

Zeitschrift: IABSE publications = Mémoires AIPC = IVBH Abhandlungen
Band: 35 (1975)

Artikel: Théorie des empilages élastiques
Autor: Bourdon, M.C.
DOI: <https://doi.org/10.5169/seals-26944>

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. [Mehr erfahren](#)

Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. [En savoir plus](#)

Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. [Find out more](#)

Download PDF: 24.07.2025

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>

Théorie des empilages élastiques

Theorie der aus elastischen Blöcken aufgebauten Säule

Theory of the Column made of the Elastic Blocks

M.C. BOURDON

Ingénieur principal à la SOCOTEC, Paris.

Généralités

Considérons un poteau en béton armé en équilibre fléchi sous une charge N appliquée avec une excentricité a . Il se comporte comme s'il était formé de l'association de deux poteaux fictifs constitués l'un par le béton seul, et l'autre par la cage d'armatures supposée entretoisée par les armatures transversales et des «bielles» de béton obliques.

La charge critique ultime de flambement d'ensemble du poteau a pour borne inférieure la somme des charges de la pièce en béton et de la cage d'armature, considérées isolément dans le même état déformé (le béton pouvant être fissuré si la flexion est assez importante).

On pourra donc aborder la question du flambement des poteaux en béton armé si l'on est en mesure :

- a) de résoudre le problème théorique du poteau en béton dépouillé de son armature;
- b) de déterminer l'influence des liaisons «béton-acier» sur les charges ultimes de chacune des deux colonnes, dans leur état limite déformé, ou ce qui revient au même, l'erreur commise en imposant à chaque poteau une déformée théorique déterminée, différente pour les besoins du calcul de la déformée commune dont le calcul ne peut être effectué, dans l'état actuel des connaissances, que pour des conditions d'extrémité particulières.

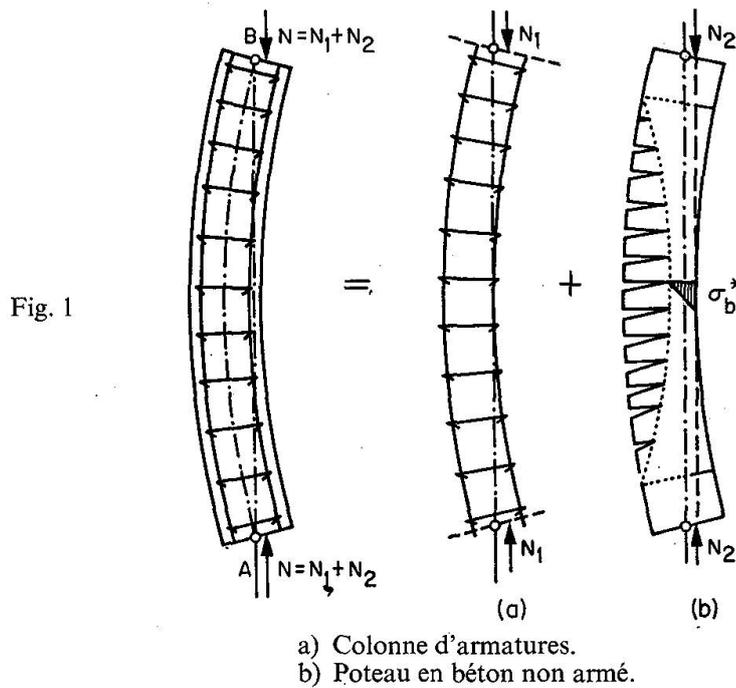
On admettra que la cage d'armature supposée seule subit une déformation sinusoïdale correspondant à la solution approximative donnée généralement à ce problème, dans le domaine élastique. Cette déformée sinusoïdale serait sous charge axiale, un arc complet de sinusoïde et, sous charge excentrée, un arc partiel de sinusoïde (voir Fig. 1).

