} - e^{-\beta(2b+e)}}{e^{2\beta b} - e^{-2\beta b}} e^{\beta y} + \frac{e^{-\beta e} - e^{-\beta(2b-e)}}{e^{2\beta b} - e^{-2\beta b}} e^{-\beta y} \right]. \quad (3.22)$$

On peut vérifier aisément que la valeur moyenne de  $K$ , c'est-à-dire

$$\frac{1}{2b} \int_{-b}^{+b} K(e, y) dy \quad (3.23)$$

est bien égale à l'unité, comme cela doit être.

On peut construire des tables donnant les lignes d'influence de  $K(e, y)$  pour  $\frac{e}{b} = 0, \frac{1}{4}, \frac{1}{2}, \frac{3}{4}$  et 1 et  $\frac{y}{b}$  variant par quarts de  $(-1)$  à  $(+1)$ . Ces tables dépendent du paramètre sans dimensions  $\beta b$ . En introduisant comme dans notre mémoire antérieur [2] les notations

$$\frac{y}{b} = \eta, \quad \frac{e}{b} = \epsilon, \quad \delta = \beta b = \frac{\pi^2 b}{l^2} \sqrt{S \rho_p} \quad (3.24)$$

on peut mettre la formule (3.21) sous la forme suivante:

$$K(\epsilon, \eta) = \delta \left[ e^{-\delta|\eta-\epsilon|} + \frac{e^{\delta\epsilon} - e^{-\delta(2+\epsilon)}}{e^{2\delta} - e^{-2\delta}} e^{\delta\eta} + \frac{e^{-\delta\epsilon} - e^{-\delta(2-\epsilon)}}{e^{2\delta} - e^{-2\delta}} e^{-\delta\eta} \right] \quad (3.25)$$

ou encore sous la forme:

$$K(\epsilon, \eta) = \delta \left[ e^{-\delta|\eta-\epsilon|} + \frac{\cosh \delta(\epsilon + \eta) - e^{-2\delta} \cosh \delta(\epsilon - \eta)}{\sinh 2\delta} \right], \quad (3.26)$$

qui se prête mieux aux calculs numériques.

#### 1.4. Théorie approchée des ponts à poutres multiples déformables sous l'effet de l'effort tranchant $T_y$

Comme déjà dit la fin du paragraphe 1.2, nous admettons que le déplacement transversal  $w$  du pont sous l'effet d'une ligne des charges sinusoïdales  $p$  est formé de deux parties qui sont dans un rapport *constant, le même en tous les points* du pont, qu'on désigne par  $w_1$  et  $w_2$  respectivement;  $w = w_1 + w_2$ . La partie  $w_1$  correspond au pont non déformable sous l'effet de  $T_y$  et la partie  $w_2$  au pont infiniment déformable sous l'effet de  $T_y$ , étudié au paragraphe 1.3.

Nous posons donc,

$$w_1 = (1 - A) w = (1 - A) w(e, y) \sin \frac{\pi x}{l},$$

$$w_2 = A w = A w(e, y) \sin \frac{\pi x}{l},$$

où  $A$  est un coefficient constant, le même pour tous les points  $(x, y)$  du pont.

D'après l'hypothèse introduite, la partie  $(1 - A)w$  de la déformée du pont obéit en moyenne à l'équation classique de HUBER, qui s'écrit:

$$(1 - A) \rho_p \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2 \alpha \sqrt{\rho_p \rho_E} (1 - A) \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + (1 - A) \rho_E \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} = p_1, \quad (4.2)$$

tandis que la partie complémentaire  $A w$  obéit en moyenne à l'équation (3.4) des ponts infiniment déformables sous l'effet de  $T_y$ :

$$A \rho_p \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} - \frac{A}{S} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = p_2, \quad (4.3)$$

avec  $p_1 + p_2 = p$ .

En additionnant (4.2) et (4.3), on obtient l'équation de déformation approchée du pont réel:

$$\rho_p \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2 (1 - A) \alpha \sqrt{\rho_p \rho_E} \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} - \frac{A}{S} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + (1 - A) \rho_E \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} = p. \quad (4.4)$$

La déformée du pont étant de la forme

$$w(x, y) = f(y) \sin \frac{\pi x}{l}, \quad (4.5)$$

on trouve en remplaçant dans (4.4), que la déformée transversale  $f(y)$  obéit en-dehors de la ligne des charges à l'équation différentielle

$$(1-A) \rho_E f^{IV}(y) - \left[ 2\alpha(1-A) \sqrt{\rho_p \rho_E} \frac{\pi^2}{l^2} + \frac{A}{S} \right] f''(y) + \frac{\pi^4}{l^4} \rho_p f(y) = 0. \quad (4.6)$$

