

# Theorie elastischer Balkenreihen

Autor(en): **Spaethe, Gerhard**

Objektyp: **Article**

Zeitschrift: **IABSE publications = Mémoires AIPC = IVBH Abhandlungen**

Band (Jahr): **28 (1968)**

PDF erstellt am: **23.07.2024**

Persistenter Link: <https://doi.org/10.5169/seals-22174>

## **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern.

Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden.

Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

## **Haftungsausschluss**

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

# Theorie elastischer Balkenreihen

*Theory for Series of Elastic Beams*

*Théorie pour des séries de poutres élastiques*

GERHARD SPAETHE

Dr. Ing., Versuchs- und Entwicklungsstelle des Straßenwesens, Berlin, DDR

## 1. Allgemeines

Unter einer Balkenreihe verstehen wir im folgenden ein Tragwerk, welches aus einer Reihe nebeneinander liegender elastischer Stäbe besteht, die sich in einer Linie berühren und in dieser Berührungslinie auf der ganzen Länge gelenkig miteinander verbunden sind.

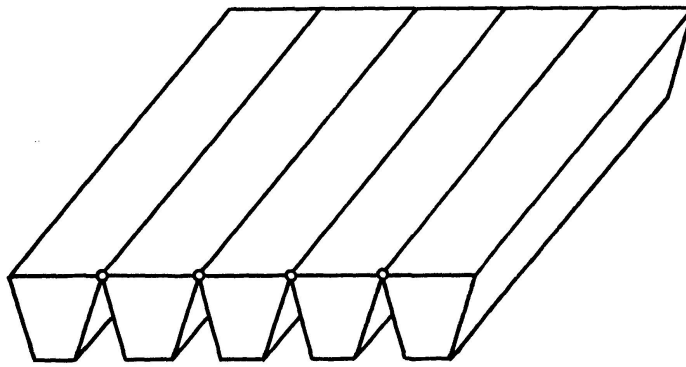


Fig. 1. Balkenreihe.

Solche Systeme gewinnen mit der Verbreitung der Fertigteilbauweise an Bedeutung. Bei der Herstellung von ebenen Tragwerken aus einzelnen stabförmigen Elementen werden vielfach Verbindungen angewendet, die in Querrichtung nur vernachlässigbar kleine Momente übertragen, jedoch gleiche Verschiebungen der Balkenränder erzwingen. Unter Ausnützung der Torsionssteifigkeit der Balken entsteht eine Querverteilung der Schnittgrößen und eine gewisse flächenhafte Tragwirkung.

Als erster hat CSONKA bereits 1936 ein Verfahren zur Berechnung von Balkenreihen angegeben, wobei er sich zunächst [1] auf den Fall beschränkt,

daß die Schubmittelpunkte der Balken und die Gelenke in einer Ebene liegen. Die spätere Erweiterung auf den allgemeineren Fall [2] führt auf ein System gewöhnlicher Differentialgleichungen für die Durchbiegungen der Gelenke<sup>1)</sup>. Die numerische Lösung für den Fall der frei drehbaren Lagerung ergibt sich mit Hilfe von Fourierreihen.

ROESLI [3] betrachtet die Balkenreihe als Kontinuum und geht von der Theorie der orthotropen Platte aus, die er für die besonderen Bedingungen der Balkenreihe erweitert. Dieses Verfahren gilt also unter der Voraussetzung, daß die Zahl der Balken groß ist.

In den letzten Jahren wurden vor allem von tschechischen Autoren Berechnungsverfahren angegeben [4 bis 9]. Sie gehen sämtlich vom Diskontinuum aus, vernachlässigen die gegenseitige Behinderung der Verdrehung der Balken und die daraus resultierenden horizontalen Gelenkkräfte.

Zur Lösung werden entweder Fourierreihen benutzt [6, 7] oder das sich ergebende Differentialgleichungssystem wird geschlossen gelöst [5, 8, 9]. Dabei beschränkt man sich vielfach auf den Sonderfall, daß die Lasten in Querrichtung gesehen mittig auf den Balken stehen.

Vom Verfasser wurde in [10, 11] für den Sonderfall der frei drehbaren Lagerung der Balken und kräftefreien Längsrändern eine geschlossene Lösung angegeben, die es gestattet, auch Einzellasten zu behandeln. Damit wurde die Grundlage für die Berechnung von Einflußfeldern geschaffen.

Alle bisher bekannt gewordenen Arbeiten beschränken sich auf den zwar praktisch wichtigsten, aber auch einfachsten Fall der beidseitig frei drehbaren Lagerung. In der vorliegenden Arbeit wird die in [10, 11] für einen Sonderfall angegebene Theorie in erweiterter und verallgemeinerter Form dargestellt, wobei insbesondere verschiedene technisch wichtige Randbedingungen an den Längs- und Querrändern berücksichtigt werden. Damit wird die Möglichkeit geschaffen, Verformungen, Schnittgrößen, Gelenkkräfte und Auflagerkräfte in beliebig gestützten Balkenreihen mit rechteckigem Grundriß unter beliebiger vertikaler Belastung in geschlossener Form zu berechnen. In dieser Arbeit werden die theoretischen Grundlagen bereitgestellt und die Anwendung der Theorie an einem einfachen Beispiel gezeigt. Eine Einschätzung des Tragverhaltens von Balkenreihen mit einer Darstellung der Ergebnisse numerischer Rechnungen wird an anderer Stelle gegeben.

Im Sinne einer widerspruchsfreien Darstellung der Theorie ist es erforderlich, den folgenden Ableitungen die Torsionstheorie der dünnwandigen Stäbe unter Berücksichtigung der Wölbkrafttorsion [12, 13] zugrunde zu legen. Die bei Vollquerschnitten und dickwandigen Hohlquerschnitten übliche Vernachlässigung der Wölbkrafttorsion ist als Sonderfall mit  $C_T = 0$  enthalten.

Die Theorie eignet sich besonders für eine Auswertung mit elektronischen

---

<sup>1)</sup> Dieses Differentialgleichungssystem stimmt mit System (9) für die Stützungsart Ia nach Fig. 3 überein.

Digitalrechnern. Für die Berechnung von Einflußfeldern frei aufliegender Balkenreihen liegt in der Versuchs- und Entwicklungsstelle des Straßenwesens ein Programm vor, welches seit mehreren Jahren mit Erfolg bei der Projektierung von Fertigteilbrücken angewendet wird.

## 2. Annahmen und Voraussetzungen, Bezeichnungen

Die Balken werden als vollkommen elastische Stäbe im Sinne Stabstatik betrachtet, deren Querschnittsform unter Belastung erhalten bleibt. Alle Balken sind gleich ausgebildet und haben einfach symmetrische Querschnittsform, die sich in Balkenlängsrichtung nicht ändert. Sie liegen alle in einer gemeinsamen horizontalen Ebene, welche senkrecht zu den Symmetrieachsen liegt. Die Schubverformungen aus Querkräften werden vernachlässigt.

Aus Fig. 2 ist die Lage des Koordinatensystems, die Numerierung der Balken und Gelenke sowie die Definition der Schnittgrößen und Gelenkkräfte ersichtlich.

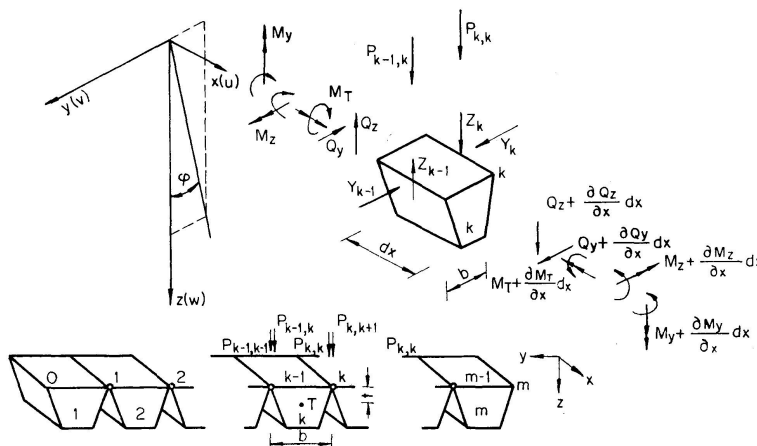


Fig. 2. Definitionen.

Es ist ferner

- $l$  Stützweite der Balken
- $b$  Balkenbreite
- $t$  Abstand zwischen Schubmittelpunkt  $T$  des Balkens und den Gelenklinien in Richtung  $z$ , im folgenden Schubmittelpunktsabstand genannt
- $EJ_y$  Biegesteifigkeit bei Biegung um die  $y$ -Achse
- $EJ_z$  Biegesteifigkeit bei Biegung um die  $z$ -Achse
- $GJ_T$  Saint Venantsche Torsionssteifigkeit
- $EC_T$  Wölbsteifigkeit bezogen auf den Schubmittelpunkt  $T$
- $v_k, w_k$  Verschiebungen der Gelenklinie  $k$  in Richtung  $y$  und  $z$
- $\hat{v}_k, \hat{w}_k$  Verschiebungen des Schubmittelpunktes des Balkens  $k$  in Richtung  $y$  und  $z$

$\varphi_k$  Verdrehung des Balkenquerschnittes  $k$   
 $m$  Anzahl der Balken

Die auf den Balken  $k$  einwirkende beliebige äußere Belastung kann man bei Annahme einer starren Querschnittsform nach dem Hebelgesetz in zwei Linienlasten  $p_{k-1,k}$  und  $p_{k,k}$  aufteilen, die in den Balkenrändern wirken. Es ist ferner

$$p_k = p_{k,k} + p_{k,k+1} \quad (1)$$

die Summe beider am Gelenk  $k$  angreifenden Linienlasten.

Im allgemeinen Fall wird die Gelenkkraft eine bestimmte Richtung im Raum haben. Von ihren drei Komponenten  $X_k$ ,  $Y_k$  und  $Z_k$  wird die Kraft  $X_k$ , die in Richtung der Balkenlängsachse wirkt, vernachlässigt. In [10] wurde der Einfluß dieser Komponente genauer untersucht. Dabei zeigte sich, daß  $X_k$  verhältnismäßig große Werte annehmen kann, jedoch sein Einfluß auf die Schnittkräfte und Spannungen in den Balken bei den im Fertigteilbau üblichen Abmessungen im allgemeinen klein ist. Die im folgenden dargestellte Theorie gilt, wenn der vertikale Abstand zwischen Balkenschwerpunkt und Gelenk genügend klein ist. Bei sehr hohen und schmalen Balken mit Gelenken an den oberen Balkenkanten ist eine genauere Untersuchung zu empfehlen.

### 3. Das Differentialgleichungssystem für die Verschiebungen der Gelenke

Als unbekannte Funktionen werden die Verschiebungen  $w_k$  und  $v_k$  der Gelenke eingeführt. Werden die Balken als Stäbe mit starrer Querschnittsform betrachtet, so können sich alle Gelenke in horizontaler Richtung nur um den gleichen Betrag  $v_k = v$  verschieben.

Das Problem führt auf ein System von gewöhnlichen Differentialgleichungen für die unbekanntenen Durchbiegungen  $w_k$ . Die erste und die letzte Gleichung dieses Systems sind dabei von der Art der Stützung der Längsränder der Balkenreihe abhängig.

In dieser Arbeit werden die in Fig. 3 dargestellten Randbedingungen untersucht. Die dort im Querschnitt gezeichnete Stützung denke man sich über die gesamte Balkenlänge kontinuierlich durchgehend.

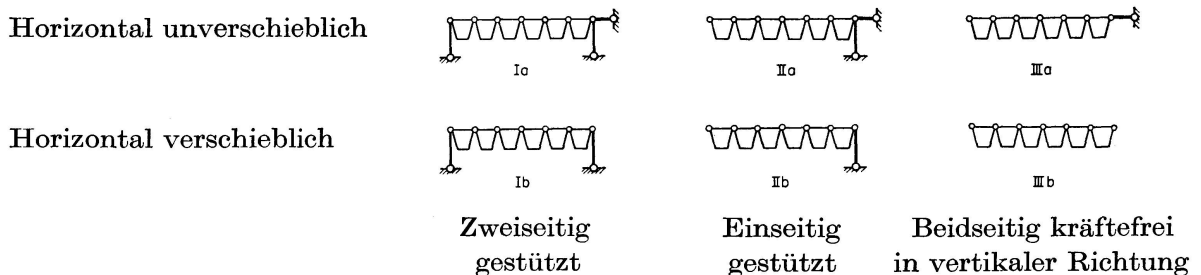


Fig. 3. Randbedingungen an den Längsrändern.

Für einen beliebigen mittleren Balken  $k$  gelten die bekannten Differentialgleichungen der Balkenbiegung und Balkentorsion, die mit den in Fig. 2 definierten Gelenkkräften und äußeren Lasten folgende Form annehmen:

$$\begin{aligned} \frac{E J_y}{l^4} \hat{w}_k^{\dots\dots} &= Z_k - Z_{k-1} + p_{k,k} + p_{k-1,k}, \\ \frac{E J_z}{l^4} \hat{v}_k^{\dots\dots} &= Y_k - Y_{k-1}, \\ \frac{G J_T}{l^2} \varphi_k^{\dots\dots} - \frac{E C_T}{l^4} \varphi_k^{\dots\dots} &= (Z_k + Z_{k-1}) \frac{b}{2} - (Y_k - Y_{k-1}) t + (p_{k,k} - p_{k-1,k}) \frac{b}{2}. \end{aligned} \quad (2)$$

Darin bedeuten Punkte Ableitungen nach der bezogenen Koordinate

$$\xi = x/l.$$

Multipliziert man die drei Gleichungen der Reihe noch mit  $b/2$ ,  $t$  und  $l$  und addiert sie, so ergibt sich

$$\frac{E J_y}{l^4} \frac{b}{2} \hat{w}_k^{\dots\dots} + \frac{E J_z}{l^4} t \hat{v}_k^{\dots\dots} + \frac{G J_T}{l^2} \varphi_k^{\dots\dots} - \frac{E C_T}{l^4} \varphi_k^{\dots\dots} = Z_k b + p_{k,k} b \quad (3)$$

und mit den Faktoren  $b/2$ ,  $-t$  und  $-l$  wird

$$\frac{E J_y}{l^4} \frac{b}{2} \hat{w}_k^{\dots\dots} - \frac{E J_z}{l^4} t \hat{v}_k^{\dots\dots} - \frac{G J_T}{l^2} \varphi_k^{\dots\dots} + \frac{E C_T}{l^4} \varphi_k^{\dots\dots} = -Z_{k-1} b + p_{k-1,k} b. \quad (4)$$

Der Übergang von  $k$  auf  $k+1$  in der letzten Gleichung und Addition ergibt

$$\begin{aligned} \frac{E J_y}{l^4} \frac{b}{2} (\hat{w}_k^{\dots\dots} + \hat{w}_{k+1}^{\dots\dots}) + \frac{E J_z}{l^4} t (\hat{v}_k^{\dots\dots} - \hat{v}_{k+1}^{\dots\dots}) + \frac{G J_T}{l^2} (\varphi_k^{\dots\dots} - \varphi_{k+1}^{\dots\dots}) \\ - \frac{E C_T}{l^4} (\varphi_k^{\dots\dots} - \varphi_{k+1}^{\dots\dots}) = b (p_{k,k} + p_{k,k+1}) = b p_k. \end{aligned} \quad (5)$$

Aus Fig. 4 können die Beziehungen zwischen den Verschiebungen des Schubmittelpunktes  $\hat{w}_k$ ,  $\hat{v}_k$  und der Balkenverdrehung  $\varphi_k$  einerseits und den Verschiebungen der Gelenke  $w_k$ ,  $v$  andererseits abgelesen werden.