Pour pouvoir raccorder notre étude aux hypothèses de calcul habituelles de la résistance des matériaux, nous admettrons :

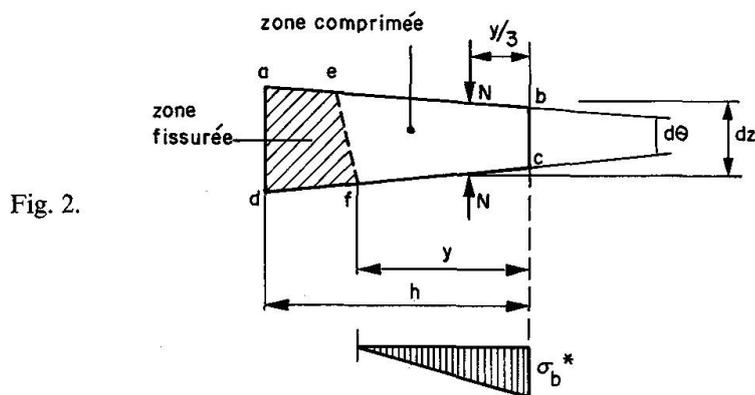
- que le béton ne résiste pas à la traction, ce qui revient à assimiler la colonne à un empilage d'éléments élastiques de même hauteur, dont les faces sont normales à la ligne moyenne;

— que l'hypothèse de BERNOULLI (indéformabilité des sections) et la loi de HOOKE (proportionnalité des déformations aux contraintes) sont toutes les deux vérifiées pour la partie des éléments soumise aux efforts, et que la partie non sollicitée, correspondant à la zone fissurée, n'intervient pas dans la déformation des éléments.

Examinons pour simplifier le cas d'un empilage d'éléments rectangulaires de largeur b perpendiculairement au plan de flexion, et h parallèlement au plan de flexion.



Théorie élémentaire (voir Fig. 2)



Soit N la charge appliquée,
 y la largeur de repos d'un élément sur l'élément contigu,
 z la cote de l'élément,
 E le module d'élasticité du béton.

La contrainte maximale, sur la fibre la plus sollicitée, est:

$$\sigma = \frac{2N}{by} \quad (1)$$

Le raccourcissement unitaire de cette fibre est:

$$\varepsilon = -\frac{\sigma}{E} = -\frac{2N}{byE} \quad (2)$$

La rotation élémentaire:

$$\frac{d\theta}{dz} = -\frac{\varepsilon}{y} = \frac{2N}{by^2E} \quad (3)$$

Il résulte de la répartition triangulaire des contraintes que:

$$|\theta| = \frac{1}{3} \frac{dy}{dz^2} \quad \text{d'où} \quad \left| \frac{d\theta}{dz} \right| = \frac{1}{3} \frac{d^2y}{dz^2}$$

$$\text{d'où} \quad \frac{d^2y}{dz^2} = \varepsilon \cdot \frac{6N}{by^2E} \quad (4) \quad \text{avec } \varepsilon = \pm 1$$

soit x la déformation transversale de la section par rapport à la ligne d'action de N

$$x = \frac{h}{2} - \frac{y}{3} \quad (5) \quad (\text{avec } y < h)$$

$$\text{d'où} \quad \frac{d^2x}{dz^2} = \varepsilon' \cdot \frac{2N}{by^2E} \quad (6) \quad (\text{avec } \varepsilon' = \pm 1)$$

Le problème posé se ramène donc à l'intégration de l'équation différentielle du 2^e ordre:

$$\boxed{y^2 \cdot y'' = \varepsilon \cdot A} \quad (7)$$

où A est une constante et $\varepsilon = \pm 1$

En appelant σ_b^* la contrainte maximale dans la section initiale ($z = 0$), pour laquelle la largeur d'appui est

$$y_0 = \frac{2N}{b\sigma_b^*} \quad (8)$$

et en prenant la variable auxiliaire:

$$u = \frac{y}{y_0} = \frac{\sigma_b^*}{\sigma_b} \quad (9)$$

on trouve les solutions de (7) sous les formes suivantes:

Premier cas:

$$\varepsilon = +1, \quad f_1(u) = \text{Arg} \operatorname{ch} \sqrt{u} + \sqrt{u(u-1)} \quad (10)$$

$$\frac{z}{y_0} = \pm \sqrt{\frac{E}{6\sigma_b^*}} f_1(u) \quad (11)$$

Deuxième cas:

$$\varepsilon = -1, f_2(u) = \text{Arc cos } \sqrt{u} + \sqrt{u(u-1)} \quad (12)$$