Pour un pont orthotrope classique de rigidités  $\rho'_p$ ,  $\rho'_E$  et de paramètre de torsion  $\alpha'$ , la déformée transversale obéit à l'équation

$$\rho'_E f^{IV}(y) - \left[ 2\alpha' \sqrt{\rho'_p \rho'_E} \frac{\pi^2}{l^2} \right] f''(y) + \frac{\pi^4}{l^4} \rho'_p f(y) = 0. \quad (4.7)$$

Identifions les coefficients de  $f^{IV}$ ,  $f''$  et  $f$ , de manière à obtenir la même déformée transversale dans les deux cas; on trouve:

$$\begin{aligned} \rho'_p &= \rho_p, \\ \rho'_E &= (1-A) \rho_E, \\ 2\alpha' \sqrt{\rho'_p \rho'_E} \frac{\pi^2}{l^2} &= 2\alpha(1-A) \sqrt{\rho_p \rho_E} \frac{\pi^2}{l^2} + \frac{A}{S}. \end{aligned} \quad (4.8)$$

Les deux premières égalités (4.8) entraînent que le paramètre d'entretoisement du pont devient

$$\theta' = \frac{b^4}{l} \sqrt{\frac{\rho'_p}{\rho'_E}} = \frac{\theta}{\sqrt[4]{1-A}}. \quad (4.9)$$

Remplaçons dans la troisième égalité (4.8)  $\rho'_E$  par sa valeur  $(1-A) \rho_E$ , puis résolvons par rapport à  $\alpha'$ ; il vient:

$$\alpha' = \alpha \sqrt{1-A} + \frac{A l^2}{2 \pi^2 S \sqrt{1-A} \sqrt{\rho_p \rho_E}}. \quad (4.10)$$

En introduisant les paramètres sans dimensions

$$\delta^2 = \frac{b^2 \pi^4}{l^4} S \rho_p \quad \text{et} \quad \theta^2 = \frac{b^2}{l^2} \sqrt{\frac{\rho_p}{\rho_E}}, \quad (4.11)$$

On peut mettre la formule (4.10) sous sa forme finale:

$$\alpha' = \alpha \sqrt{1-A} + \frac{\theta}{2} \frac{\pi^2 \theta^2}{\delta^2} \frac{1}{\sqrt{1-A}}. \quad (4.12)$$

Les formules (4.9) et (4.12) permettent, une fois qu'est connue la valeur  $A$ , de déterminer les valeurs corrigées des paramètres  $\alpha'$  et  $\theta'$  et d'en déduire les lignes d'influence de  $K_{\alpha'}$  des tables de  $K_0$  et  $K_1$  par la relation connue:

$$K_{\alpha'} = K_0 + (K_1 - K_0) \sqrt{\alpha'}.$$

Le problème se réduit donc à la détermination de la valeur de  $A$ . On peut dire, à ce sujet, que  $A$  est une valeur, variable entre 0 et 1, fonction des caractéristiques géométriques et statiques du pont examiné; on peut alors choisir comme paramètre représentatif de  $A$ , le rapport  $\theta/\delta$ . La figure (4.1) montre les courbes  $A(\alpha')$  obtenues par le calcul pour différentes valeurs du rapport  $\theta/\delta$  et pour  $\alpha = 1$ .

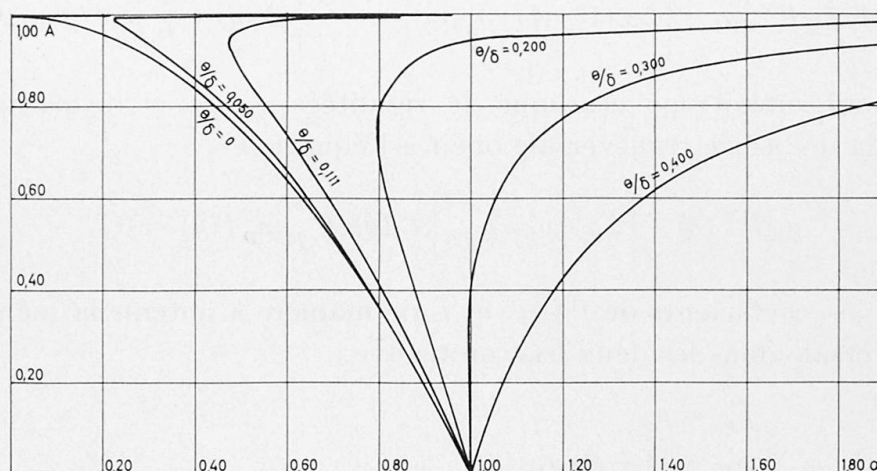


Fig. 4.1.

En examinant ces courbes, on note que, pour chacune d'entre elles, il correspond à une valeur déterminée de  $\alpha'$  deux valeurs différentes de  $A$ , donc de  $\theta'$ , sauf si l'on adopte pour  $A$  la valeur qui correspond au minimum de  $\alpha'$ .