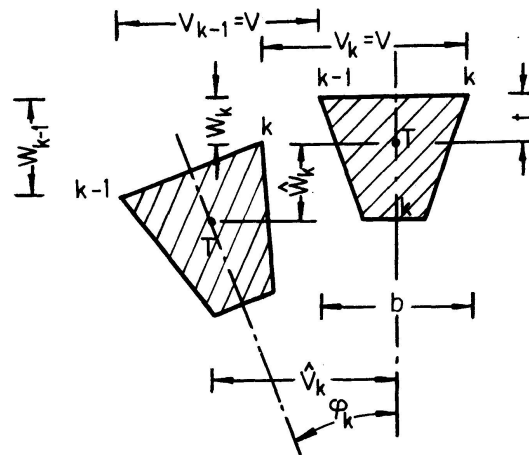


Fig. 4. Verformter Querschnitt.

$$\hat{w}_k = \frac{1}{2}(w_{k-1} + w_k), \quad \varphi_k = \frac{1}{b}(w_{k-1} - w_k), \quad \hat{v}_k = v - \frac{t}{b}(w_{k-1} - w_k). \quad (6)$$

Bei der Stützung I a, II a und III a ist  $v = 0$ .

Werden die Gleichungen (6) in (5) eingesetzt und noch folgende dimensionslose Abkürzungen eingeführt

$$\begin{aligned} f_1 &= \frac{1}{4} \left( \frac{b}{l} \right)^2 \frac{E J_y}{G J_T} + \left( \frac{t}{l} \right)^2 \frac{E J_z}{G J_T} + \frac{E C_T}{l^2 G J_T}, \\ f_2 &= \frac{1}{4} \left( \frac{b}{l} \right)^2 \frac{E J_y}{G J_T} - \left( \frac{t}{l} \right)^2 \frac{E J_z}{G J_T} - \frac{E C_T}{l^2 G J_T}, \end{aligned} \quad (7)$$

so erhält man nach kurzer Rechnung die Differentialgleichung für eine mittlere Gelenkfuge in der Form

$$f_2 w_{k-1}^{\dots\dots} + 2 f_1 w_k^{\dots\dots} + f_2 w_{k+1}^{\dots\dots} + w_{k-1}^{\dots\dots} - 2 w_k^{\dots\dots} + w_{k+1}^{\dots\dots} = \frac{b^2 l^2}{G J_T} p_k. \quad (8)$$

Es ist bemerkenswert, daß hier die Horizontalverschiebung  $v$  der Gelenke herausfällt. Die Randgleichungen für vertikal gestützte Ränder ergeben sich aus (8) mit  $w_0 = 0$  bzw.  $w_m = 0$ .

Die Randgleichungen für kräftefreie Ränder erhält man auf ähnlichem Wege wie oben durch Elimination der Gelenkkräfte aus den Gleichungen (2), in denen man  $k = 1$  zu setzen und die Randbedingungen  $Z_0 = Y_0 = 0$  zu beachten hat.

Es ergibt sich für den freien Rand 0

$$f_1 w_0^{\dots\dots} + f_2 w_1^{\dots\dots} - w_0^{\dots\dots} + w_1^{\dots\dots} - \frac{t b}{l^2} \frac{E J_z}{G J_T} v^{\dots\dots} = \frac{b^2 l^2}{G J_T} p_0 \quad (9)$$

und für den freien Rand  $m$

$$f_2 w_{m-1}^{\dots\dots} + f_1 w_m^{\dots\dots} + w_{m-1}^{\dots\dots} - w_m^{\dots\dots} + \frac{t b}{l^2} \frac{E J_z}{G J_T} v^{\dots\dots} = \frac{b^2 l^2}{G J_T} p_m. \quad (9)$$

Hier tritt als weitere unbekannt Funktion die Horizontalverschiebung  $v$  auf. Diese kann in folgender Weise eliminiert werden. Es ist unmittelbar ersichtlich, daß gelten muß

$$Y_1 + (Y_2 - Y_1) + (Y_3 - Y_2) + \dots + (Y_{m-1} - Y_{m-2}) - Y_{m-1} = 0.$$

Daraus folgt mit der zweiten Gleichung (2)

$$\hat{v}_1^{\dots\dots} + \hat{v}_2^{\dots\dots} + \hat{v}_3^{\dots\dots} + \dots + \hat{v}_{m-1}^{\dots\dots} + \hat{v}_m^{\dots\dots} = 0.$$

In diese setzen wir die dritte Gleichung (6) ein

$$v^{\dots\dots} - (w_0^{\dots\dots} - w_1^{\dots\dots}) \frac{t}{b} + v^{\dots\dots} - (w_1^{\dots\dots} - w_2^{\dots\dots}) \frac{t}{b} + \dots + v^{\dots\dots} - (w_{m-1}^{\dots\dots} - w_m^{\dots\dots}) \frac{t}{b} = 0$$

und erhalten für die Stützung III b

$$v^{\cdots} = \frac{t}{m b} (w_0^{\cdots} - w_m^{\cdots}). \quad (10)$$

Bei der Stützung II b wird mit  $w_m = 0$

$$v^{\cdots} = \frac{t}{m b} w_0^{\cdots}. \quad (11)$$

Dies in (9) eingesetzt ergibt die gesuchten Randgleichungen.

Stützung II b	Rand 0
$\left[ f_1 - \frac{1}{m} \left( \frac{t}{l} \right)^2 \frac{E J_z}{G J_T} \right] w_0^{\cdots} + f_2 w_1^{\cdots} - w_0^{\ddot{}} + w_1^{\ddot{}}$	$= \frac{b^2 l^2}{G J_T} p_0,$
Stützung III b	Rand 0
$\left[ f_1 - \frac{1}{m} \left( \frac{t}{l} \right)^2 \frac{E J_z}{G J_T} \right] w_0^{\cdots} + f_2 w_1^{\cdots} + \frac{1}{m} \left( \frac{t}{l} \right)^2 \frac{E J_z}{G J_T} w_m^{\cdots} - w_0^{\ddot{}} + w_1^{\ddot{}}$	$= \frac{b^2 l^2}{G J_T} p_0,$
	Rand $m$
$\frac{1}{m} \left( \frac{t}{l} \right)^2 \frac{E J_z}{G J_T} w_0^{\cdots} + f_2 w_{m-1}^{\cdots} + \left[ f_1 - \frac{1}{m} \left( \frac{t}{l} \right)^2 \frac{E J_z}{G J_T} \right] w_m^{\cdots} + w_{m-1}^{\ddot{}} - w_m^{\ddot{}}$	$= \frac{b^2 l^2}{G J_T} p_m.$

Diese Ergebnisse lassen sich in übersichtlicher Form in Matrixschreibweise zusammenfassen. Wir schreiben das Differentialgleichungssystem für die Berechnung der Balkenreihe in der Form

$$(\mathfrak{A} + \mathfrak{S}) w^{\cdots} + \mathfrak{B} w^{\ddot{}} = \frac{b^2 l^2}{G J_T} p. \quad (12)$$

Darin sind  $\mathfrak{A}$ ,  $\mathfrak{B}$  und  $\mathfrak{S}$  symmetrische Matrizen mit

$m - 1$	Zeilen und Spalten bei Stützung I,
$m$	Zeilen und Spalten bei Stützung II
und $m + 1$	Zeilen und Spalten bei Stützung III.

Ihr Aufbau ist für die verschiedenen Stützungsarten aus Tafel 1 ersichtlich.

$\mathfrak{B}$  ist bei Stützung III singulär, was man sofort erkennt, wenn man ihre Zeilenvektoren addiert, in den Fällen I und II jedoch nichtsingulär. Die Matrix  $\mathfrak{A}$  ist im allgemeinen nichtsingulär, sie wird jedoch bei Stützung III für den Sonderfall  $f_1 = f_2$  ebenfalls singulär. Diesen Fall, bei dem sämtliche Matrizen der Differentialgleichung (12) singulär sind, wollen wir bei den weiteren Ableitungen zunächst ausschließen. Auf ihn wird weiter unten noch kurz eingegangen. Die Matrix  $\mathfrak{S}$  ist nur in den Fällen II b und III b nicht gleich Null. Bei Stützung III b ist sie an ihren vier Ecken besetzt, während bei Stützung II b nur ein einziger Koeffizient von Null verschieden ist.

Die gegebenen äußeren Belastungsfunktionen werden zum Vektor  $p$  und die gesuchten Durchbiegungsfunktionen zum Vektor  $w$  zusammengefaßt.



Tafel I

Stützung der Längsränder		Vertikal		
		I	II	III
	a	$\mathfrak{A} = \begin{bmatrix} 2f_1 & f_2 & & & \\ f_2 & 2f_1 & f_2 & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & f_2 & 2f_1 & f_2 \\ & & & & f_2 & 2f_1 \end{bmatrix}$	$\mathfrak{A} = \begin{bmatrix} f_1 & f_2 & & & \\ f_2 & 2f_1 & f_2 & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & f_2 & 2f_1 & f_2 \\ & & & & f_2 & 2f_1 \end{bmatrix}$	$\mathfrak{A} = \begin{bmatrix} f_1 & f_2 & & & \\ f_2 & 2f_1 & f_2 & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & f_2 & 2f_1 & f_2 \\ & & & & f_2 & 2f_1 \end{bmatrix}$
	b	$\mathfrak{B} = \begin{bmatrix} -2 & 1 & & & \\ 1 & -2 & 1 & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & 1 & -2 & 1 \\ & & & & 1 & -2 \end{bmatrix}$	$\mathfrak{B} = \begin{bmatrix} -1 & 1 & & & \\ 1 & -2 & 1 & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & 1 & -2 & 1 \\ & & & & 1 & -2 \end{bmatrix}$	$\mathfrak{B} = \begin{bmatrix} -1 & 1 & & & \\ 1 & -2 & 1 & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & 1 & -2 & 1 \\ & & & & 1 & -1 \end{bmatrix}$
Horizontal	a	$\mathfrak{S} = 0$	$\mathfrak{S} = 0$	$\mathfrak{S} = 0$
	b	$\mathfrak{S} = 0$	$\mathfrak{S} = \frac{1}{m} \left( \frac{t}{l} \right)^2 \frac{E J_2}{G J_T} \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ -1 \end{bmatrix}$	$\mathfrak{S} = \frac{1}{m} \left( \frac{t}{l} \right)^2 \frac{E J_2}{G J_T} \begin{bmatrix} -1 & +1 \\ +1 & -1 \end{bmatrix}$
Anzahl der Zeilen u. Spalten		$m - 1$	$m$	$m + 1$

$$\mathfrak{p} = \begin{bmatrix} \vdots \\ p_j \\ \vdots \end{bmatrix}, \quad \mathfrak{w} = \begin{bmatrix} \vdots \\ w_j \\ \vdots \end{bmatrix}, \quad (13)$$

mit  $j = 1, 2, 3 \dots (m-1)$  bei Stützung I,  
 $j = 0, 1, 2 \dots (m-1)$  bei Stützung II  
 und  $j = 0, 1, 2 \dots m$  bei Stützung III.

Es ist bemerkenswert, daß bei der Stützungsart I b keine Horizontalverschiebung  $v$  auftreten kann und somit der Verformungs- und Spannungszustand stets mit dem des Falles I a identisch ist. Im Sonderfall  $t = 0$ , wenn die Gelenke und die Schubmittelpunkte sämtlicher Balken in einer Ebene liegen, wird auch bei den Stützungen II b und III b die Horizontalverschiebung zu Null.

Das Differentialgleichungssystem (12) ist die Grundgleichung für die Berechnung von Balkenreihen. Gelingt es, dieses System für eine bestimmte Balkenreihe unter der vorgegebenen Belastung  $\mathfrak{p}$  bei Berücksichtigung aller aus der Art der Stützung und der Belastung sich ergebenden Randbedingungen zu integrieren, so ist damit die strenge Lösung des Problems gefunden. Sobald die Durchbiegungen  $\mathfrak{w}$  der Gelenke bekannt sind, können die Schnittgrößen, Gelenkkräfte und Auflagerkräfte aus den im Abschnitt 6 angegebenen Beziehungen ermittelt werden.

#### 4. Die Lösung des Differentialgleichungssystems

Es gelingt, das System (12) bei den vier Stützungsarten in geschlossener Form zu lösen, in denen die Matrix  $\mathfrak{S} = 0$  ist. Es läßt sich jedoch zeigen, daß bei den beiden übrigen Stützungsarten II b und III b der Einfluß von  $\mathfrak{S}$  auf die Vertikalverschiebungen  $\mathfrak{w}$  der Gelenke von sehr geringem Einfluß ist. Um auch in diesen beiden Fällen mit einem erträglichen Aufwand zu einer Lösung zu kommen, wird  $\mathfrak{S}$  vernachlässigt und die Durchbiegungen  $\mathfrak{w}$  werden stets aus dem vereinfachten System

$$\mathfrak{A} \mathfrak{w}'''' + \mathfrak{B} \mathfrak{w}'' = \frac{\{b^2 l^2}{G J_T} \mathfrak{p} \quad (14)$$

berechnet. Die Ermittlung der Horizontalverschiebungen  $v$  erfolgt dann anschließend aus der Differentialgleichung (10) bzw. (11).