$$\frac{z}{y_0} = \pm \sqrt{\frac{E}{6\sigma_b^*}} f_2(u) \quad (13)$$

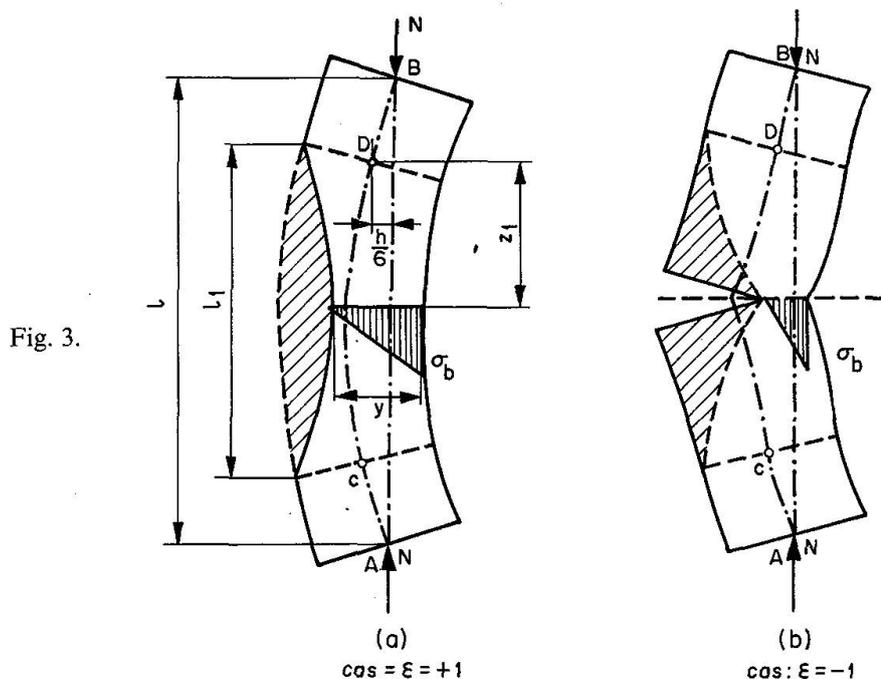
Ces solutions correspondent aux Figs 3a et 3b. La rotation à la limite supérieure de l'empilage est:

$$\theta = \sqrt{\frac{2(\sigma_b^* - \sigma_1)}{3E}} \quad (14)$$

avec

$$\sigma_1 = \frac{2N}{bh} \quad (15)$$

Considérons maintenant une pile en béton non armé, axialement chargée, de hauteur l (section rectangulaire).



Soit $l_1 = 2z$, la longueur de la «zone fissurée» assimilable à un «empilage».

L'égalité des rotations à la limite de la zone fissurée conduit à la relation suivante:

$$\text{tg} \left[\sqrt{\frac{3\sigma_c l}{E h}} \frac{f_1(u_1)}{u_1 \sqrt{u_1}} \right] = \frac{1}{2\sqrt{u_1 - 1}} \quad (16)$$

avec

$$u_1 = \frac{\sigma_b^*}{2\sigma_c} \quad (17)$$

$$\sigma_c = \text{contrainte critique ultime de la pièce fissurée} = \frac{N_c}{bh} \quad (18)$$

Si on compare σ_c à la contrainte critique eulérienne de la pièce

$$\sigma_e = \frac{\pi^2}{12} \frac{Eh^2}{l^2} \tag{19}$$

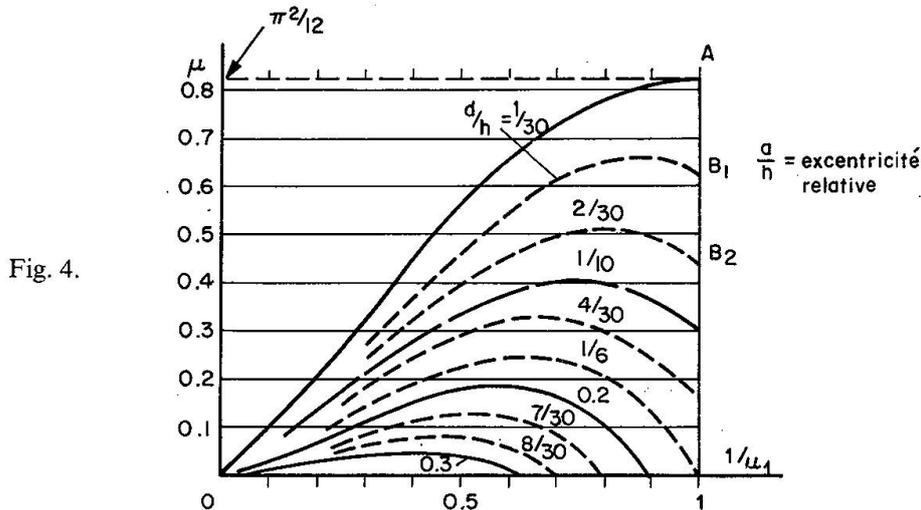
on obtient la courbe OA de la Fig. 4, et pour des pièces soumises à des charges excentrées le réseau des courbes telles que OB_1, OB_2, \dots , qui montrent la variation du rapport de la charge ultime N à la charge critique d'Euler N_c en fonction de l'excentricité relative a/h pour diverses valeurs du paramètre u_1 défini plus haut.