Or, si pour un rapport  $\theta/\delta$  donné, on exige d'avoir des valeurs correspondantes  $\alpha'$  et  $\theta'$ , univoquement déterminées, il faut choisir sur la courbe  $A(\alpha')$ , une valeur de  $\alpha'$  qui définisse univoquement  $A$  et par conséquent  $\theta'$ . Il est donc naturel de poser que la valeur optimale de  $A$  est celle qui rend  $\alpha'$  minimum. Pour justifier cette hypothèse, on peut noter en outre qu'elle conduit à des valeurs correctes de  $\alpha'$  et  $\theta'$  dans les deux cas limites, c'est-à-dire:

1. Déformabilité par cisaillement négligeable, c'est-à-dire  $\delta$  très petit. Dans ce cas,  $\theta/\delta$  est très grand et la méthode GUYON-MASSONNET donne:

$$\alpha' = \alpha = 1; \quad \theta' = \theta.$$

Effectivement, la courbe  $A = f(\alpha')$  est tout entière à droite du point  $A = 0$ ,  $\alpha' = 1$ , de sorte que  $A_{min} = 0$ .

2. Très grande déformabilité au cisaillement c'est-à-dire  $\delta$  très grand. Dans ce cas,  $\theta/\delta$  est très petit et l'on doit avoir, d'après le par. 1.3

$$\alpha' = 0; \quad \theta' = \infty,$$

ce qui correspond bien au minimum de la courbe  $\theta/\delta = 0$  (fig. 4.1), qui a lieu pour  $A = 1$ .

A partir de ces valeurs de  $A$  qui rendent minimum  $\alpha'$ , on a construit le

diagramme  $\alpha'(\theta/\delta)$  représenté à la figure 4.2, qui permet, dès que le rapport  $\theta/\delta$  est connu, de déterminer la valeur de  $\alpha'$ .

En procédant de la même façon, on a construit le diagramme figure 4.3, de l'expression  $\frac{1}{\sqrt[4]{1-A}}$  en fonction du rapport  $\theta/\delta$ , qui permet, une fois que les valeurs  $\theta/\delta$  sont connues, de déterminer  $\theta'$ .

En définitive, pour tenir compte de façon approchée de la déformation transversale additionnelle due aux efforts tranchants  $T_y$ , il faut:

1. Calculer les rigidités du pont  $\rho_p$ ,  $\rho_E$ ,  $\gamma_p + \gamma_E$  et  $S$ .
2. Calculer les paramètres de référence

$$\theta = \frac{b^4}{l} \sqrt[4]{\frac{l_p}{E}}; \quad \alpha = \frac{\gamma_p + \gamma_E}{2 \sqrt{\rho_p \rho_E}}; \quad \delta = \frac{\pi^2 b}{l^2} \sqrt{S \rho_p}. \quad (4.13)$$

3. Dédire du rapport  $\theta/\delta$  la valeur  $\alpha'$  par la courbe  $\alpha'(\theta/\delta)$  qui, pour  $\alpha = 1$ , est donnée à la figure 4.2.

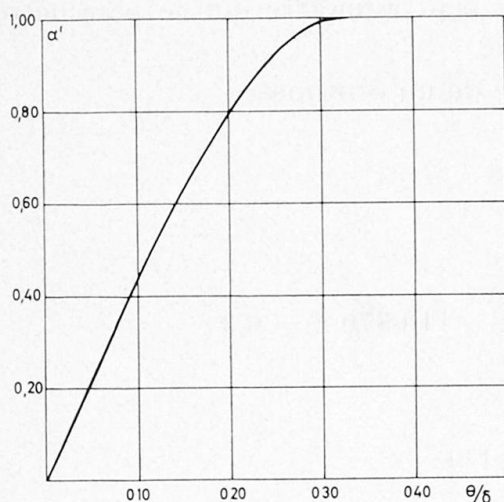


Fig. 4.2.

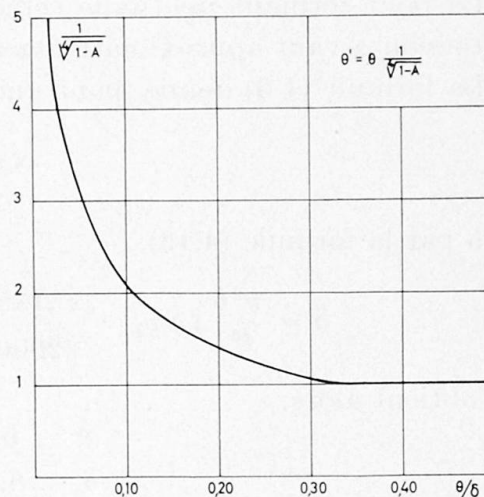


Fig. 4.3.

4. Dédire du rapport  $\theta/\delta$  la valeur de l'expression  $\frac{1}{\sqrt[4]{1-A}}$  qui, pour  $\alpha = 1$ , est donnée à la figure 4.3, puis déduire par (4.9) la valeur de  $\theta'$ .
5. Dédire les lignes d'influence de  $K_{\alpha'}$ , des tables  $K_0$  et  $K_1$ , comme d'habitude, par la relation connue

$$K_{\alpha'} = K_0 + (K_1 - K_0) \sqrt{\alpha'}.$$

On peut noter que, pour des valeurs du rapport  $\theta/\delta$  plus grandes que 0,32, les valeurs de  $\alpha$  et  $\theta$  ne subissent aucune correction.