Dieses Vorgehen bedeutet geometrisch, daß die Durchbiegungen  $w$  unter der Annahme berechnet werden, daß die Balkenreihe seitlich durch eine Kraft  $Y_m$  gestützt ist. Anschließend wird durch eine Horizontalverschiebung dieses  $Y_m$  zu Null gemacht. Dabei werden die unter der Annahme  $v = 0$  berechneten Durchbiegungen  $w$  beibehalten. Diese Näherung wird um so besser Werte liefern, je kleiner der Schubmittelpunktsabstand  $t$ , je größer die Stützweite  $l$  und die Balkenzahl  $m$  ist.

Wir betrachten das homogene System

$$\mathfrak{A} w^{\dots} + \mathfrak{B} w^{\dots} = 0 \quad (15)$$

und machen den Ansatz

$$w = \varkappa_k e^{\lambda_k \xi} \quad (16)$$

mit

$$\varkappa_k = \begin{bmatrix} \vdots \\ x_{jk} \\ \vdots \end{bmatrix}, \quad \begin{array}{l} j = 1, 2, \dots, (m-1) \text{ Stützung I,} \\ j = 0, 1, \dots, (m-1) \text{ Stützung II,} \\ j = 0, 1, \dots, m \text{ Stützung III.} \end{array}$$

Dieser Ansatz, in (15) eingesetzt, führt auf das Eigenwertproblem

$$(\mathfrak{A} \lambda_k^2 + \mathfrak{B}) \lambda_k^2 \varkappa_k = 0.$$

Die Eigenwerte  $\lambda_{k,1} = \lambda_{k,2} = 0$  interessieren uns nicht weiter. Wir fassen das homogene Gleichungssystem

$$(\mathfrak{A} \lambda_k^2 + \mathfrak{B}) \varkappa_k = 0 \quad (17)$$

als System von Differenzgleichungen auf. Die  $i$ -te Gleichung lautet ausführlich hingeschrieben

$$(f_2 \lambda_k^2 + 1) x_{j-1,k} + 2(f_1 \lambda_k^2 - 1) x_{j,k} + (f_2 \lambda_k^2 + 1) x_{j+1,k} = 0$$

oder mit

$$\cos \psi_k = -\frac{f_1 \lambda_k^2 - 1}{f_2 \lambda_k^2 + 1}, \quad (18)$$

$$x_{j-1,k} - 2x_{j,k} \cos \psi_k + x_{j+1,k} = 0. \quad (19)$$

Der Ansatz

$$x_{j,k} = r^j$$

liefert

$$r^2 - 2r \cos \psi_k + 1 = 0 \quad i = \sqrt{-1}$$

$$r_{1,2} = \cos \psi_k \pm \sqrt{\cos^2 \psi_k - 1} = \cos \psi_k \pm i \sin \psi_k = e^{\pm i \psi_k}.$$

Daraus folgt die allgemeine Lösung des Systems von homogenen Differenzgleichungen (17)

$$x_{j,k} = A_1 r_1^j + A_2 r_2^j = A_1 e^{ij \psi_k} + A_2 e^{-ij \psi_k} = B_1 \cos j \psi_k + B_2 \sin j \psi_k. \quad (20)$$

Darin sind  $B_1$  und  $B_2$  reelle Konstanten, deren Größe aus der ersten und letzten Gleichung des Systems (17) bzw. (19) ermittelt werden kann. Diese Randgleichungen sind je nach der Stützungsart verschieden. Wir zeigen hier den Rechnungsgang für die Stützung II. Die erste Gleichung lautet mit  $j=0$

$$-x_{0,k} \cos \psi_k + x_{1,k} = 0$$

und mit (20)

$$-B_1 \cos \psi_k + B_1 \cos \psi_k + B_2 \sin \psi_k = 0.$$

Daraus folgt  $B_2 = 0$ .

Aus der letzten Gleichung

$$x_{m-2,k} - 2x_{m-1,k} \cos \psi_k = 0$$

ergibt sich mit  $B_2 = 0$

$$B_1 [\cos(m-2) \psi_k - 2 \cos(m-1) \psi_k \cos \psi_k] = 0$$

und nach kurzer Rechnung

$$\cos m \psi_k = 0, \quad m \psi_k = \frac{\pi}{2} + k \pi, \quad \psi_k = \frac{(2k+1)\pi}{2m}.$$

Wir setzen dies in (18) ein und lösen nach den gesuchten Eigenwerten  $\lambda_k^2$  auf.

$$\lambda_k^2 = \frac{1 - \cos \frac{(2k+1)\pi}{2m}}{f_1 + f_2 \cos \frac{(2k+1)\pi}{2m}}, \quad k = 0, 1, 2, \dots, (m-1). \quad (21)$$

Den zugehörigen Eigenvektor  $\mathfrak{x}_k$  erhält man, wenn man die noch freie Konstante  $B_1 = 1$  setzt, unter Beachtung von  $B_2 = 0$  aus (20) zu

$$\mathfrak{x}_k = \begin{bmatrix} \cos \frac{0(2k+1)\pi}{2m} \\ \cos \frac{1(2k+1)\pi}{2m} \\ \vdots \\ \cos \frac{j(2k+1)\pi}{2m} \\ \vdots \\ \cos \frac{(m-1)(2k+1)\pi}{2m} \end{bmatrix}.$$

In dieser Form ist  $\mathfrak{x}_k$  bezüglich der Matrix  $\mathfrak{A}$  orthogonal, jedoch nicht normiert, so daß gilt

$$\mathfrak{x}'_k \mathfrak{A} \mathfrak{x}_j = \begin{cases} 0 & \text{für } j \neq k, \\ d_k & \text{für } j = k. \end{cases} \quad (22)$$

Die  $m$  Eigenvektoren  $\mathfrak{x}_k$  werden folgendermaßen zur quadratischen, nicht-symmetrischen Matrix  $\mathfrak{X}$  zusammengefaßt.

$$\begin{aligned} \mathfrak{X} &= (\mathfrak{x}_0, \mathfrak{x}_1, \mathfrak{x}_2, \dots, \mathfrak{x}_k, \dots, \mathfrak{x}_{m-1}), \\ \mathfrak{X} &= (x_{j,k}) \quad \text{mit} \quad x_{j,k} = \cos \frac{j(2k+1)\pi}{2m} \\ &\quad \text{und } j = 0, 1, 2, \dots, (m-1), \\ &\quad \quad \quad k = 0, 1, 2, \dots, (m-1). \end{aligned}$$

Oder ausführlich hingeschrieben:

$$\mathfrak{X} = \begin{bmatrix} \cos \frac{0 \cdot 1 \pi}{2m} & \cos \frac{0 \cdot 3 \pi}{2m} & \cos \frac{0 \cdot 5 \pi}{2m} & \dots & \cos \frac{0(2m-1)\pi}{2m} \\ \cos \frac{1 \cdot 1 \pi}{2m} & \cos \frac{1 \cdot 3 \pi}{2m} & \cos \frac{1 \cdot 5 \pi}{2m} & & \cos \frac{1(2m-1)\pi}{2m} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ \cos \frac{(m-1) 1 \pi}{2m} & \cos \frac{(m-1) 3 \pi}{2m} & \cos \frac{(m-1) 5 \pi}{2m} & \dots & \cos \frac{(m-1)(2m-1)\pi}{2m} \end{bmatrix}.$$

Dann kann man die Gleichungen (22) zur Matrizengleichung

$$\mathfrak{X}' \mathfrak{A} \mathfrak{X} = \mathfrak{D} = \text{Diag} (d_k) \quad (23)$$

zusammenfassen.

Die Berechnung der Koeffizienten der Diagonalmatrix  $\mathfrak{D}$  kann in üblicher Weise nach (23) erfolgen. Zur Rechenvereinfachung und mit Rücksicht auf eine spätere Anwendung bei der Formulierung der Randbedingungen für elastisch senkbare Stützung spalten wir die Matrix  $\mathfrak{A}$  folgendermaßen auf:

$$\mathfrak{A} = f_1 \mathfrak{A}_1 + f_2 \mathfrak{A}_2 \quad (24)$$

mit

$$\mathfrak{A}_1 = \begin{bmatrix} 1 & & & & \\ & 2 & & & \\ & & 2 & & \\ & & & \ddots & \\ & & & & 2 \\ & & & & & 2 \end{bmatrix}, \quad \mathfrak{A}_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & & & \\ 1 & 0 & 1 & & \\ & 1 & 0 & 1 & \\ & & & \ddots & \\ & & & & 1 & 0 & 1 \\ & & & & & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Dann ist

$$\mathfrak{D} = f_1 \mathfrak{X}' \mathfrak{A}_1 \mathfrak{X} + f_2 \mathfrak{X}' \mathfrak{A}_2 \mathfrak{X} = f_1 \mathfrak{D}_1 + f_2 \mathfrak{D}_2.$$

Führt man die Matrizenmultiplikationen im einzelnen durch, so erhält man nach längerer aber elementarer Rechnung, wobei zu beachten ist, daß allgemein

$$\sum_{j=1}^n \cos j \alpha = \frac{\sin \left( n + \frac{1}{2} \right) \alpha - \sin \frac{\alpha}{2}}{2 \sin \frac{\alpha}{2}}$$

gilt, die folgenden Ergebnisse:

$$\mathfrak{D}_1 = \text{Diag} (d_{1,k}) = m \begin{bmatrix} 1 & & & & \\ & 1 & & & \\ & & 1 & & \\ & & & \ddots & \\ & & & & 1 \\ & & & & & 1 \end{bmatrix} = m \mathfrak{E},$$

$$\mathfrak{D}_2 = \text{Diag} (d_{2,k}) = m \begin{bmatrix} \cos \frac{2 \cdot 0 + 1}{2 m} \pi & & & & \\ & \cos \frac{2 \cdot 1 + 1}{2 m} \pi & & & \\ & & \cos \frac{2 \cdot 2 + 1}{2 m} \pi & & \\ & & & \ddots & \\ & & & & \cos \frac{2(m-1) + 1}{2 m} \pi \end{bmatrix}, \quad (25)$$

$$\mathfrak{D} = f_1 \mathfrak{D}_1 + f_2 \mathfrak{D}_2 = m \begin{bmatrix} f_1 + f_2 \cos \frac{2 \cdot 0 + 1}{2m} \pi \\ f_1 + f_2 \cos \frac{2 \cdot 1 + 1}{2m} \pi \\ f_1 + f_2 \cos \frac{2 \cdot 2 + 1}{2m} \pi \\ \dots \\ f_1 + f_2 \cos \frac{2(m-1) + 1}{2m} \pi \end{bmatrix}.$$

Die hier für die Stützung II gezeigten Ableitungen lassen sich in ähnlicher Weise auch für die beiden anderen Stützungsarten I und III durchführen. Die Ergebnisse sind in der Tafel 2 übersichtlich zusammengestellt.

Die Eigenwerte  $\lambda_k^2$  sind sämtlich verschieden und reell und für die Stützungen I und II stets positiv. Bei Stützung III ist der erste Eigenwert  $\lambda_0^2$  immer gleich Null. Bei den Matrizen  $\mathfrak{D}_1$  und  $\mathfrak{D}_2$  beachte man im Fall III den Faktor 2 beim ersten und letzten Koeffizienten. Die quadratische Matrix  $\mathfrak{X}$  ist in den Fällen I und III symmetrisch, im Fall II jedoch nichtsymmetrisch.

Faßt man die Eigenwerte  $\lambda_k^2$  zur Diagonalmatrix

$$A = \text{Diag}(\lambda_k^2)$$

zusammen, so läßt sich die Gesamtheit der Gleichungen (17) in Form der Matrixgleichung

$$\mathfrak{A} \mathfrak{X} A + \mathfrak{B} \mathfrak{X} = 0$$

schreiben. Linksmultiplikation mit  $\mathfrak{X}'$  ergibt

$$\mathfrak{X}' \mathfrak{A} \mathfrak{X} A + \mathfrak{X}' \mathfrak{B} \mathfrak{X} = 0$$

oder mit (23)

$$\mathfrak{D} A + \mathfrak{X}' \mathfrak{B} \mathfrak{X} = 0. \quad (26)$$

Das Differentialgleichungssystem (14) läßt sich nun auf Orthogonalform transformieren, wenn man an Stelle der Durchbiegungen  $w_k$  der Gelenke neue unbekannte Funktionen  $g_k$  einführt, die mit  $w_k$  durch die Transformationsbeziehung

$$w = \mathfrak{X} g \quad (27)$$

verknüpft sind. Wird diese in (14) eingesetzt, so ergibt sich

$$\mathfrak{A} \mathfrak{X} g \cdots + \mathfrak{B} \mathfrak{X} g \ddot{\phantom{g}} = \frac{b^2 l^2}{G J_T} p$$

und nach Multiplikation mit  $\mathfrak{X}'$  von links

$$\mathfrak{X}' \mathfrak{A} \mathfrak{X} g \cdots + \mathfrak{X}' \mathfrak{B} \mathfrak{X} g \ddot{\phantom{g}} = \frac{b^2 l^2}{G J_T} \mathfrak{X}' p.$$

Tafel 2

Stützung der Längsränder	I	II	III
Indizes	$j = 1, 2, 3 \dots (m-1)$ $k = 1, 2, 3 \dots (m-1)$	$j = 0, 1, 2 \dots (m-1)$ $k = 0, 1, 2 \dots (m-1)$	$j = 0, 1, 2 \dots m$ $k = 0, 1, 2 \dots m$
Eigenwerte	$\lambda_k^2 = \frac{1 - \cos \frac{k\pi}{m}}{f_1 + f_2 \cos \frac{k\pi}{m}}$	$\lambda_k^2 = \frac{1 - \cos \frac{(2k+1)\pi}{2m}}{f_1 + f_2 \cos \frac{(2k+1)\pi}{2m}}$	$\lambda_k^2 = \frac{1 - \cos \frac{k\pi}{m}}{f_1 + f_2 \cos \frac{k\pi}{m}}$
Koeff. der Matrix $\mathfrak{K} = (x_{jk})$	$x_{jk} = \sin \frac{jk\pi}{m}$	$x_{jk} = \cos \frac{j(2k+1)\pi}{2m}$	$x_{jk} = \cos \frac{jk\pi}{m}$
Diagonal-matrizen $\mathfrak{D}_1$	$\mathfrak{D}_1 = m \begin{bmatrix} 1 & & & \\ & 1 & & \\ & & \dots & \\ & & & 1 & \\ & & & & 1 \end{bmatrix}$	$\mathfrak{D}_1 = m \begin{bmatrix} 1 & & & \\ & 1 & & \\ & & \dots & \\ & & & 1 & \\ & & & & 1 \end{bmatrix}$	$\mathfrak{D}_1 = m \begin{bmatrix} 2 & & & \\ & 1 & & \\ & & 1 & \\ & & & \dots & \\ & & & & 1 & \\ & & & & & 2 \end{bmatrix}$
Diagonal-matrizen $\mathfrak{D}_2$	$\mathfrak{D}_2 = m \begin{bmatrix} \cos \frac{1}{m} \pi & & & \\ & \cos \frac{2}{m} \pi & & \\ & & \cos \frac{3}{m} \pi & \\ & & & \dots & \\ & & & & \cos \frac{m-1}{m} \pi \end{bmatrix}$	$\mathfrak{D}_2 = m \begin{bmatrix} \cos \frac{2 \cdot 0 + 1}{2m} \pi & & & \\ & \cos \frac{2 \cdot 1 + 1}{2m} \pi & & \\ & & \cos \frac{2 \cdot 2 + 1}{2m} \pi & \\ & & & \dots & \\ & & & & \cos \frac{2(m-1) + 1}{2m} \pi \end{bmatrix}$	$\mathfrak{D}_2 = m \begin{bmatrix} 2 \cos \frac{0}{m} \pi & & & \\ & \cos \frac{1}{m} \pi & & \\ & & \cos \frac{2}{m} \pi & \\ & & & \dots & \\ & & & & \cos \frac{(m-1)}{m} \pi & \\ & & & & & 2 \cos \frac{m}{m} \pi \end{bmatrix}$