L'intersection d'une courbe a/h avec la droite de pente

$$\frac{\sigma^* \lambda^2}{24E} = \frac{1}{2} \frac{\sigma_b^*}{E} \left(\frac{l}{h}\right)^2 \tag{20}$$

donne la solution du problème de l'équilibre fléchi de l'empilage d'élanement

$$\lambda = 2\sqrt{3} l/h$$



Portons en abscisse dans un diagramme rectangulaire les valeurs du paramètre

$$\frac{1}{2} \frac{\sigma_b^*}{E} \cdot \left(\frac{l}{h}\right)^2 \text{ et en ordonnée}$$

celles du coefficient

$$\mu = \frac{\pi^2}{12} \frac{N}{N_c}$$

on obtient le réseau des courbes de la Fig. 5 graduées en fonction de l'excentricité relative a/h .

Ces courbes comprennent, comme on pouvait s'y attendre, un segment de la droite OA passant par l'origine, de longueur variable, suivi d'un arc tel que EF ascendant et d'un arc plongeant FG .

Le segment OE correspond à l'équilibre non fissuré, l'arc EF à un équilibre fissuré stable, et l'arc EG à un équilibre instable.

On constate que pour des valeurs élevées de l'élanement, la théorie des empilages donne une charge ultime nulle.

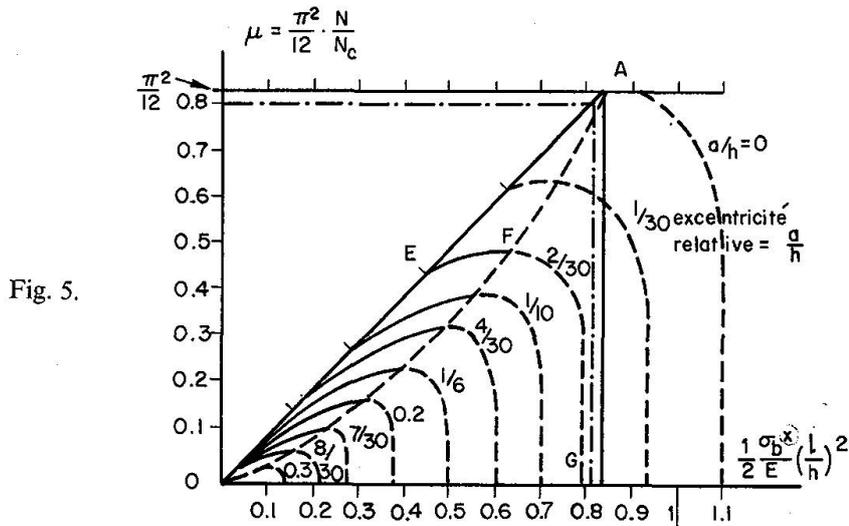


Fig. 5.

On peut aussi représenter l'effet de l'excentricité sur la stabilité d'un empilage élastique par le diagramme ci-dessous (Fig. 6).