Pour les ponts ayant ces valeurs du rapport  $\theta/\delta$ , la méthode Guyon-Massonet reste valable sans correction.

### 1.5. Exemple numérique

Soit un pont ( $2b = 27$  m,  $l = 20$  m), composé de 18 poutres en béton précontraint de sections définies par la figure (5.1) (mesures en cm); on trouve:

$$2b = (n+1)b_1 = 18 \cdot 1,50 = 27 \text{ m},$$

$$\rho_p = I_p = 110 \cdot 370 \text{ cm}^4/\text{cm},$$

$$\rho_E = I_E = 98 \cdot 200 \text{ cm}^4/\text{cm},$$

d'où 
$$\theta = \frac{b}{2} \sqrt[4]{\frac{\rho_p}{\rho_E}} = \frac{13,5}{20} \sqrt[4]{\frac{110 \cdot 370}{98 \cdot 200}} = 0,696.$$

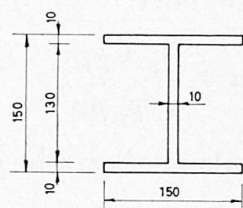


Fig. 5.1.

Le pont formant une dalle cellulaire, on peut admettre que le paramètre de torsion  $\alpha$  vaut approximativement l'unité.

La formule (1.6) donne, pour une tranche de un centimètre

$$S = \frac{32,25}{E},$$

d'où par la formule (4.13),

$$\delta = \frac{\pi^2 b}{l^2} \sqrt{S \rho_p} = \frac{\pi^2 1350}{\sqrt{2000^2}} \sqrt{\frac{32,25}{E} - 110,370 E} = 6,3.$$

On obtient alors:

$$\frac{\theta}{\delta} = \frac{0,696}{6,300} = 0,111.$$

Par la courbe de la figure 4.2, on obtient  $\alpha' = 0,476$ , puis par la courbe de la figure 4.3,  $\theta' = 1,40$ .

## Chapitre 2

### Vérification de la théorie par un essai sur modèle

#### 2.1. Description du modèle

Un modèle en plexiglas du pont examiné dans l'exemple numérique ci-avant a été construit et chargé au laboratoire de Résistance des Matériaux de l'Université de Liège.

Les dimensions du modèle en mm sont:  $810 \times 603 \times 45$ .

Les âmes au nombre de 18 ont 3 mm d'épaisseur et 39 mm de hauteur; elles sont collées aux deux plaques inférieure et supérieure de 3 mm d'épaisseur. Deux entretoises de 3 mm d'épaisseur et 39 mm de hauteur sont collées sur les âmes et les plaques aux endroits des appuis. La photographie fig. 2.1 donne une vue du modèle, de ses appuis et des comparateurs utilisés pour mesurer ses déformations.

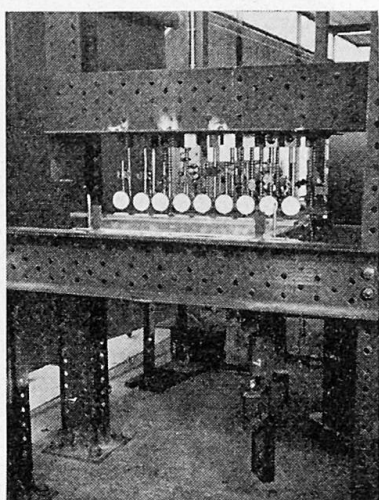


Fig. 2.1.

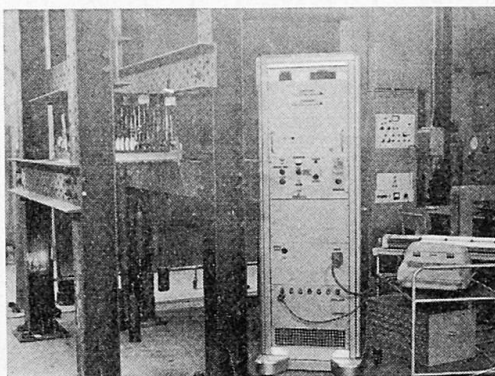


Fig. 2.2.

### 2.2. Appareils de mesure

Neuf comparateurs au micron ont été placés au milieu du pont à des distances de  $0$ ,  $\pm \frac{1}{4}b$ ,  $\pm \frac{1}{2}b$ ,  $\pm \frac{3}{4}b$ ,  $\pm b$  du centre  $0$ .

Dix-huit comparateurs au micron ont été placés à des distances égales sur les appuis.