Führt man hier (23) und (26) ein, so erhält man das Differentialgleichungssystem in der entkoppelten Form

$$\mathfrak{D} g^{\dots} - \mathfrak{D} A g^{\dots} = \frac{b^2 l^2}{G J_T} \mathfrak{X}' p$$

$$\text{oder} \quad g^{\dots} - A g^{\dots} = \frac{b^2 l^2}{G J_T} \mathfrak{D}^{-1} \mathfrak{X}' p. \quad (28)$$

Die  $k$ -te Einzelgleichung lautet

$$g_k^{\dots} - \lambda_k^2 g_k^{\dots} = \frac{b^2 l^2}{G J_T} \frac{\mathfrak{X}'_k p}{d_k} \quad (29)$$

und ihre allgemeine Lösung

$$g_k = A_k + B_k \xi + C_k \sinh \lambda_k \xi + D_k \cosh \lambda_k \xi + P_k^*(\xi). \quad (30)$$

Darin sind  $A_k$ ,  $B_k$ ,  $C_k$  und  $D_k$  Integrationskonstanten, die aus Rand- und Übergangsbedingungen zu ermitteln sind, und  $P_k^*(\xi)$  ist ein partikuläres Integral der Gleichung (29), das man durch einen geeigneten Ansatz gewinnen kann.

Bei der Stützung III ist darauf zu achten, daß der erste Eigenwert  $\lambda_0^2 = 0$  ist. Dadurch vereinfacht sich die erste Differentialgleichung ( $k=0$ ) des Systems (28) wesentlich.

$$g_0^{\dots} = \frac{b^2 l^2}{G J_T} \frac{\mathfrak{X}'_0 p}{d_0}. \quad (31)$$

Da die Komponenten des Vektors  $\mathfrak{X}_0$  bei Stützung III sämtlich gleich 1 sind, kann man auch schreiben

$$g_0^{\dots} = \frac{b^2 l^2}{G J_T} \frac{\sum_{j=0}^m p_j}{2m(f_1 + f_2)}$$

oder unter Berücksichtigung von (7)

$$\frac{E J_y}{l^4} g_0^{\dots} = \frac{\sum_j p_j}{m}.$$

Durch Vergleich mit der ersten Gleichung (2) erkennt man sofort, daß  $g_0$  nichts anderes darstellt als die mittlere Durchbiegung der Balkenreihe.  $g_0$  ist die Durchbiegung, die entsteht, wenn sämtliche äußeren Lasten in Querrichtung gleichmäßig auf alle Balken verteilt werden.  $g_0$  kann also auf elementarem Wege ermittelt werden.

Betrachten wir noch kurz den singulären Fall, der bei den bisherigen Ableitungen zunächst ausgeschlossen wurde. Er tritt bei Stützung III auf, bei wölbfreien Querschnittsformen, wenn gleichzeitig der Schubmittelpunktsabstand  $t=0$  ist. Dieser Fall hat somit auch praktische Bedeutung. Es wird dann  $f_1 = f_2$  und damit beide Matrizen  $\mathfrak{A}$  und  $\mathfrak{B}$  singulär. Wir wollen jetzt den



Grenzübergang  $f_1 \rightarrow f_2$  durchführen und sehen, was sich gegenüber den bisherigen Ableitungen ändert. Aus der letzten Spalte der Tafel 2 ist ersichtlich, daß dann der größte Eigenwert  $\lambda_m \rightarrow \infty$  strebt. Die Differentialgleichung (27), die hier zweckmäßigerweise in die Form

$$\frac{1}{\lambda_k^2} g_k^{\dots} - g_k^{\dots} = \frac{b^2 l^2}{G J_T} \frac{x'_k p}{\lambda_k d_k} = \frac{b^2 l^2}{G J_T} \frac{x'_k p}{\delta m \left(1 - \cos \frac{k}{m} \pi\right)},$$

$$\delta = \begin{cases} 1 & \text{für } k = 1, 2, \dots, (m-1), \\ 2 & \text{für } k = 0 \text{ und } k = m \end{cases}$$

gebracht wird, geht für den Fall  $k = m$  und  $\lambda_m \rightarrow \infty$  über in

$$G J_T g_m^{\dots} = -\frac{b^2 l^2}{4 m} \sum_{j=0}^m (-1)^j p_j.$$

$G J_T g_m$  nimmt also einen endlichen Wert an, und die Berechnung ist auch in diesem Sonderfall immer möglich.

### 5. Randbedingungen an den Balkenauflägern

Für die Bestimmung der Integrationskonstanten in der allgemeinen Lösung (30) werden die Randbedingungen für die Funktionen  $g_k$  benötigt. Die Formulierung der Randbedingung ist jedoch von Haus aus gegeben für die Durchbiegungen  $\hat{w}_k$  und für die Verdrehungen  $\varphi_k$  der Balken. Es ist daher erforderlich, die Randbedingungen für  $g_k$  aus denen für  $\hat{w}_k$  und  $\varphi_k$  zu gewinnen. Dazu werden zunächst aus den Beziehungen (6)

$$\hat{w}_k = \frac{1}{2} (w_{k-1} + w_k), \quad \varphi_k = \frac{1}{b} (w_{k-1} - w_k)$$

und deren Ableitungen nach  $\xi$

$$\hat{w}_k^{\cdot} = \frac{1}{2} (w_{k-1}^{\cdot} + w_k^{\cdot}), \quad \varphi_k^{\cdot} = \frac{1}{b} (w_{k-1}^{\cdot} - w_k^{\cdot}) \quad \text{usw.}$$

die Randbedingungen für die Durchbiegungen  $w_k$  der Balkenränder ermittelt. Aus diesen ergeben sich die Randbedingungen für  $g_k$  aus der Lineartransformation (27)

$$w = \mathfrak{X} g$$

und deren Ableitungen

$$w^{\cdot} = \mathfrak{X} g^{\cdot} \quad \text{usw.}$$

Im folgenden wird dieser Weg für eine Reihe technisch wichtiger Lastfälle besprochen.

5.1. *Frei drehbare Lagerung*

Es gilt am Rande  $\xi = 0$

$$\begin{aligned}\hat{w}_k(0) &= 0 && \text{keine Durchbiegungen,} \\ \varphi_k(0) &= 0 && \text{keine Verdrehungen,} \\ \hat{w}_k''(0) &= 0 && \text{keine Biegemomente,} \\ \varphi_k''(0) &= 0 && \text{keine Wölbbehinderung.}\end{aligned}$$

Aus (6) folgt dann

$$w_k(0) = 0, \quad w_k''(0) = 0, \quad \text{bzw.} \quad w(0) = 0, \quad w''(0) = 0. \quad (32)$$

Dies in (27) eingesetzt ergibt

$$g(0) = 0, \quad g''(0) = 0, \quad g_k(0) = 0, \quad g_k''(0) = 0. \quad (33)$$

Für die Balkenreihe mit beidseitig frei aufliegender Lagerung ergibt sich eine wesentliche Vereinfachung der Rechnung. Man kann nämlich das Differentialgleichungssystem (14) unmittelbar zweimal integrieren. Die dabei auftretenden Integrationskonstanten können aus den Randbedingungen (32) bestimmt werden. Aus der Art und Weise der Konstantenbestimmung erkennt man jedoch, daß sie in genau der gleichen Weise erfolgt wie bei der Berechnung der Biegemomente  $M(\xi)$  eines beidseitig frei aufliegenden Einzelbalkens, und es läßt sich leicht zeigen, daß man das System (14) einfacher in der Form

$$\mathfrak{A} w'' + \mathfrak{B} w = -\frac{b^2}{G J_T} m \quad (34)$$

schreiben kann. Darin ist  $m$  ein Vektor

$$m = \begin{bmatrix} \vdots \\ M_j \\ \vdots \end{bmatrix} \quad \text{mit} \quad \begin{array}{l} j = 1, 2, \dots, (m-1) \text{ Stützung I,} \\ j = 0, 1, \dots, (m-1) \text{ Stützung II,} \\ j = 0, 1, \dots, m \text{ Stützung III,} \end{array}$$

dessen Komponenten  $M_j$  Biegemomente von gedachten beidseitig frei aufliegenden Balken unter der gegebenen äußeren Belastung  $p_j$  sind. Diese Momente lassen sich auf elementarem Wege sehr einfach aus Gleichgewichtsbedingungen errechnen. Die Lineartransformation  $w = \mathfrak{X} g$  führt auf das entkoppelte System

$$g'' - \Lambda g = -\frac{b^2}{G J_T} \mathfrak{D}^{-1} \mathfrak{X}' m \quad (35)$$

mit den Einzelgleichungen

$$g_k'' - \lambda_k^2 g_k = -\frac{b^2}{G J_T} \frac{\mathfrak{X}'_k m}{d_k}$$

und deren allgemeiner Lösung

$$g_k = C_k \sinh \lambda_k \xi + D_k \cosh \lambda_k \xi + P_k^*(\xi).$$

Auf diese Weise hat sich die Anzahl der zu bestimmenden Integrationskonstanten halbiert. Die Zurückführung des Differentialgleichungssystems 4. Ordnung auf ein solches 2. Ordnung gelingt nur im Falle der beidseitig frei drehbaren Lagerung. Dieser Fall ist zwar der theoretisch einfachste, aber für die praktische Anwendung auch wichtigste Fall. Ausgehend von dem Differentialgleichungssystem 2. Ordnung (34) wurde diese Lagerung für die Stützungsart III b der Längsränder vom Verfasser eingehend in [10, 11] untersucht.

In Tafel 3 werden für eine Reihe praktisch wichtiger Lastfälle die Funktionen  $g_k$  angegeben. In die Beziehungen sind die Größen  $\lambda_k^2$ ,  $d_k$  und  $\varkappa_k'$  je nach der vorgegebenen Stützungsart der Längsränder entsprechend den Angaben der Tafel 2 einzusetzen.

### 5.2. Starre Einspannung

Es gilt am Rande  $\xi = 0$

$$\begin{aligned}\hat{w}_k(0) &= 0 && \text{keine Durchbiegungen,} \\ \varphi_k(0) &= 0 && \text{keine Verdrehungen,} \\ \hat{w}_k'(0) &= 0 && \text{horizontale Biegelinie,} \\ \varphi_k'(0) &= 0 && \text{keine Verwölbungen.}\end{aligned}$$

Aus (6) folgt

$$\begin{aligned}w_k(0) &= w_k'(0) = 0 \\ \text{bzw. } w(0) &= w'(0) = 0\end{aligned}$$

und mit (27)

$$\begin{aligned}g(0) &= g'(0) = 0 \\ \text{oder } g_k(0) &= g_k'(0) = 0.\end{aligned}\tag{36}$$

### 5.3. Freies Stabende mit und ohne Einzellast am Rande

Die Abfassung der Randbedingungen für diesen und die folgenden Fälle wird etwas komplizierter. Und zwar ist zu beachten, daß in den Gelenken nicht nur stetig verteilte Gelenkkräfte  $Z_k$  und  $Y_k$  wirken, sondern auch Einzelkräfte, die mit  $\tilde{Z}_k$  und  $\tilde{Y}_k$  bezeichnet werden sollen. Solche Einzelkräfte treten in allen Querschnitten auf, in denen auch äußere Einzelkräfte angreifen, ferner über allen Auflagerpunkten und an den freien Stabenden. Nur wenn man die Existenz solcher Einzelgelenkkräfte voraussetzt, lassen sich alle Gleichgewichts- und Kontinuitätsbedingungen widerspruchsfrei und eindeutig erfüllen. Da die Einzelgelenkkräfte nur an den Enden der Balkenreihe und an Stellen wirken, an denen Einzelkräfte als äußere Lasten oder Auflagerkräfte eingetragen werden, beeinflussen sie nur die Rand- und Übergangsbedingungen und haben keinen Einfluß auf die Differentialgleichungen. In Fig. 5 ist ein möglicher Verlauf der Gelenkkräfte über der Gesamtlänge des Balkens dargestellt. Der