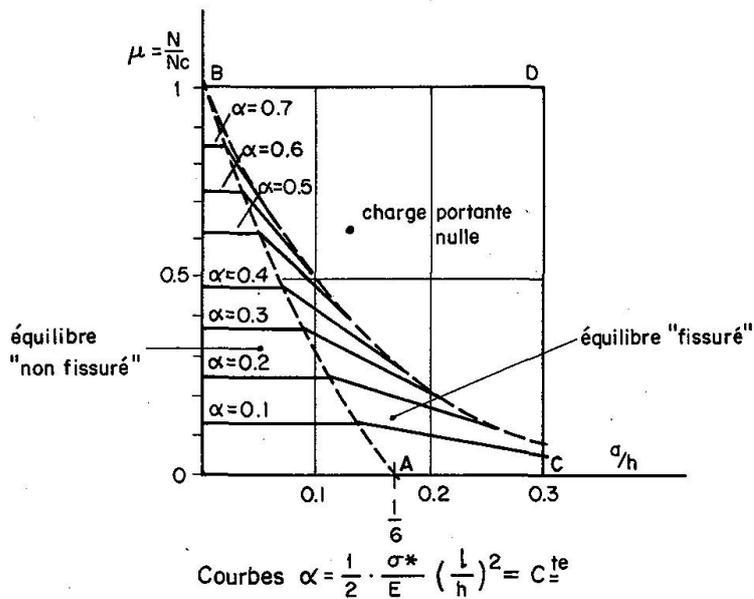


Fig. 6.

A chaque valeur de $\alpha = \frac{1}{2} \cdot \frac{\sigma_b^*}{E} \left(\frac{l}{h}\right)^2$ correspond une courbe $\frac{N}{N_c} = f\left(\frac{a}{h}\right)$ projection sur le plan $\left(\frac{a}{h}, \frac{N}{N_c}\right)$ de l'intersection par un plan parallèle à ces axes de la surface caractéristique de la charge limite admissible de la colonne.

Application aux poteaux en béton armé (Fig. 7)

Soit I_1 l'inertie de la section de béton non armé, I_2 l'inergie de la section des aciers et $(I_1 + mI_2)$ celle de la section homogénéisée.

On obtiendra une solution approchée du problème du poteau en béton armé de section rectangulaire, et à armatures symétriques en procédant à la construction indiquée sur la Fig. 7 qui réalise une interpolation géométrique entre les solutions correspondantes aux cas où $I_a = 0$ (empilage) et $I_b = 0$ (colonne fictive d'acier).

Nous avons procédé à la vérification du modèle proposé au moyen des résultats d'essais effectués sur deux séries de poteaux de $9 \times 12,7$ cm axialement chargés ayant des pourcentages d'armature de 1,5% et 2,5%.

Les résultats du calcul de la charge ultime par la théorie simplifiée et ceux des essais concordent de façon satisfaisante, eu égard à la dispersion assez élevée de ces derniers.

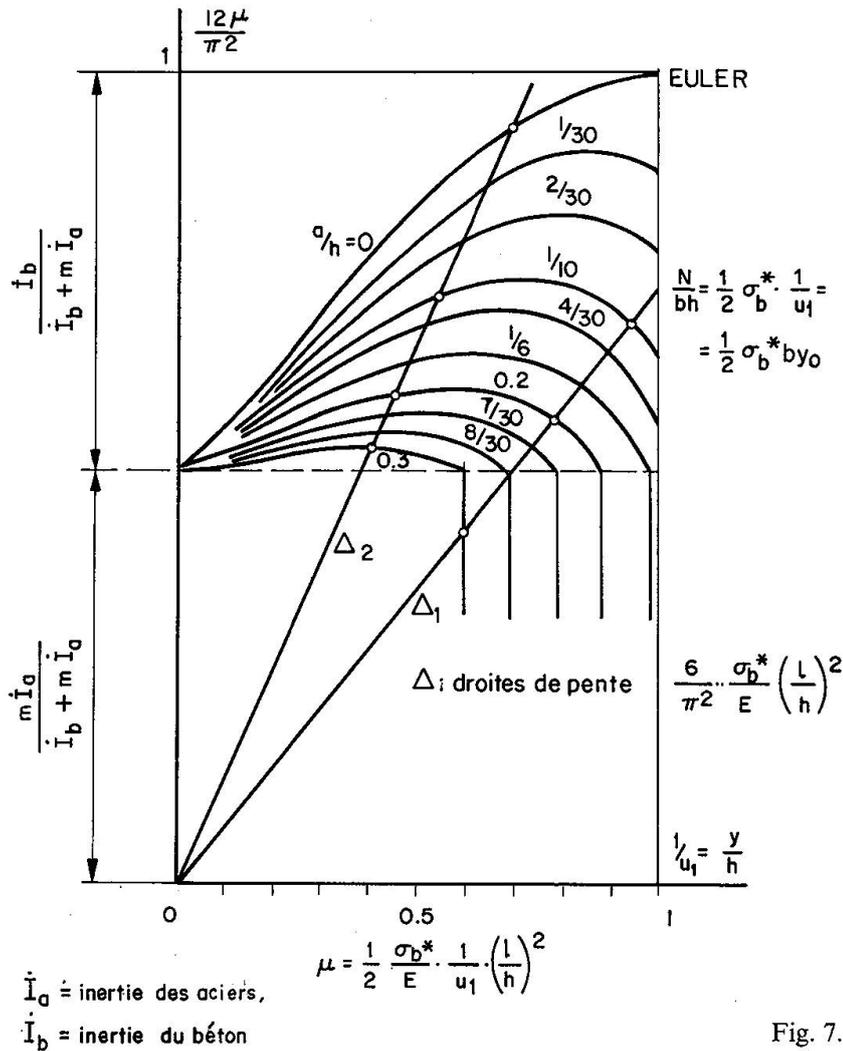
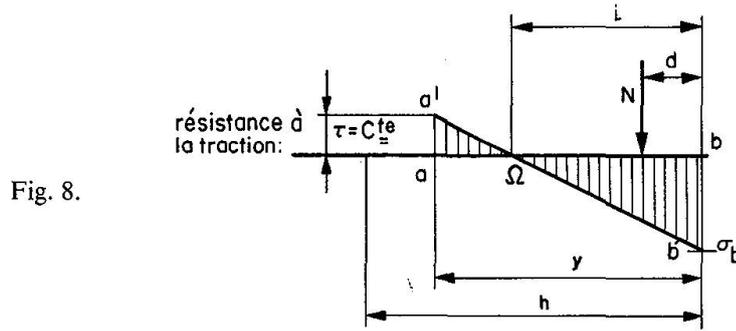