Neuf fleximètres à jauges de contrainte, placés au milieu du pont et reliés à un appareil «Data-logger» [12], ont permis d'effectuer des mesures instantanées. La photographie fig. 2.2 donne une vue d'ensemble du «Data Logger» avec l'imprimante I.B.M. On a pu ainsi mesurer les déplacements au moment de la mise en charge et suivre leur évolution dans le temps sous charge constante, en effectuant des lectures toutes les cinq minutes.

On a pu constater qu'au bout d'une demi-heure, il n'y avait plus de fluage observable et que les déplacements correspondant à des charges différentes vérifiaient la loi de Hooke.

Ceci établi, nous avons effectué systématiquement les lectures aux comparateurs une demi heure après la mise en charge et la décharge.

### 2.3. Charges

Les charges nécessaires pour évaluer les déplacements  $w_1$  ont été appliquées directement par des poids disposés en lignes de charge sinusoïdale à des distances de  $0$ ,  $\pm \frac{1}{4}b$ ,  $\pm \frac{1}{2}b$ ,  $\pm \frac{3}{4}b$ , de l'axe longitudinal, du modèle. Les onze

charges totalisant un poids de 73,814 kg, ont été calculées pour être égales aux aires partielles comprises entre la sinusoïde et des ordonnées équidistantes; elles ont été (fig. 2.3) pendues au modèle par l'intermédiaire de crochets fixés par collage à la plaque inférieure (fig. 2.4).

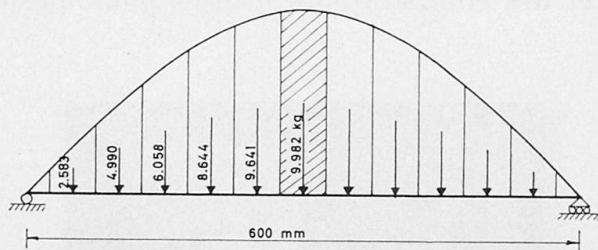


Fig. 2.3.

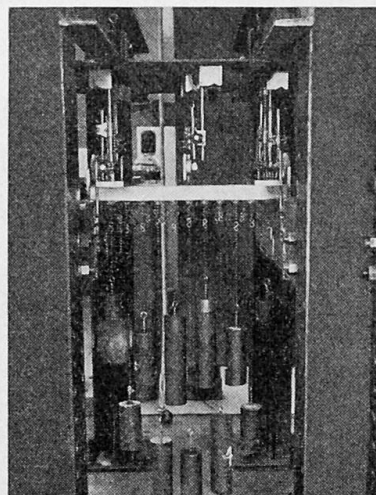


Fig. 2.4.

Le déplacement  $W_{0\text{moyen}}$  au milieu du pont, dû à une charge  $P = 73,814$  kg distribuée selon une surface à directrice sinusoïdale et à génératrices rectilignes, a été évalué, et en appliquant une charge de ce type, et en mesurant expérimentalement la valeur du module  $EI$ .

La figure 2.5 montre la ligne d'influence du coefficient  $K$  pour la poutre 0, obtenue expérimentalement (courbe a), en appliquant la méthode proposée

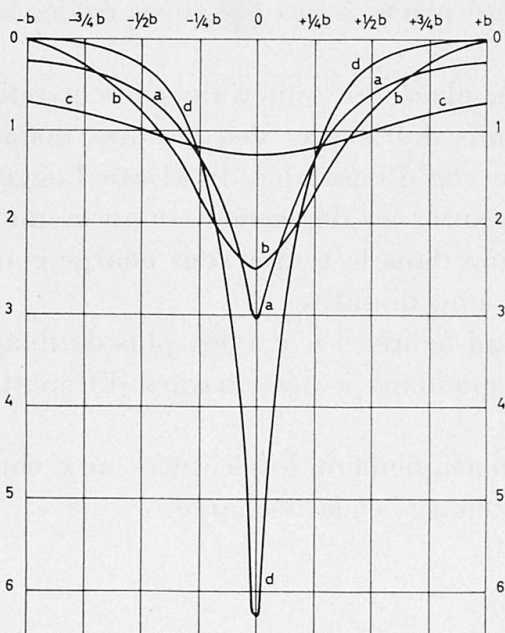


Fig. 2.5.

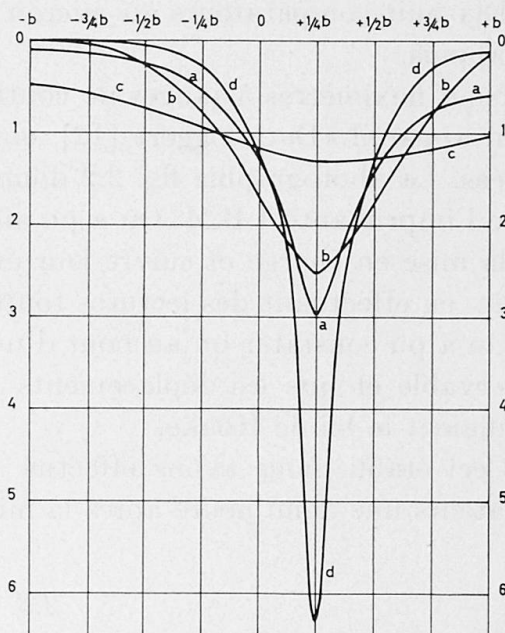


Fig. 2.6.

a) courbe expérimentale, b) méthode proposée, c) méthode Guyon-Massonnet, d) pont extrêmement déformable par cisaillement.