Tafel 3

	<p>Bereich I: <math>G J_T g_k = b^2 l \left( \eta' \xi - \frac{\sinh \lambda_k \eta' \sinh \lambda_k \xi}{\lambda_k \sinh \lambda_k} \right) \frac{x'_k \bar{p}}{\lambda_k^2 d_k}</math></p> <p>Bereich II: <math>G J_T g_k = b^2 l \left( \eta \xi' - \frac{\sinh \lambda_k \eta \sinh \lambda_k \xi'}{\lambda_k \sinh \lambda_k} \right) \frac{x'_k \bar{p}}{\lambda_k^2 d_k}</math></p>
	<p>Bereich I: <math>G J_T g_k = b^2 l \left( \frac{3}{2} \xi - \frac{1}{2} + \frac{\cosh \lambda_k \eta^* \sinh \lambda_k \xi}{\lambda_k \cosh \frac{1}{2} \lambda_k} \right) \frac{x'_k \bar{p}}{\lambda_k^2 d_k}</math></p> <p>Bereich II: <math>G J_T g_k = b^2 l \left( \frac{3}{4} - \eta^* - \frac{1}{2} \xi^* - \frac{1}{2} \sinh \lambda_k \xi + \sinh \lambda_k \eta \cosh \lambda_k \xi^* \right) \frac{x'_k \bar{p}}{\lambda_k \cosh \frac{1}{2} \lambda_k}</math></p>
	<p><math>G J_T g_k = b^2 l^2 \left[ \xi - \xi^2 + \frac{2}{\lambda_k^2} \left( \frac{\sinh \lambda_k \xi + \sinh \lambda_k \xi'}{\sinh \lambda_k} - 1 \right) \right] \frac{x'_k \bar{p}}{2 \lambda_k^2 d_k}</math></p>
	<p>Bereich I: <math>G J_T g_k = b^2 l^2 \left( \eta^* \xi - \frac{\sinh \lambda_k \eta^* \sinh \lambda_k \xi}{\lambda_k^2 \cos \frac{1}{2} \lambda_k} \right) \frac{x'_k \bar{p}}{\lambda_k^2 d_k}</math></p> <p>Bereich II: <math>G J_T g_k = b^2 l^2 \left[ \frac{1}{2} (\xi - \xi^2 - \eta^2) + \frac{1}{\lambda_k^2} \left( \frac{\cosh \lambda_k \eta \cosh \lambda_k \xi^*}{\cosh \frac{1}{2} \lambda_k} - 1 \right) \right] \frac{x'_k \bar{p}}{\lambda_k^2 d_k}</math></p>
	<p>Bereich I: <math>G J_T g_k = b^2 l^2 \left[ \left( \eta - \frac{\eta^2}{2} \right) \xi - \frac{1}{2} \xi^2 + \frac{1}{\lambda_k^2} \left( \frac{\cosh \lambda_k \eta' \sinh \lambda_k \xi + \sinh \lambda_k \xi'}{\sinh \lambda_k} - 1 \right) \right] \frac{x'_k \bar{p}}{\lambda_k^2 d_k}</math></p> <p>Bereich II: <math>G J_T g_k = b^2 l^2 \left( \frac{\eta^2 \xi'}{2} - \frac{\cosh \lambda_k \eta - 1}{\lambda_k^2 \sinh \lambda_k} \right) \frac{x'_k \bar{p}}{\lambda_k^2 d_k}</math></p>
	<p>Bereich I: <math>G J_T g_k = b^2 l^2 \left[ \eta \xi - \frac{1}{2} \xi^2 + \frac{1}{\lambda_k^2} \left( \frac{\sinh \lambda_k \eta^* \sinh \lambda_k \xi + \cosh \lambda_k \xi^*}{\cosh \frac{1}{2} \lambda_k} - 1 \right) \right] \frac{x'_k \bar{p}}{\lambda_k^2 d_k}</math></p> <p>Bereich II: <math>G J_T g_k = b^2 l^2 \left[ \frac{\eta^2}{2} - \frac{(\cosh \lambda_k \eta - 1) \cosh \lambda_k \xi^*}{\lambda_k^2 \cosh \frac{1}{2} \lambda_k} \right] \frac{x'_k \bar{p}}{\lambda_k^2 d_k}</math></p>

dort angegebene Richtungssinn definiert die positive Richtung der Einzelgelenkkräfte.

Wir betrachten jetzt ein Balkenelement der Länge  $dx$  am freien Rand  $x=0$  und setzen die Gleichgewichtsbedingungen zwischen den äußeren und inneren Kräften an. Um möglichst allgemein zu bleiben, soll angenommen werden, daß am freien Rand vorgegebene Kräfte  $\tilde{P}$  in Richtung  $z$  wirken. Die Randlasten, die am Balken  $k$  angreifen, werden nach dem Hebelgesetz in zwei Einzellasten  $\tilde{P}_{k-1,k}$  und  $\tilde{P}_{k,k}$  in den Endpunkten der Gelenke aufgeteilt. Analog zu (1) ist auch hier

$$\tilde{P}_k = \tilde{P}_{k,k} + \tilde{P}_{k,k+1} \quad (37)$$

die Summe beider am Gelenkende  $k$  wirkenden Einzellasten.

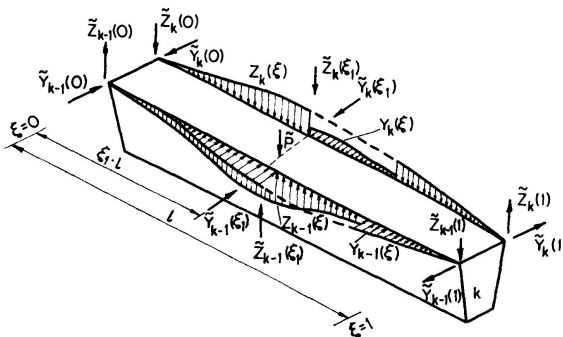


Fig. 5. Verlauf der Gelenkkräfte über der Balkenlänge.

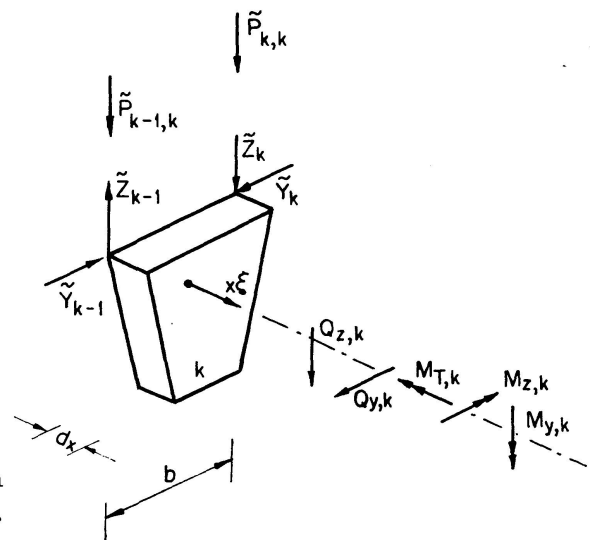


Fig. 6. Balkenelement unmittelbar am freien Ende mit allen äußeren und inneren Kräften.

Die Gleichgewichtsbedingungen ergeben unter Berücksichtigung der bekannten Beziehungen zwischen Schnittgrößen und Verformungen des Stabes

$$-Q_{zk} = + \frac{E J_y}{l^3} \hat{w}_k^{\dots}(0) = \tilde{Z}_k - \tilde{Z}_{k-1} + \tilde{P}_{k,k} + \tilde{P}_{k-1,k},$$

$$-Q_{yk} = + \frac{E J_z}{l^3} \hat{v}_k^{\dots}(0) = \tilde{Y}_k - \tilde{Y}_{k-1},$$

$$M_{Tk} = - \frac{E C_T}{l^3} \varphi_k^{\dots}(0) + \frac{G J_T}{l} \varphi_k^{\cdot}(0) =$$

$$(\tilde{Z}_k + \tilde{Z}_{k-1}) \frac{b}{2} - (\tilde{Y}_k - \tilde{Y}_{k-1}) t + (\tilde{P}_{k,k} - \tilde{P}_{k-1,k}) \frac{b}{2}.$$

Diese Gleichungen sind genau so aufgebaut wie die Gleichungen (2), und auf die gleiche Weise, wie oben die Funktionen  $Z_k$  und  $Y_k$  eliminiert wurden, lassen sich jetzt auch die Einzelkräfte  $\tilde{Z}_k$  und  $\tilde{Y}_k$  eliminieren. Alle oben durchgeführten Entwicklungen einschließlich der Betrachtungen über den Einfluß der Horizontalverschiebungen  $v$  gelten analog auch hier. Lediglich der Grad

der Ableitungen bei den Verformungen erniedrigt sich um 1, und wir haben es nicht wie oben mit Funktionen von  $\xi$  zu tun, sondern mit deren Randwerten. Es ergibt sich analog (12) als Ergebnis die Randbedingung

$$(\mathfrak{A} + \mathfrak{S}) w^{\cdots}(0) + \mathfrak{B} w^{\cdot}(0) = \frac{b^2 l}{G J_T} \tilde{\mathfrak{p}}, \quad (38)$$

wobei im Vektor  $\tilde{\mathfrak{p}}$  die Gesamtheit der angreifenden Einzellasten zusammengefaßt ist.

$$\tilde{\mathfrak{p}} = \begin{bmatrix} \vdots \\ P_j \\ \vdots \end{bmatrix}, \quad \begin{array}{l} j = 1, 2, \dots, (m-1) \text{ Stützung I,} \\ j = 0, 1, \dots, (m-1) \text{ Stützung II,} \\ j = 0, 1, \dots, m \text{ Stützung III.} \end{array} \quad (39)$$

Die Randbedingungen für die Durchbiegungen  $w_k$  sind also in ähnlicher Weise wie die Differentialgleichungen miteinander verkoppelt. Mit den aus (27) folgenden Beziehungen

$$w^{\cdots}(0) = \mathfrak{X} g^{\cdots}(0), \quad w^{\cdot}(0) = \mathfrak{X} g^{\cdot}(0) \quad (40)$$

gelingt auch hier eine Entkoppelung, wenn die Matrix  $\mathfrak{S} = 0$  ist (Fälle Ia, Ib, IIa, IIIa) oder vernachlässigt wird. Man erhält analog (28)

$$g^{\cdots}(0) - \mathfrak{A} g^{\cdot}(0) = \frac{b^2 l}{G J_T} \mathfrak{D}^{-1} \mathfrak{X}' \tilde{\mathfrak{p}} \quad (41)$$

mit den Einzelgleichungen

$$g_k^{\cdots}(0) - \lambda_k^2 g_k^{\cdot}(0) = \frac{b^2 l}{G J_T} \frac{\mathfrak{X}'_k \tilde{\mathfrak{p}}}{d_k}. \quad (42)$$

Für den wichtigen Sonderfall, daß keine Randlasten  $\tilde{P}_k$  vorhanden sind, gilt

$$g_k^{\cdots}(0) - \lambda_k^2 g_k^{\cdot}(0) = 0.$$

Als zweite Randbedingung folgt aus der Bedingung, daß keine Biegemomente und keine Wölbbehinderungen auftreten, wie unter 5.1

$$g_k^{\ddot{}}(0) = 0.$$

#### 5.4. Das Balkenende auf elastisch senkbaren Stützen

Jedes Balkenende sei auf zwei symmetrisch angeordnete Federn von gleicher Steifigkeit angeordnet. Der Abstand der Federn sei  $a$ , und ihre Federkonstante  $c_L$ . Eine solche Randbedingung hat praktische Bedeutung bei der Auflagerung von Brückenträgern aus Fertigteilen auf Gummischichtenlagern.

Aus der biege- und bimomentenfreien Lagerung folgt zunächst  $g_k^{\ddot{}}(0) = 0$ .

Auf das Balkenende wirkt eine Auflagerkraft der Größe

$$A_k = 2 c_L \hat{w}_k(0) \quad (43)$$

und ein Moment

$$M_{Ak} = \frac{1}{2} a^2 c_L \varphi_k(0).$$

Die Gleichgewichtsbedingungen am Balkenelement nach Fig. 7 ergeben

$$-Q_{zk} + A_k = \frac{E J_y}{l^3} \hat{w}_k^{\dots}(0) + 2c_L \hat{w}_k(0) = \tilde{Z}_k - \tilde{Z}_{k-1} + \tilde{P}_{k,k} + \tilde{P}_{k-1,k},$$

$$-Q_{yk} = \frac{E J_z}{l^3} \hat{v}_k^{\dots}(0) = \tilde{Y}_k - \tilde{Y}_{k-1},$$

$$\begin{aligned} M_{Tk} - M_{Ak} &= -\frac{E C_T}{l^3} \varphi_k^{\dots}(0) + \frac{G J_T}{l} \varphi_k^{\dot{\phantom{0}}}(0) - \frac{a^2 c_L}{2} \varphi_k(0) = \\ &= (\tilde{Z}_k + \tilde{Z}_{k-1}) \frac{b}{2} - (\tilde{Y}_k - \tilde{Y}_{k-1}) t + (\tilde{P}_{k,k} - \tilde{P}_{k-1,k}) \frac{b}{2}. \end{aligned}$$

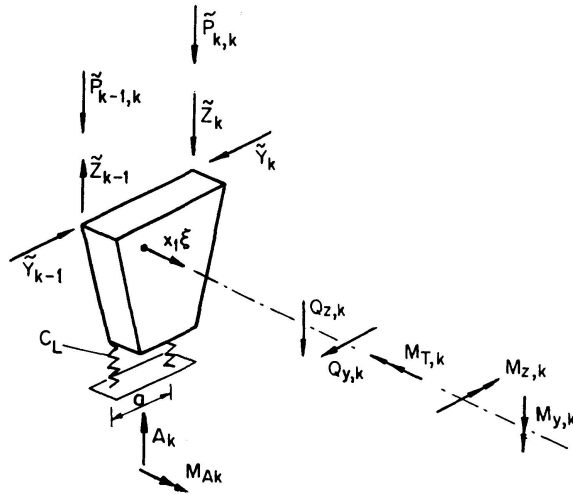


Fig. 7. Balkenelement am elastisch gestützten Rand.