Fig. 7.

Prise en compte de la résistance du béton à la traction (Fig. 8)

Pour la colonne non armée, tout se passe comme si la charge était accrue du terme $\tau b y$ et que la contrainte limite dans la section la plus sollicitée était de $\sigma_b^* + 2 |\tau|$ (au lieu de σ_b^*)¹.

¹ Voir à ce sujet: C. BOURDON, Problèmes d'élasticité et de poussée des terres. Le Génie civil, N° 7, de juillet-août 1967, pp. 541 à 544.



Poteaux «précontraints»

On vérifie qu'une précontrainte centrée ne modifie pas la loi de déformations de l'empilage. Mais les conditions aux limites sont évidemment changées. Pour $z = 0$ on a

$$\sigma^* = 2 \frac{P + N}{b y_0} \quad (21)$$

d'où, avec les notations déjà utilisées:

$$\frac{dz}{y_0} = \sqrt{\frac{E}{6\sigma^*} \left(1 + \frac{P}{N}\right)} \cdot \sqrt{\frac{u}{u-1}} \cdot du \quad (22)$$

Tout se passe comme si la contrainte limite du béton dans la section la plus sollicitée était réduite dans le rapport $N/N + P$.

La précontrainte sera favorable pour des charges modérées, notablement inférieures à la charge critique, mais elle deviendra nuisible si la charge de la colonne se rapproche de la charge ultime, la compression supplémentaire due à la précontrainte s'ajoutant évidemment à la contrainte de compression due à la charge.

Prise en compte du poids propre dans la théorie de la stabilité élastique des empilages

Pour un empilage élastique soumis seulement à son poids propre, l'équation différentielle de l'équilibre s'écrit (avec les mêmes notations que précédemment):

$$y^2 \cdot y'' = \varepsilon \frac{6\bar{\omega}h}{E} (l - z) \quad (23)$$

où $\bar{\omega}$ est le poids volumique du matériau.

En remplaçant les différentielles dz et dp par des accroissements finis Δz et Δp , on peut déterminer facilement, de proche en proche, la forme de la déformée, puisque

$$x = \frac{h}{2} - \frac{y}{3}$$

Conclusion

La théorie des empilages élastiques permet d'analyser le comportement sous charge des poteaux en béton armé et de fournir des solutions approchées aux problèmes de flambement des poteaux, des murs, des plaques chargées dans leur plan, et des coques.