( $\alpha' = 0,476$ ,  $\theta' = 1,40$ ; courbe *b*) en appliquant la méthode Guyon-Massonnet ( $\alpha = 1$ ,  $\theta = 0,696$ ; courbe *c*) et en appliquant la théorie développée au paragraphe 1.3 (courbe *d*).



Fig. 2.7.

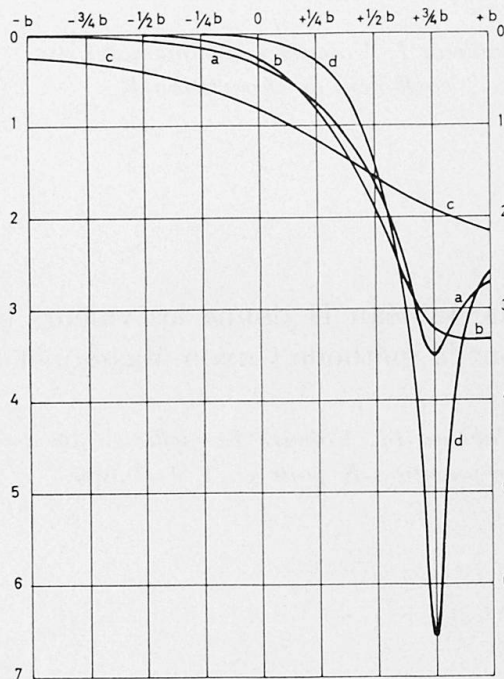


Fig. 2.8.

a) — d) voir fig. 2.5.

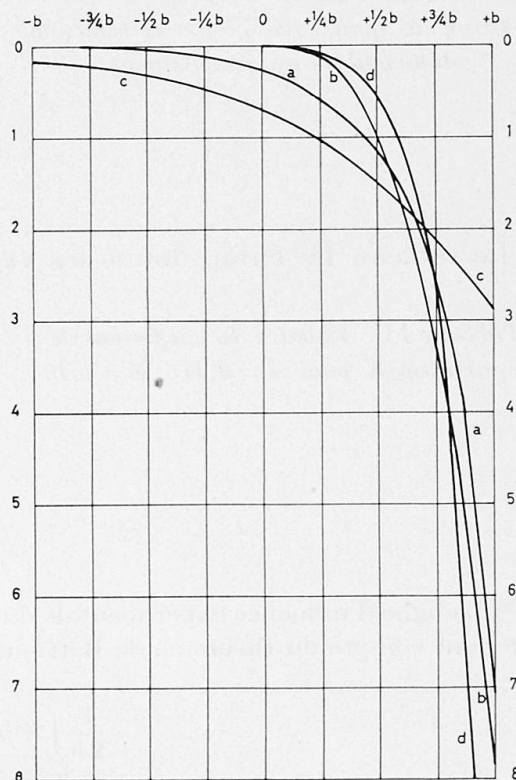


Fig. 2.9. a) — d) voir fig. 2.5.

Les figures 2.6, 2.7, 2.8, 2.9 montrent les mêmes lignes d'influence respectivement pour les poutres  $+1/4 b$ ,  $+1/2 b$ ,  $+3/4 b$ ,  $+b$ .

Le tableau I donne les valeurs de  $K(\epsilon, \eta)$  pour  $\epsilon$  et  $\eta$  variables, obtenues expérimentalement.

Tableau I. Valeurs expérimentales du coefficient de répartition  $K$

| Excentricité de la Charge |       |                 |                |                |       |                |                |                 |       |
|---------------------------|-------|-----------------|----------------|----------------|-------|----------------|----------------|-----------------|-------|
| Position poutre           | - b   | $-\frac{3b}{4}$ | $-\frac{b}{2}$ | $-\frac{b}{4}$ | 0     | $+\frac{b}{4}$ | $+\frac{b}{2}$ | $+\frac{3b}{4}$ | + b   |
| 0                         | 0,251 | 0,349           | 0,600          | 1,336          | 3,047 | 1,336          | 0,600          | 0,349           | 0,251 |
| $\frac{1}{4} b$           | 0,128 | 0,167           | 0,269          | 0,525          | 1,336 | 3,002          | 1,434          | 0,749           | 0,592 |
| $\frac{1}{2} b$           | 0,058 | 0,080           | 0,142          | 0,269          | 0,600 | 1,434          | 3,248          | 1,605           | 1,181 |
| $\frac{3}{4} b$           | 0,036 | 0,053           | 0,080          | 0,167          | 0,349 | 0,749          | 1,605          | 3,535           | 2,720 |
| b                         | 0,020 | 0,036           | 0,058          | 0,128          | 0,251 | 0,592          | 1,181          | 2,720           | 7,096 |

Le tableau II donne les valeurs correspondantes de  $K$  obtenues en appliquant la méthode Guyon-Massonnet ( $\alpha = 1$ ,  $\theta = 0,696$ ).