Die Elimination der Gelenkkkräfte liefert

$$\begin{aligned} &\frac{b}{2} \frac{E J_y}{l^3} [\hat{w}_k^{\dots}(0) + \hat{w}_{k+1}^{\dots}(0)] + b c_L [\hat{w}_k(0) + \hat{w}_{k+1}(0)] + \frac{E J_z}{l^3} t [\hat{v}_k^{\dots}(0) - \hat{v}_{k+1}^{\dots}(0)] \\ &+ \frac{G J_T}{l} [\varphi_k^{\dot{\phantom{0}}}(0) - \varphi_{k+1}^{\dot{\phantom{0}}}(0)] - \frac{E C_T}{l^3} [\varphi_k^{\dots}(0) - \varphi_{k+1}^{\dots}(0)] \\ &- \frac{a^2 c_L}{2} [\varphi_k(0) - \varphi_{k+1}(0)] = b (\tilde{P}_{k,k} + \tilde{P}_{k,k+1}) = b \tilde{P}_k. \end{aligned}$$

Setzt man hier die Gleichungen (6) und deren Ableitungen ein und führt außer den in (7) definierten Größen  $f_1$  und  $f_2$  noch die dimensionslosen Abkürzungen

$$f_3 = \frac{l c_L}{2 G J_T} (b^2 + a^2), \quad f_4 = \frac{l c_L}{2 G J_T} (b^2 - a^2) \quad (44)$$

ein, so erhält man nach kurzer Rechnung die Randbedingungen für die Durchbiegungen  $w_k$  der Gelenke in der Form

$$f_2 w_{k-1}^{\dots} (0) + 2 f_1 w_k^{\dots} (0) + f_2 w_{k+1}^{\dots} (0) + w_{k-1}^{\cdot} (0) - 2 w_k^{\cdot} (0) + w_{k+1}^{\cdot} (0) \\ + f_4 w_{k-1} (0) + 2 f_3 w_k (0) + f_4 w_{k+1} (0) = \frac{b^2 l}{G J_T} \tilde{P}_k.$$

Auf ähnlichem Wege ergibt sich die Gleichung für die Ecke am kräftefreien Rand. Setzt man dabei eine Unverschieblichkeit der Gelenke über den Auflagern in horizontaler Richtung voraus ( $v=0$ ) oder vernachlässigt den Einfluß von  $v$  auf die Randbedingungen, so läßt sich die Gesamtheit der Randbedingungen zur Matrixgleichung

$$\mathfrak{A} w^{\dots} (0) + \mathfrak{B} w^{\cdot} (0) + (f_3 \mathfrak{A}_1 + f_4 \mathfrak{A}_2) w (0) = \frac{b^2 l}{G J_T} \tilde{\mathfrak{p}}$$

zusammenfassen. Auch diese Randbedingung läßt sich orthogonalisieren, wenn man hier (40) einsetzt und mit  $\mathfrak{X}'$  von links multipliziert. Unter Beachtung von (23) und (26) ergibt sich

$$\mathfrak{D} g^{\dots} (0) - \mathfrak{D} \Lambda g^{\cdot} (0) + (f_3 \mathfrak{D}_1 + f_4 \mathfrak{D}_2) g (0) = \frac{b^2 l}{G J_T} \mathfrak{X}' \tilde{\mathfrak{p}}$$

oder

$$g^{\dots} (0) - \Lambda g^{\cdot} (0) + \bar{\mathfrak{D}} g (0) = \frac{b^2 l}{G J_T} \mathfrak{D}^{-1} \mathfrak{X}' \tilde{\mathfrak{p}} \quad (45)$$

mit der Abkürzung

$$\bar{\mathfrak{D}} = \mathfrak{D}^{-1} (f_3 \mathfrak{D}_1 + f_4 \mathfrak{D}_2) \quad (46)$$

Die  $k$ -te Einzelgleichung lautet

$$g_k^{\dots} (0) - \lambda_k^2 g_k^{\cdot} (0) + \bar{d}_k g_k (0) = \frac{b^2 l}{G J_T} \frac{\mathfrak{X}'_k \tilde{\mathfrak{p}}}{d_k} \quad (47)$$

mit

$$\bar{d}_k = \frac{f_3 d_{1,k} + f_4 d_{2,k}}{f_1 d_{1,k} + f_2 d_{2,k}}, \quad d_{1,k}; d_{2,k} \text{ nach Tafel 2}$$

Greifen am Rand keine Einzelkräfte  $\tilde{P}_k$  an, so wird die Randbedingung

$$g_k^{\dots} (0) - \lambda_k^2 g_k^{\cdot} (0) + \bar{d}_k g_k (0) = 0$$

homogen. Wird die elastische Federung des Randes unendlich weich  $c_L=0$ , so geht mit  $\bar{d}_k=0$  die Randbedingung (47) in die des freien Randes (42) über. Wird dagegen die Stützung unendlich starr, so erhalten wir mit  $\bar{d}_k \rightarrow \infty$  die Bedingung (33)  $g_k(0)=0$ .

### 5.5. Die elastische Zwischenunterstützung

Es gilt an der Stelle  $\xi = \xi_1$

$\hat{w}_{kA}(\xi_1) = \hat{w}_{kB}(\xi_1)$  gleiche Durchbiegungen und

$\varphi_{kA}(\xi_1) = \varphi_{kB}(\xi_1)$  gleiche Verdrehungen in den Bereichen  $A$  und  $B$ . Daraus folgt mit (6), (13) und (27)

$$g_A(\xi_1) = g_B(\xi_1).$$



Aus

$\hat{w}_{kA}(\xi_1) = \hat{w}_{kB}(\xi_1)$  gleiche Tangentenneigung der Balkenachsen  
 $\varphi_{kA}(\xi_1) = \varphi_{kB}(\xi_1)$  gleiche Querschnittsverwölbungen ergibt sich

$$g_A(\xi_1) = g_B(\xi_1)$$

und aus

$w_{kA}(\xi_1) = w_{kB}(\xi_1)$  gleiche Biegemomente  
 $\varphi_{kA}(\xi_1) = \varphi_{kB}(\xi_1)$  gleiche Bimomente

folgt

$$g_A(\xi_1) = g_B(\xi_1).$$

Zur vollständigen Festlegung der Integrationskonstanten wird noch eine vierte Übergangsbedingung benötigt. Diese ergibt sich wieder aus den Gleichgewichtsbedingungen am unterstützten Balkenelement.

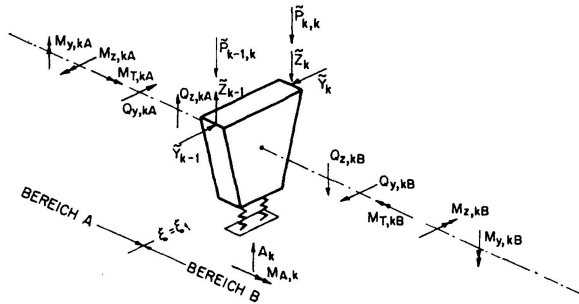


Fig. 8. Balkenelement über einer elastischen Zwischenunterstützung.

$$\begin{aligned} Q_{z kA} - Q_{z kB} + A_k &= \frac{E J_y}{l^3} (\hat{w}_{kB} - \hat{w}_{kA}) + 2 c_L w_k = \tilde{Z}_k - \tilde{Z}_{k-1} + \tilde{P}_{k,k} + \tilde{P}_{k-1,k}, \\ Q_{y kA} - Q_{y kB} &= \frac{E J_z}{l^3} (\hat{v}_{kB} - \hat{v}_{kA}) = \tilde{Y}_k - \tilde{Y}_{k-1}, \\ -M_{T kA} + M_{T kB} - M_{Ak} &= -\frac{E C_T}{l^3} (\varphi_{kB} - \varphi_{kA}) + \frac{G J_T}{l} (\varphi_{kB} - \varphi_{kA}) - \frac{1}{2} a^2 c_L \varphi_k = \\ &= (\tilde{Z}_k + \tilde{Z}_{k-1}) \frac{b}{2} - (\tilde{Y}_k - \tilde{Y}_{k-1}) t + (\tilde{P}_{k,k} - \tilde{P}_{k-1,k}) \frac{b}{2}. \end{aligned}$$

Die Elimination der Einzelgelenkkräfte  $\tilde{Z}_k$  und  $\tilde{Y}_k$  kann auf ähnliche Weise wie unter 5.4 durchgeführt werden. Dabei ist zu beachten, daß infolge der Gleichheit der Verwölbungen in den beiden angrenzenden Bereichen  $\varphi_{kB} - \varphi_{kA} = 0$  ist. Die Rechnung liefert als Ergebnis

$$g_B(\xi_1) - g_A(\xi_1) + \bar{\mathfrak{D}} g(\xi_1) = \frac{b^2 l}{G J_T} \mathfrak{D}^{-1} \mathfrak{X}' \tilde{\mathfrak{p}} \quad (48)$$

mit  $\bar{\mathfrak{D}}$  nach (46). Die Einzelgleichung lautet

$$g_{kB}(\xi_1) - g_{kA}(\xi_1) + \bar{d}_k g_k(\xi_1) = \frac{b^2 l}{G J_T} \frac{\mathfrak{X}'_k \tilde{\mathfrak{p}}}{d_k} \quad (49)$$

und wenn keine äußeren Lasten über der Stütze angreifen

$$g_{k\dot{B}}^{\ddot{\cdot}}(\xi_1) - g_{k\dot{A}}^{\ddot{\cdot}}(\xi_1) + \bar{d}_k g_k(\xi_1) = 0.$$

Darin ist

$$g_k(\xi_1) = g_{kA}(\xi_1) = g_{kB}(\xi_1).$$

### 5.6. Die starre Zwischenunterstützung

Die Übergangsbedingungen ergeben sich aus denen der elastischen Zwischenunterstützung, indem man die Federkonstante  $c_L \rightarrow \infty$  gehen läßt. Damit strebt  $\bar{d}_k \rightarrow \infty$  und es ergibt sich an Stelle von (49)

$$\begin{aligned} g_k(\xi_1) &= g_{kA}(\xi_1) = 0 \\ &= g_{kB}(\xi_1) = 0. \end{aligned}$$

### 5.7. Übergangsbedingungen unter einer Einzellast

Auch die Übergangsbedingungen für diesen Fall erhält man als Sonderfall von (49), wenn man dort  $c_L = \bar{d}_k = 0$  setzt.

$$g_{k\dot{B}}^{\ddot{\cdot}}(\xi_1) - g_{k\dot{A}}^{\ddot{\cdot}}(\xi_1) = \frac{b^2 l}{G J_T} \frac{\xi'_k \tilde{\mathfrak{p}}}{d_k}. \quad (50)$$

### 5.8. Übergangsbedingungen an Bereichsgrenzen ohne Einzellast

Mit  $\tilde{\mathfrak{p}} = 0$  folgt aus (50)

$$g_{k\dot{A}}^{\ddot{\cdot}}(\xi_1) = g_{k\dot{B}}^{\ddot{\cdot}}(\xi_1).$$

In der Tafel 4 sind die betrachteten Rand- und Übergangsbedingungen der Funktionen  $g_k$  für die praktische Anwendung übersichtlich zusammengestellt.

### 5.9. Randbedingungen für die Horizontalverschiebungen $v$

Für die Berechnung der Schnittgrößen  $M_{yi}$  und  $Q_{yi}$  werden bei den Stützungsarten II b und III b auch die Horizontalverschiebungen  $v$  der Gelenke benötigt. Wenn die Vertikalverschiebungen  $w_k$  bekannt sind, können die  $v$  aus den Differentialgleichungen (10) und (11) berechnet werden. Dabei sind am Rande  $\xi = 0$  folgende Randbedingungen zu beachten:

$v^{\ddot{\cdot}}(0) = 0$  wenn die Balken um ihre vertikale Achse frei drehbar gelagert sind,

$v^{\dot{\cdot}}(0) = 0$  bei Einspannung um die vertikale Achse,


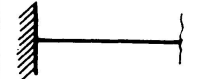

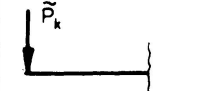

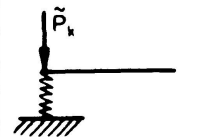

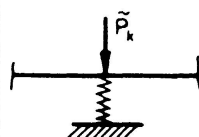

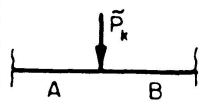

$v(0) = 0$  bei seitlich unverschieblicher Lagerung,

$v^{\ddot{\cdot}}(0) = \frac{t}{mb} [w_0^{\ddot{\cdot}}(0) - w_m^{\ddot{\cdot}}(0)] = \frac{t}{mb} (\xi_0 - \xi_m) g^{\ddot{\cdot}}(0)$  bei Stützung III b,

$v^{\ddot{\cdot}}(0) = \frac{t}{mb} w_0^{\ddot{\cdot}}(0) = \frac{t}{mb} \xi_0 g^{\ddot{\cdot}}(0)$  bei Stützung II b

bei seitlich frei verschieblicher Lagerung.

Tafel 4. Rand- und Übergangsbedingungen der Funktionen  $g_k$

Frei drehbare Lagerung		$g_k = 0; \quad g_k'' = 0$
Starre Einspannung		$g_k = 0; \quad g_k' = 0$
Freies Stabende		$g_k' = 0; \quad g_k''' - \lambda_k^2 g_k' = 0$
Stabende mit Einzellast		$g_k' = 0;$ $g_k''' - \lambda_k^2 g_k' = \frac{b^2 l}{G J_T} \frac{\xi_k' \tilde{p}}{d_k}$
Elastisch gestütztes Ende		$g_k' = 0; \quad g_k''' - \lambda_k^2 g_k' + \bar{d}_k g_k = 0$
Elastisch gestütztes Ende mit Einzellast		$g_k' = 0;$ $g_k''' - \lambda_k^2 g_k' + \bar{d}_k g_k = \frac{b^2 l}{G J_T} \frac{\xi_k' \tilde{p}}{d_k}$
Elastische Zwischenunterstützung		$g_{kA} = g_{kB}; \quad g_{kA}' = g_{kB}';$ $g_{kA}'' = g_{kB}''; \quad g_{kB}''' - g_{kA}''' + \bar{d}_k g_k = 0$
Elastische Zwischenunterstützung mit Einzellast		$g_{kA} = g_{kB}; \quad g_{kA}' = g_{kB}'; \quad g_{kA}'' = g_{kB}'';$ $g_{kB}''' - g_{kA}''' + \bar{d}_k g_k = \frac{b^2 l}{G J_T} \frac{\xi_k' \tilde{p}}{d_k}$
Starre Zwischenunterstützung		$g_{kA} = 0; \quad g_{kB} = 0;$ $g_{kA}' = g_{kB}'; \quad g_{kA}'' = g_{kB}''$
Übergangsbedingungen an einer Einzellast		$g_{kA} = g_{kB}; \quad g_{kA}' = g_{kB}';$ $g_{kA}'' = g_{kB}''; \quad g_{kB}''' - g_{kA}''' = \frac{b^2 l}{G J_T} \frac{\xi_k' \tilde{p}}{d_k}$
Übergangsbedingungen an Bereichsgrenze ohne Einzellast		$g_{kA} = g_{kB}; \quad g_{kA}' = g_{kB}';$ $g_{kA}'' = g_{kB}''; \quad g_{kA}''' = g_{kB}'''$

Die beiden letzten Gleichungen ergeben sich auf ähnlichem Wege wie oben die Differentialgleichungen (10) und (11), nur daß hier an Stelle der Funktionen  $w_k$  und  $v$  deren Randwerte, an Stelle der Gelenkkräfte  $Y_k$  die Einzelkräfte  $\tilde{Y}_k$  treten und der Grad der Ableitungen sich um 1 erniedrigt.