Conséquences pratiques pour le projet. Economie et sécurité des pièces comprimées élancées

Dans la pratique, les éléments de structure comprimés réels, et notamment les poteaux en béton armé, ne sont jamais soumis à une charge rigoureusement axiale. En outre, leur forme géométrique comporte des défauts d'origine, dont l'effet est également assimilable à une excentricité de chargement. La charge produit en outre une amplification des effets de ces diverses excentricités, que traduit bien dans le domaine élastique la formule de Perry, et dont les règlements de béton armé tiennent compte en faisant intervenir une flèche additionnelle. Le calcul est ensuite conduit comme en flexion composée.

Toutes ces méthodes, même les plus élaborées, tombent en défaut dans la plupart des cas pratiques, pour lesquels la «longueur de flambement libre» reste le plus souvent très mal connue. Nous renvoyons à ce sujet à notre étude parue en juillet et décembre 1972 dans le Bulletin technique de la Suisse romande.

Il résulte de la théorie des empilages élastiques, exposée ci-dessus, que pour les pièces comprimées très élancées, toute fissuration du béton annule pratiquement la force portante de ce composant et que l'on ne peut plus compter pour de telles pièces que sur celle de la cage d'armatures.

Du point de vue de la sécurité, il est préférable de concevoir une pièce comportant une bonne armature longitudinale plutôt qu'une pièce d'équarrissage plus grand, mais insuffisamment armée. A notre avis, l'économie ne doit pas être recherchée, comme elle l'est trop souvent en pratique, du côté des aciers, au prix d'une dépense de béton supplémentaire. Du point de vue réglementaire, nous pensons que, pour les pièces très élancées, il serait légitime de fixer un pourcentage minimal d'armatures longitudinales en fonction de l'élancement.

Une telle mesure ne grèverait en fait que très peu l'économie des projets. Elle contribuerait à éliminer un nombre croissant de risques d'effondrements dont le caractère soudain et brutal nous permet de dire qu'au regard de tels risques la sécurité n'a pas de prix.

Bibliographie

TIMOSHENKO: Théorie de la stabilité élastique.

BROMS, B. and VIEST, I.M.: Long Reinforced Concrete Columns. A Symposium, Transactions, ASCE V 126, 1961.

ROBINSON J.R. and MODJABI: La précision des charges de flambement des poteaux en béton armé par la méthode de M.P. Faessel. Annales ITBTP, N° 249, septembre 1968.

BOURDON, C.: Remarques pratiques sur le calcul des barrages-voûtes. Le Génie civil, 15 juillet 1961.

- BOURDON, C.: Flambement des pieux en milieu élastique – Flambement des enveloppes coniques. Le Génie civil, mars 1969.
- BOURDON, C.: Flambement des coques. Le Génie civil, décembre 1971.
- BOURDON, C.: Discussion sur la stabilité élastique des poteaux, des pieux et des coques. Bulletin technique de la Suisse romande. N° 15, juillet 1972, N° 25, décembre 1972.
- BOURDON, C.: Généralisation de la théorie d'Euler du flambement des pièces rectilignes comprimées. Le Génie civil, N°s 1 et 2, janvier-février 1973, et N° 4, avril 1973.

Résumé

En partant d'un modèle mécanique simple, constitué d'une colonne réalisée en empilant des tronçons, posés à joints secs, comme les éléments des colonnes antiques, il est possible de mettre en évidence des critères d'instabilité très éloignés de ceux de la théorie d'Euler, et d'en tirer des conclusions intéressantes pour les pièces en béton armé.

Pour les pièces en béton armé de grand élancement, il est prudent de ne pas descendre au-dessous d'un pourcentage minimal d'armatures longitudinales.

Zusammenfassung

Ausgehend vom einfachen mechanischen Modell der aus einzelnen Blöcken zusammengesetzten Säule (wie etwa die steinernen Säulen der Antike), werden Stabilitätskriterien abgeleitet, die von der Euler'schen Theorie beträchtlich abweichen. Auf Stahlbetondruckglieder angewandt, können hieraus interessante Folgerungen gezogen werden.

Bei schlanken Stahlbetondruckgliedern soll ein Mindestprozentsatz der Längsbewehrung nicht unterschritten werden.

Summary

On the basis of a simple mechanical model consisting of prismatic or cylindrical blocks put each on the top of the other, like the sections of an antique column, there can be found instability criteria, that differ fundamentally from Euler's solution. Interesting conclusions concerning reinforced concrete columns can be gathered.

For long concrete columns it is recommended to use adequate longitudinal reinforcement ratios.