Tableau II. Valeurs du coefficient de répartition  $K$  pour  $\alpha = 1$ ,  $\theta = 0,696$ .

| Excentricité de la Charge |        |                 |                |                |        |                |                |                 |        |
|---------------------------|--------|-----------------|----------------|----------------|--------|----------------|----------------|-----------------|--------|
| Position poutre           | - b    | $-\frac{3b}{4}$ | $-\frac{b}{2}$ | $-\frac{b}{4}$ | 0      | $+\frac{b}{4}$ | $+\frac{b}{2}$ | $+\frac{3b}{4}$ | + b    |
| 0                         | 0,7113 | 0,8341          | 0,9927         | 1,1715         | 1,2745 | 1,1715         | 0,9927         | 0,8341          | 0,7113 |
| $\frac{1}{4} b$           | 0,4847 | 0,5935          | 0,7431         | 0,9442         | 1,1715 | 1,3267         | 1,2799         | 1,1586          | 1,0476 |
| $\frac{1}{2} b$           | 0,3381 | 0,4292          | 0,5570         | 0,7431         | 0,9927 | 1,2799         | 1,5088         | 1,5501          | 1,5241 |
| $\frac{3}{4} b$           | 0,2453 | 0,3210          | 0,4292         | 0,5935         | 0,8341 | 1,1586         | 1,5501         | 1,9234          | 2,1587 |
| b                         | 0,1814 | 0,2453          | 0,3381         | 0,4847         | 0,7113 | 1,0476         | 1,5241         | 2,1587          | 2,9230 |

Le tableau III donne les mêmes valeurs de  $K$  obtenues en appliquant la théorie développée au paragraphe 1.3.

Tableau III. Valeurs du coefficient de répartition  $K$  pour les ponts extrêmement déformables au cisaillement

| Excentricité de la Charge |        |                  |                 |                 |        |                 |                 |                  |        |
|---------------------------|--------|------------------|-----------------|-----------------|--------|-----------------|-----------------|------------------|--------|
| Position poutre           | - b    | - $\frac{3b}{4}$ | - $\frac{b}{2}$ | - $\frac{b}{4}$ | 0      | + $\frac{b}{4}$ | + $\frac{b}{2}$ | + $\frac{3b}{4}$ | + b    |
| 0                         | 0,0236 | 0,0560           | 0,2700          | 1,3034          | 6,300  | 1,3034          | 0,2700          | 0,0560           | 0,0236 |
| $\frac{1}{4}b$            | 0,0047 | 0,0120           | 0,0560          | 0,2700          | 1,3034 | 6,300           | 1,3053          | 0,2814           | 0,1120 |
| $\frac{1}{2}b$            | 0,0014 | 0,0025           | 0,0115          | 0,0560          | 0,2700 | 1,3053          | 6,3115          | 1,3601           | 0,5399 |
| $\frac{3}{4}b$            | 0,0003 | 0,0019           | 0,0025          | 0,0120          | 0,0560 | 0,2814          | 1,3601          | 6,5699           | 2,6069 |
| b                         | 0      | 0,0003           | 0,0014          | 0,0047          | 0,0236 | 0,1120          | 0,5399          | 2,6069           | 12,600 |

Le tableau IV enfin, donne les valeurs obtenues par la méthode proposée.

Tableau IV. Valeurs du coefficient de répartition  $K$  pour  $\alpha' = 0,476$ ,  $\theta' = 1,40$

| Excentricité de la Charge |         |                  |                 |                 |         |                 |                 |                  |         |
|---------------------------|---------|------------------|-----------------|-----------------|---------|-----------------|-----------------|------------------|---------|
| Position poutre           | - b     | - $\frac{3b}{4}$ | - $\frac{b}{2}$ | - $\frac{b}{4}$ | 0       | + $\frac{b}{4}$ | + $\frac{b}{2}$ | + $\frac{3b}{4}$ | + b     |
| 0                         | -0,0130 | 0,2571           | 0,7757          | 1,7305          | 2,5013  | 1,7305          | 0,7757          | 0,2571           | -0,0130 |
| $\frac{1}{4} b$           | 0,0038  | 0,0653           | 0,2529          | 0,7569          | 1,7305  | 2,5324          | 1,7670          | 0,8057           | 0,1375  |
| $\frac{1}{2} b$           | 0,0226  | 0,0186           | 0,0620          | 0,2529          | 0,7757  | 1,7670          | 2,6420          | 1,9341           | 0,9950  |
| $\frac{3}{4} b$           | 0,0240  | 0,0154           | 0,0186          | 0,0653          | 0,2571  | 0,8057          | 1,9341          | 3,2279           | 3,3514  |
| b                         | 0,0211  | 0,0240           | 0,0226          | 0,0038          | -0,0130 | 0,1375          | 0,9950          | 3,3514           | 7,9028  |