Bei seitlich fester Zwischenunterstützung an der Stelle  $\xi = \xi_1$  gilt

$$v_A(\xi_1) = 0, \quad v_B(\xi_1) = 0, \quad v'_A(\xi_1) = v'_B(\xi_1), \quad v''_A(\xi_1) = v''_B(\xi_1)$$

und bei seitlich frei verschieblicher Zwischenunterstützung

$$v_A(\xi_1) = v_B(\xi_1), \quad v'_A(\xi_1) = v'_B(\xi_1), \quad v''_A(\xi_1) = v''_B(\xi_1)$$

und

$$v_B'''(\xi_1) - v_A'''(\xi_1) = \frac{t}{m b} (\varepsilon_0 - \varepsilon_m) [g_B'''(\xi_1) - g_A'''(\xi_1)], \quad \text{bei Stützung III b,}$$

$$\text{bzw. } v_B'''(\xi_1) - v_A'''(\xi_1) = \frac{t}{m b} \varepsilon_0 [g_B'''(\xi_1) - g_A'''(\xi_1)], \quad \text{bei Stützung II b.}$$

## 6. Schnittgrößen, Verformungen, Gelenkkräfte, Auflagerkräfte

Ausgehend von den bekannten Beziehungen der Festigkeitslehre zwischen Schnittgrößen und Verformungen der Balkenachsen erhält man mit den Gleichungen (6) und der aus (27) folgenden Einzelgleichung

$$w_i = \varepsilon_i^* g \quad (51)$$

die Formeln für die Berechnung der Schnittgrößen im Balken  $i$  direkt in Abhängigkeit von den Funktionen  $g_k$ . In (51) ist  $\varepsilon_i^*$  der  $i$ -te Zeilenvektor der Matrix  $\varepsilon$ . Bei den Stützungsarten I und III ist als Folge der Symmetrie von  $\varepsilon$

$$\varepsilon'_i = \varepsilon_i^*.$$

Für numerische Berechnungen ist es zweckmäßig, mit den  $GJ_T$ -fachen Funktionen  $g$  zu rechnen. Zur Vereinfachung werden noch folgende Abkürzungen eingeführt

$$GJ_T g = \bar{g}, \quad \beta_z^2 = \frac{E J_y}{G J_T}, \quad \beta_y^2 = \frac{E J_z}{G J_T}, \quad \beta_c^2 = \frac{E C_T}{G J_T}. \quad (52)$$

Damit ergibt sich

Biegemoment  $M_{zi}$

$$M_{zi} = -\frac{E J_y}{l^2} \hat{w}_i'' = -\frac{\beta_z^2}{2l^2} (\varepsilon_{i-1}^* + \varepsilon_i^*) \bar{g}'' ,$$

Querkraft  $Q_{zi}$

$$Q_{zi} = -\frac{E J_y}{l^3} \hat{w}_i''' = -\frac{\beta_z^2}{2l^3} (\varepsilon_{i-1}^* + \varepsilon_i^*) \bar{g}''' ,$$

Bimoment (Wölbverdrehmomentenintegral)  $B_i$

$$B_i = -\frac{E C_T}{l^2} \varphi_i^{\ddot{\cdot}} = -\frac{\beta_c^2}{b l^2} (\varkappa_{i-1}^* - \varkappa_i^*) \bar{g}^{\ddot{\cdot}},$$

Primäres Torsionsmoment  $M_{TPi}$

$$M_{TPi} = +\frac{G J_T}{l} \varphi_i^{\dot{\cdot}} = \frac{1}{b l} (\varkappa_{i-1}^* - \varkappa_i^*) \bar{g}^{\dot{\cdot}},$$

Sekundäres Torsionsmoment  $M_{TSi}$

$$M_{TSi} = -\frac{E C_T}{l^3} \varphi_i^{\cdots} = -\frac{\beta_c^2}{b l^3} (\varkappa_{i-1}^* - \varkappa_i^*) \bar{g}^{\cdots},$$

Gesamtes Torsionsmoment  $M_{Ti}$

$$M_{Ti} = M_{TPi} + M_{TSi} = \frac{1}{b l} (\varkappa_{i-1}^* - \varkappa_i^*) \left( \bar{g}^{\dot{\cdot}} - \frac{\beta_c^2}{l^2} \bar{g}^{\cdots} \right).$$

Bei den Beziehungen zur Berechnung der Schnittgrößen  $M_{yi}$  und  $Q_{yi}$  treten auch die Horizontalverschiebungen  $v$  auf.

$$M_{yi} = -\frac{E J_z}{l^2} \hat{v}_i^{\ddot{\cdot}} = -\frac{E J_z}{l^2} \left[ v^{\ddot{\cdot}} - (w_{i-1}^{\dot{\cdot}} - w_i^{\dot{\cdot}}) \frac{t}{b} \right],$$

$$Q_{yi} = -\frac{E J_z}{l^3} \hat{v}_i^{\cdots} = -\frac{E J_z}{l^3} \left[ v^{\cdots} - (w_{i-1}^{\ddot{\cdot}} - w_i^{\ddot{\cdot}}) \frac{t}{b} \right].$$

Bei den Stützungen I a, I b, II a und III a ist  $v=0$  und damit wird

$$M_{yi} = \frac{t \beta_y^2}{b l^2} (\varkappa_{i-1}^* - \varkappa_i^*) \bar{g}^{\ddot{\cdot}}, \quad Q_{yi} = \frac{t \beta_y^2}{b l^3} (\varkappa_{i-1}^* - \varkappa_i^*) \bar{g}^{\cdots}.$$

Bei den Stützungen II b und III b müssen zunächst die Funktionen  $v$  aus den Differentialgleichungen (10) bzw. (11) unter Beachtung der unter 5.9 angegebenen Randbedingungen integriert werden. In der überwiegenden Mehrzahl der praktisch vorkommenden Fälle, aber leider nicht in allen Fällen, ergeben sich sämtliche bei der Integration von (10) und (11) auftretenden Konstanten zu Null. Für diesen wichtigen Sonderfall ist

$$v = \frac{t}{m b} w_0 = \frac{t}{m b} \varkappa_0^* g \quad \text{bei Stützung II b}$$

und

$$v = \frac{t}{m b} (w_0 - w_m) = \frac{t}{m b} (\varkappa_0^* - \varkappa_m^*) g, \quad \text{bei Stützung III b}$$

$$\left. \begin{aligned} M_{yi} &= \frac{t \beta_y^2}{b l^2} \left( \varkappa_{i-1}^* - \varkappa_i^* - \frac{\varkappa_0^*}{m} \right) \bar{g}^{\ddot{\cdot}}, \\ Q_{yi} &= \frac{t \beta_y^2}{b l^3} \left( \varkappa_{i-1}^* - \varkappa_i^* - \frac{\varkappa_0^*}{m} \right) \bar{g}^{\cdots}, \end{aligned} \right\} \text{bei Stützung II b}$$

$$\left. \begin{aligned} M_{yi} &= \frac{t \beta_y^2}{b l^2} \left( \varkappa_{i-1}^* - \varkappa_i^* - \frac{\varkappa_0^* - \varkappa_m^*}{m} \right) \bar{g}^{\ddot{\cdot}}, \\ Q_{yi} &= \frac{t \beta_y^2}{b l^3} \left( \varkappa_{i-1}^* - \varkappa_i^* - \frac{\varkappa_0^* - \varkappa_m^*}{m} \right) \bar{g}^{\cdots}. \end{aligned} \right\} \text{bei Stützung III b}$$

Die Formeln für die Ermittlung der vertikalen Gelenkkraftkomponente  $Z_i$  erhält man aus den Gleichungen (3) und (4) unter Beachtung von (6), (7), (10) und (11) nach einigen Zwischenrechnungen

$$Z_i = \frac{p_{i,i+1} - p_{i,i}}{2} + \frac{1}{2l^2 b^2} \left[ (\varepsilon_{i-1}^* - \varepsilon_{i+1}^*) (f_2 \bar{g}^{\dots} + \bar{g}^{\dots}) + \frac{2\beta_y^2}{m} \left(\frac{t}{l}\right)^2 (\varepsilon_0^* - \varepsilon_m^*) \bar{g}^{\dots} \right],$$

bei Stützung III b

$$Z_i = \frac{p_{i,i+1} - p_{i,i}}{2} + \frac{1}{2l^2 b^2} \left[ (\varepsilon_{i-1}^* - \varepsilon_{i+1}^*) (f_2 \bar{g}^{\dots} + \bar{g}^{\dots}) + \frac{2\beta_y^2}{m} \left(\frac{t}{l}\right)^2 \varepsilon_0^* \bar{g}^{\dots} \right],$$

bei Stützung II b

$$Z_i = \frac{p_{i,i+1} - p_{i,i}}{2} + \frac{1}{2l^2 b^2} (\varepsilon_{i-1}^* - \varepsilon_{i+1}^*) (f_2 \bar{g}^{\dots} + \bar{g}^{\dots}),$$

bei den Stützungen I a, I b, II a und III a.

Der Einfluß der Horizontalverschiebung  $v$  auf die Gelenkkraftkomponente  $Z_i$  wird im allgemeinen vernachlässigbar klein sein, so daß es in der Regel zulässig ist, die  $Z_i$  für sämtliche Randbedingungen einheitlich nach der zuletzt angegebenen Formel zu berechnen. Die Gelenkkraft  $Z_m$  im letzten Gelenk  $m$ , welche gleichzeitig die Auflagerkraft einer am Längsrand gestützten Balkenreihe darstellt, errechnet sich aus folgenden Beziehungen, die sich aus Gleichung (3) nach einigen Umrechnungen ergeben.

$$Z_m = -p_{m,m} + \frac{1}{l^2 b^2} \left[ \varepsilon_{m-1}^* (f_2 \bar{g}^{\dots} + \bar{g}^{\dots}) + \frac{\beta_y^2}{m} \left(\frac{t}{l}\right)^2 \varepsilon_0^* \bar{g}^{\dots} \right], \quad \text{bei Stützung II b}$$

$$Z_m = -p_{m,m} + \frac{1}{l^2 b^2} \varepsilon_{m-1}^* (f_2 \bar{g}^{\dots} + \bar{g}^{\dots}), \quad \text{bei den Stützungen I a, I b und II a}$$

Zur Berechnung der horizontalen Komponenten der Gelenkkräfte  $Y_i$  werden die Differentialgleichungen für die Balkenbiegung um die  $z$ -Achse für alle Balken links von der Fuge  $i$  angeschrieben.

$$\begin{aligned} \frac{E J_z}{l^4} \hat{v}_1^{\dots} &= Y_1, \\ \frac{E J_z}{l^4} \hat{v}_2^{\dots} &= Y_2 - Y_1, \\ &\vdots \\ \frac{E J_z}{l^4} \hat{v}_i^{\dots} &= Y_i - Y_{i-1}. \end{aligned}$$

Die Summation ergibt

$$Y_i = \frac{E J_z}{l^4} (\hat{v}_1^{\dots} + \hat{v}_2^{\dots} + \dots + \hat{v}_i^{\dots}).$$

Setzt man hier die Gleichung (6) ein

$$Y_i = \frac{E J_z}{l^4} \left[ i v \cdots - (w_0 \cdots - w_i \cdots) \frac{t}{b} \right]$$

und beachtet (10), (11) und (51), so erhält man für die verschiedenen Stützungsarten folgende Beziehungen für die Berechnung der  $Y_i$ .

$$Y_i = \frac{t \beta_y^2}{b l^4} \varepsilon_i^* \bar{g} \cdots, \quad \text{bei den Stützungen Ia, Ib}$$

$$Y_i = \frac{t \beta_y^2}{b l^4} (\varepsilon_i^* - \varepsilon_0^*) \bar{g} \cdots, \quad \text{bei den Stützungen IIa, IIIa}$$

$$Y_i = \frac{t \beta_y^2}{b l^4} \left( \varepsilon_i^* - \frac{m-i}{m} \varepsilon_0^* \right) \bar{g} \cdots, \quad \text{bei der Stützung IIb}$$

$$Y_i = \frac{t \beta_y^2}{b l^4} \left( -\frac{i}{m} \varepsilon_m^* + \varepsilon_i^* - \frac{m-i}{m} \varepsilon_0^* \right) \bar{g} \cdots, \quad \text{bei der Stützung IIIb}$$

Die in den Gelenken wirkenden Einzelkräfte  $\tilde{Z}_i$  sind von den Lagerungsbedingungen der Balken abhängig. Wir geben im folgenden die Endbeziehungen an, die sich aus den Gleichgewichtsbedingungen an den Balkenenden, den Zwischenunterstützungen oder den Angriffspunkten von Einzellasten nach einigen Zwischenrechnungen ergeben.

Elastisch gestütztes Balkenende

$$\tilde{Z}_i = \frac{\tilde{P}_{i,i+1} - \tilde{P}_{i,i}}{2} + \frac{1}{2 l b^2} (\varepsilon_{i-1}^* - \varepsilon_{i+1}^*) (f_2 \bar{g} \cdots + \bar{g} + f_4 \bar{g}),$$

Freies Stabende

$$\tilde{Z}_i = \frac{\tilde{P}_{i,i+1} - \tilde{P}_{i,i}}{2} + \frac{1}{2 l b^2} (\varepsilon_{i-1}^* - \varepsilon_{i+1}^*) (f_2 \bar{g} \cdots + \bar{g}),$$

Elastische Zwischenunterstützung

$$\tilde{Z}_i = \frac{\tilde{P}_{i,i+1} - \tilde{P}_{i,i}}{2} + \frac{1}{2 l b^2} (\varepsilon_{i-1}^* - \varepsilon_{i+1}^*) [f_2 (\bar{g}_B \cdots - \bar{g}_A \cdots) + f_4 \bar{g}],$$

Angriffspunkt einer Einzellast

$$\tilde{Z}_i = \frac{\tilde{P}_{i,i+1} - \tilde{P}_{i,i}}{2} + \frac{1}{2 l b^2} (\varepsilon_{i-1}^* - \varepsilon_{i+1}^*) f_2 (\bar{g}_B \cdots - \bar{g}_A \cdots).$$

Greifen an den Balkenenden und den Zwischenunterstützungen keine Einzellasten an, so ist  $\tilde{P}_{i,i+1} = \tilde{P}_{i,i} = 0$  zu setzen.

Diese Formeln gelten streng für die vier Fälle, bei denen  $v = 0$  ist und mit sehr guter Näherung auch für die anderen beiden Stützungsarten. Bei starrer Stützung wird mit  $c_L \rightarrow \infty$ ,  $f_4 \rightarrow \infty$  und  $g \rightarrow 0$  der Ausdruck für die  $\tilde{Z}_i$  unbestimmt.

Die horizontal wirkenden Einzelkräfte  $\tilde{Y}_i$  berechnen sich aus

$$\tilde{Y}_i = \frac{\beta_y^2}{l^4} \left[ i G J_T v \cdots - \frac{t}{b} (\xi_0^* - \xi_i^*) \bar{g} \cdots \right].$$

Die Auflagerkräfte  $A_i$  und die vom Auflager abzutragenden Torsionsmomente  $M_{Ai}$  berechnet man bei elastischer Lagerung nach den Gleichungen (43), die man auch in der Form

$$A_i = c_L (\xi_{i-1}^* + \xi_i^*) g, \quad M_{Ai} = \frac{a^2 c_L}{2b} (\xi_{i-1}^* - \xi_i^*) g$$

schreiben kann.