<sup>3)</sup> La ligne d'influence expérimentale du coefficient  $K$ , pour la poutre  $+b$ , a été obtenue en tenant compte du théorème de Betti et de la relation

$$\frac{1}{2b} \int_{-b}^{+b} K(e, y) dy = 1.$$

Compte tenu de ce que les valeurs  $S$  et  $\rho_p$  ne sont pas évaluées expérimentalement, on peut noter une bonne correspondance entre les résultats expérimentaux (tableau I) et les valeurs de  $K$  qui sont proposées (tableau IV), correspondance qui est loin d'être vérifiée, *dans ce cas particulier*, par les valeurs obtenues (tableau II) par la méthode classique de Guyon-Massonnet.

### Bibliographie

1. Y. GUYON: Calcul des ponts larges à poutres multiples solidarisiées par des entretoises. Ann. Ponts et Chaus. de France, p. 553—612, septembre-octobre 1946.
2. CH. MASSONNET: Méthode de calcul des ponts à poutres multiples tenant compte de leur résistance à la torsion. Mém. A.I.P.C., Vol. 10, p. 147—182, 1950.
3. CH. MASSONNET: Contribution au calcul des ponts à poutres multiples. Ann. Trav. Publics Belgique, juin 1950, p. 377 à 424; octobre 1950, p. 749 à 800; décembre 1950, p. 927—964.
4. A. PFLÜGER: Ingenieur-Archiv, Vol. 16, p. 111—120, 1947.
5. E. GIENCKE: Stahlbau, Vol. 24, p. 128—129, 1955.
6. E. GIENCKE: Die Berechnung von Hohlrippenplatten. Stahlbau, Vol. 29, p. 1—11 et p. 47—59, 1960.
7. CH. MASSONNET: Plaques et coques cylindriques orthotropes à nervures dissymétriques. Mém. A.I.P.C., Vol. 19, p. 201 à 230, 1959.
8. A. GANDOLFI: Sulla ripartizione trasversale dei carichi nei ponti a travata. Il Cemento, octobre 1965.
9. A. HOLMBERG: Shear-weak beams on elastic foundation. Mém. A.I.P.C., Vol. 10, p. 69—85, 1950.
10. S. TIMOSHENKO et S. WOJNOWSKY-KRIEGER: Theory of plates and shells, deuxième édition, p. 165—173.
11. K. GIRMANN: Flächentragwerke, 5e édition, p. 583—594.
12. CH. MASSONNET et R. ANSLIJN: Nouveaux développements du laboratoire de résistance des matériaux de l'Université de Liège. Revue Universelle des Mines, n° 8, 1965.

### Résumé

Les auteurs analysent le cas des ponts à structure cellulaire et tels que la déformation des entretoises par cisaillement n'est pas négligeable.

Ils montrent que la généralisation rigoureuse des ponts à poutres multiples, en tenant compte de la déformation par cisaillement, conduit à des calculs laborieux.

Ils présentent une théorie approchée qui a l'avantage d'utiliser les tables existantes de la méthode Guyon-Massonnet en corrigeant simplement les valeurs des paramètres caractéristiques  $\alpha$  et  $\theta$ .

Un essai sur modèle en plexiglas, réalisé par les auteurs, montre que les résultats expérimentaux sont en accord satisfaisant avec la théorie approchée en question.

### Zusammenfassung

Die Verfasser untersuchen Brücken in Zellenbauart und solche, deren Querträgerverformung infolge Schub nicht vernachlässigbar ist.

Sie zeigen, daß die strenge Verallgemeinerung von Mehrbalkenbrücken unter Berücksichtigung der Schubkräfte zu aufwendigen Rechnungen führt.

Die Verfasser geben eine Näherungsberechnung, bei der die vorhandenen Tabellen der Methode Guyon-Massonnet Verwendung finden, sofern die charakteristischen Parameter  $\alpha$  und  $\theta$  berichtigt werden.

Ein von den Verfassern an einem Plexiglasmodell durchgeführter Versuch hat gezeigt, daß die Versuchsergebnisse mit der betreffenden Näherungsberechnung hinreichend übereinstimmen.

### Summary

The authors analyse the case of bridges having a cellular structure and such that deformation of the cross-members due to shear is not negligible.

They demonstrate that the strict generalisation of multi-girder bridges, taking into account deformation due to shear, leads to laborious calculations.

They present an approximate theory which has the advantage of making use of the existing tables of the Guyon-Massonnet method by merely correcting the values of the characteristic parameters  $\alpha$  and  $\theta$ .

A test on a perspex model, carried out by the authors, shows that the experimental results are in satisfactory agreement with the approximate theory in question.