## 7. Beispiel

Die Anwendung der Theorie soll an einem einfachen Beispiel gezeigt werden. Wir berechnen die Gelenkkräfte und Schnittgrößen in der tordierten Balkenreihe, die nach Fig. 9 durch vier an den Ecken wirkende Einzellasten  $\tilde{P}$  belastet ist. Diese Belastung wurde von MÜLLER [14] zur experimentellen Bestimmung der Torsionssteifigkeit einer Balkenreihe benutzt.

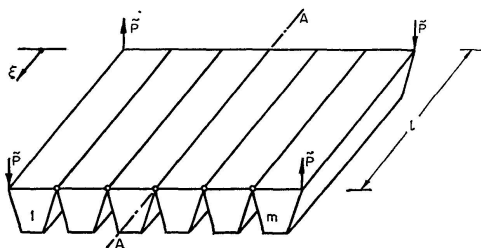


Fig. 9. Tordierte Balkenreihe.

Die Balkenreihe liege so im Raume, daß am Rande  $\xi = 0$  die Verschiebungen gleich Null sind. Die Balkenzahl  $m$  sei gerade. Für die Stützung der Längsränder liegt Fall III b nach Fig. 3 vor. Da hier als äußere Lasten nur Randkräfte auftreten, ist  $p = 0$ ; die Differentialgleichung (29) wird homogen, und damit ist auch das partikuläre Integral in (30)  $P_k^*(\xi) = 0$ . Die Integrationskonstanten der allgemeinen Lösung (30) errechnen sich aus den Randbedingungen:

$$\begin{aligned} g_k''(0) = 0 & \text{ liefert } D_k = 0, \\ g_k''(1) = 0 & \text{ liefert } C_k = 0, \\ g_k'''(0) - \lambda_k^2 g_k'(0) = \frac{b^2 l}{G J_T} \frac{\xi_k' \tilde{p}}{d_k} & \text{ liefert } B_k = -\frac{b^2 l}{G J_T} \frac{\xi_k' \tilde{p}}{\lambda_k^2 d_k}, \\ g_k'''(1) - \lambda_k^2 g_k'(1) = \frac{b^2 l}{G J_T} \frac{\xi_k' \tilde{p}}{d_k} & \text{ ist mit den bereits berechneten Konstanten} \\ & \text{ widerspruchsfrei erfüllt,} \\ g_k(0) = 0 & \text{ liefert } A_k = 0. \end{aligned}$$



Die erste Komponente  $g_0$  des Vektors  $g$  wird aus der Gleichung (31) ermittelt, die infolge  $p = 0$  hier

$$g_0'''' = 0 \quad \text{lautet.}$$

Allgemeine Lösung  $g_0 = A_0 \frac{\xi^3}{6} + B_0 \frac{\xi^2}{2} + C_0 \xi + D_0$

$$g_0''(0) = 0 \quad \text{liefert} \quad B_0 = 0,$$

$$g_0''(1) = 0 \quad \text{liefert} \quad A_0 = 0,$$

$$g_0(0) = 0 \quad \text{liefert} \quad D_0 = 0.$$

$g_0'''(0) = g_0'''(1) = 0$  ist mit  $A_0 = 0$  bereits erfüllt. Die restliche Konstante  $C_0$  hat lediglich eine Lageveränderung der Balkenreihe, und zwar eine Drehung um die Auflagerachse  $\xi = 0$  zur Folge. Wir setzen auch  $C_0 = 0$ , das bedeutet geometrisch, daß die Balkenreihe so im Raume festgelegt wird, daß ihre Längsachse  $A-A$  nach Fig. 9 bei der Verformung ihre Lage nicht verändert.

Damit ist

$$g_0 = 0, \quad g_k = -\frac{b^2 l}{G J_T} \frac{x'_k \tilde{p}}{\lambda_k^2 d_k} \xi, \quad k = 1, 2, \dots, m.$$

Mit den Angaben der Tafel 2 ist für Stützungsart III

$$\frac{1}{\lambda_k^2 d_k} = \frac{1}{m \delta \left(1 - \cos \frac{k}{m} \pi\right)} \quad \text{mit} \quad \delta = \begin{cases} 1 & \text{für } k = 1, 2, \dots, (m-1), \\ 2 & \text{für } k = m. \end{cases}$$

Die gegebene äußere Belastung wird zum Vektor

$$\tilde{p} = \tilde{P} \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ +1 \end{bmatrix}$$

zusammengefaßt.

Beachtet man, daß nach Tafel 2 die erste und die letzte Komponente von  $x_k$

$$x_{0k} = \cos 0 = +1,$$

$$x_{mk} = \cos k \pi = \begin{cases} +1 & \text{für gerades } k, \\ -1 & \text{für ungerades } k \end{cases}$$

ist, so erkennt man, daß

$$x' \tilde{p} = -2 \tilde{P} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

gilt. Damit ergibt sich für den Vektor  $\mathfrak{g}$

$$G J_T \mathfrak{g} = \bar{\mathfrak{g}} = + \frac{2 \tilde{P}}{m} b^2 l \xi \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ \frac{1 - \cos \frac{1 \pi}{m}}{1 - \cos \frac{1 \pi}{m}} \\ 0 \\ 1 \\ \frac{1 - \cos \frac{3 \pi}{m}}{1 - \cos \frac{3 \pi}{m}} \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \\ \frac{1 - \cos \frac{(m-1) \pi}{m}}{1 - \cos \frac{(m-1) \pi}{m}} \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \bar{\mathfrak{g}} = \frac{2 \tilde{P}}{m} b^2 l \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ \frac{1 - \cos \frac{1 \pi}{m}}{1 - \cos \frac{1 \pi}{m}} \\ 0 \\ 1 \\ \frac{1 - \cos \frac{3 \pi}{m}}{1 - \cos \frac{3 \pi}{m}} \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \\ \frac{1 - \cos \frac{(m-1) \pi}{m}}{1 - \cos \frac{(m-1) \pi}{m}} \\ 0 \end{bmatrix},$$

$$\bar{\mathfrak{g}}^{\cdot\cdot} = \bar{\mathfrak{g}}^{\cdot\cdot\cdot} = \bar{\mathfrak{g}}^{\cdot\cdot\cdot\cdot} = 0.$$

Daraus folgt zunächst, daß sämtliche Schnittgrößen in den Balken zu Null werden mit Ausnahme des primären Torsionsmomentes.

Für dieses erhalten wir

$$M_{TPi} = \frac{1}{b l} (\mathfrak{x}_{i-1}^* - \mathfrak{x}_i^*) \bar{\mathfrak{g}} = + \frac{2 \tilde{P} b}{m} \sum_{k=1,3,5,\dots}^{m-1} \frac{\cos \frac{(i-1) k \pi}{m} - \cos \frac{i k \pi}{m}}{1 - \cos \frac{k \pi}{m}}.$$

Die Auswertung der Summe liefert stets den Wert  $m/2$ , so daß

$$M_{TPi} = \tilde{P} b \quad \text{wird.}$$

Die stetig verteilten Gelenkkräfte  $Z_i$  und  $Y_i$  verschwinden ebenfalls. Lediglich die Einzelkräfte  $\tilde{Z}_i$  an den Fugenenden haben einen von Null verschiedenen Wert.

$$\tilde{Z}_i = \frac{1}{2 l b^2} (\mathfrak{x}_{i-1}^* - \mathfrak{x}_{i+1}^*) \bar{\mathfrak{g}} = + \frac{\tilde{P}}{m} \sum_{k=1,3,5,\dots}^{m-1} \frac{\cos \frac{(i-1) k \pi}{m} - \cos \frac{(i+1) k \pi}{m}}{1 - \cos \frac{k \pi}{m}}.$$

Diese Summe nimmt den Wert  $m$  an, und wir erhalten

$$\tilde{Z}_i = \tilde{P}.$$

Der Ausgleich der an den Ecken angreifenden Einzelkräfte  $\tilde{P}$  erfolgt über die an den Gelenkenden wirkenden Einzelkräfte  $\tilde{Z}_i$ . Diese leiten in alle Balken gleiche Torsionsmomente der Größe  $\tilde{P} b$  ein. Die Balken selbst sind frei von Biegemomenten und Querkräften. Damit besteht ein wesentlicher Unterschied zur tordierten Platte. Wie die verfeinerte Plattentheorie von Reißner zeigt,

werden dort die Einzellasten  $\tilde{P}$  durch Querkräfte der Größe  $\tilde{P}/2$  entlang aller vier Plattenränder von einer Ecke zu den anderen transportiert. Bei der Balkenreihe erfolgt der Kraftausgleich nur entlang der zu den Balken senkrecht liegenden Rändern.

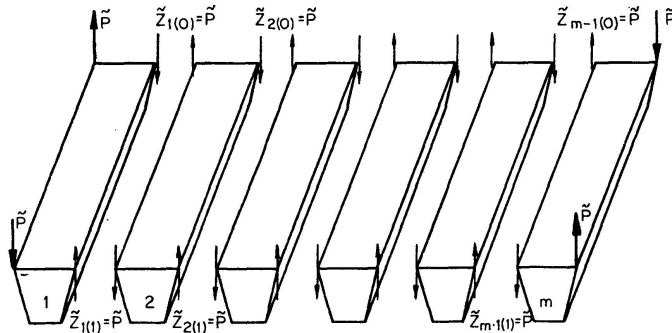


Fig. 10. Darstellung des Kräfteverlaufs in der tordierten Balkenreihe.

### Literatur

1. CSONKA, P.: Über frei aufliegende, längs eines einzigen Zwischenbalkens belastete Balkenketten. Beton und Eisen 1936, H. 11, S. 187.
2. CSONKA, P.: Über frei aufliegende Balkenreihen. Bautechnik 1958, S. 138.
3. ROESLI, A.: Lateral Load Distribution in Multi-Beam-Bridges (Querlastverteilung in Balkenreihenbrücken). Progress Report 10. Prestressed Concrete Bridge Members, July 1955, Lehigh University, Institut of Research, Bethlehem, Pennsylvania.
4. VITEK, J.: Spolupůsobení nosníků montovaných mostů (Zusammenwirkung von Brückenfertigteilen). Inženýrské stavby 1961, H. 12, S. 445.
5. KRAJCI, L., SMRCINA, M.: Spolupůsobení nosníků montovaných mostov (Mitwirkung der Träger bei Fertigteilbrücken). Inženýrské stavby 1962, H. 5, S. 191.
6. KRISTEK, V.: Výpočet spolupůsobení komůrkových nosníků montovaných mostů (Berechnung der Zusammenwirkung von Hohlkastenträgern bei Fertigteilbrücken). Inženýrské stavby 1962, H. 7, S. 269.
7. BŮCI, B.: Statický výpočet montovaných mostov s křbovým spojením prefabrikátov v priečnom smere (Statische Berechnung von Brücken aus Fertigteilen mit Gelenkverbindung in Querrichtung). Inženýrské stavby 1963, H. 2, S. 72.
8. BRILLA, I.: Statické riešenie žaluziových dosák (Statische Lösung von Balkenreihen). Stavebnický časopis 1963, H. 1—2.
9. MARTINČEK, G.: Dynamické riešenie žaluziových dosák (Dynamische Lösung von Balkenreihen). Stavebnický časopis 1963, H. 3, S. 144—164.
10. SPAETHE, G.: Ein Beitrag zur Berechnung von Brückentragwerken aus Balkenreihen. Dissertation, TU Dresden, 1965.
11. SPAETHE, G.: Die Berechnung von Einflußfeldern der Schnittgrößen und Verformungen für frei aufliegende Balkenreihen. Die Straße 1965, H. 4, S. 196—204.
12. WLASSOW, W. S.: Dünnwandige elastische Stäbe. 2 Bände, VEB Verlag für Bauwesen, Berlin 1964.
13. BORNSCHEUER, F.: Systematische Darstellung des Biege- und Verdrehungsvorganges unter besonderer Berücksichtigung der Wölbkrafttorsion. Der Stahlbau 1952, S. 1, S. 225; 1953, S. 32.
14. MÜLLER, K.: Modellstatische Untersuchung an Balkenreihen für den Überbau einer Straßenbrücke aus Fertigteilen BT 50. Die Straße 1964, H. 2, S. 68.

### Zusammenfassung

Es wird eine allgemeine Theorie zur Berechnung von Balkenreihen über rechteckigem Grundriß unter beliebiger vertikaler Belastung dargestellt. Das sich ergebende Differentialgleichungssystem für die Durchbiegungen der Balkenränder wird durch eine geeignete Lineartransformation auf Diagonalf orm überführt. Damit wird eine einfache Lösung in strenger Form möglich. Die Lösungen werden für eine Reihe technisch wichtiger Randbedingungen an den Längs- und Querrändern entwickelt. Die Randbedingungen an den Längsrändern beeinflussen das Differentialgleichungssystem und damit dessen Lösung. Die Randbedingungen für die Querränder dienen zur Bestimmung der Konstanten in diesen Lösungen. Die Anwendung der Theorie wird am Beispiel der tordierten Balkenreihe gezeigt.

### Summary

A general theory is presented for the design of series of beams disposed in a rectangular plane and subjected to any vertical loading. The resulting system of differential equations for the deflections of the edges of the beams becomes, by a suitable linear transformation, a diagonal matrix, so that a simple and rigorous solution is possible. The solutions are provided for a series of boundary conditions for the longitudinal and transverse edges commonly met with in practice. The boundary conditions for the longitudinal edges affect the system of differential equations and hence the solutions. The boundary conditions for the transverse edges are used to determine the constants of these solutions. The application of the theory is demonstrated by the example of a series of beams subjected to torsional stresses.

### Résumé

On présente une théorie générale pour le calcul de séries de poutres placées dans un plan rectangulaire, soumises à une charge verticale quelconque. Le système d'équations différentielles qui en résulte pour les flèches des bords des poutres devient, par une transformation linéaire appropriée, une matrice diagonale. Ainsi une solution simple et rigoureuse est possible. Les solutions sont apportées pour une série de conditions aux limites pour les bords longitudinaux et transversaux courantes dans la pratique. Les conditions aux limites pour les bords longitudinaux influencent le système d'équations différentielles et donc ses solutions. Les conditions aux limites pour les bords transversaux servent à déterminer les constantes de ces solutions. On montre une application de la théorie sur l'exemple de la série de poutres soumises à la torsion.

Leere Seite  
Blank page  
Page vide