Zeitschrift: IABSE publications = Mémoires AIPC = IVBH Abhandlungen
Band: 35 (1975)

Artikel: Les normes structurales et l'inélasticité du béton armé
Autor: Cohn, M.Z.
DOI: https://doi.org/10.5169/seals-26945

Nutzungsbedingungen
Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Mehr erfahren

Conditions d'utilisation
L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. En savoir plus

Terms of use
The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. Find out more

Download PDF: 23.07.2025

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, https://www.e-periodica.ch

Les normes structurales et l'inélasticité du béton armé

Die statisch konstruktiven Normen und das nicht elastische Verhalten des Stahlbetons

Structural Norms and the Inelasticity of Reinforced Concrete

M.Z. COHN
Professeur de génie civil à l'Université de Waterloo, Ontario, Canada

Introduction

Le comportement inélastique des structures en béton armé a été reconnu depuis la première guerre mondiale [1], [2]. Un demi-siècle de recherches très poussées [3], [4], [5] a contribué à la clarification d'un nombre important de problèmes. Pourtant, malgré la richesse des données théoriques et expérimentales disponibles, on est encore assez loin d'une adoption générale des concepts inélastiques dans le dimensionnement des structures. Par ailleurs, ceci est reflété dans le progrès très timide de ces concepts dans l'élaboration des normes et règlements des structures en béton armé.

Comment expliquer cet état de choses? Il est possible qu'un mélange de résistance aux évolutions, difficultés apparentes des nouvelles méthodes inélastiques, ainsi que certains doutes dans les hauts milieux professionnels, en soient, au moins en partie, responsables. Des discussions intéressantes ont été menées sur les avantages et les inconvénients des méthodes inélastiques sur lesquelles il n'y a pas lieu d'insister ici, mais le lecteur intéressé trouvera des arguments et contre-arguments révélateurs sur la question dans certains documents [6], [9].

Il paraît assez évident à l'auteur qu'il n'y a pas de raison majeure pour renoncer à la généralité, la simplicité relative et la tradition des méthodes élastiques, si ce n'est peut-être le besoin fondamental d'une considération plus correcte de tous les facteurs du dimensionnement des structures en béton.

En effet, une étude des normes et recommandations les plus connues [10], [16] peut illustrer abondamment les divergences des critères, des limites de sécurité, de l'effet des charges, de l'action inélastique, etc. Une méthode rationnelle devrait raffiner et harmoniser *tous* les facteurs mentionnés. Malgré son importance, la considération des phénomènes inélastiques dans les structures en béton armé ne représente qu'un premier pas vers l'élaboration d'une théorie plus rationnelle, à savoir la meilleure utilisation des propriétés réelles du matériau. De plus, une théorie idéale aura à considérer des valeurs plus réalistes des charges, leurs combinaisons et variations

statistiques, des facteurs de pondération des charges correspondant à ces variations, des facteurs de sécurité vis-à-vis des matériaux et enfin des conditions de service, etc.

En nous référant seulement au facteur matériau et à son comportement élastique ou inélastique, on peut distinguer quatre groupes de théories de calcul des structures, selon l'hypothèse admise sur le comportement au niveau des sections individuelles ou des structures en ensemble. Ceci est résumé dans le tableau 1 ci-dessous:

Tableau 1: Théories de calcul des structures en béton armé

Théorie	Section	Structure	Norme	Réf.
1. Contraintes admissibles	Elastique	Elastique	CC BA 68	(13)
2. A rupture (états limites)	Inélastique	Elastique	ACI 318-71	(10)
3.	Elastique	Inélastique	DS 411-49	(16)
4. Charges limites	Inélastique	Inélastique	NTU 123-55	(11)

Avec l'adoption dans les normes américaines [10], russes [11] et européennes [12] des principes des états limites et des phénomènes inélastiques dans les sections, il reste à franchir le pas suivant: celui d'accepter aussi le comportement inélastique des structures et d'en tirer les conséquences pratiques correspondantes.

Même les normes actuelles en bénéficient en partie en permettant une redistribution partielle des moments élastiques sous des conditions bien spécifiques. Mais tout ce potentiel offert par l'inélasticité des structures en béton armé ne peut être exploité que par les méthodes de calcul «inélastique». Les principaux types de méthodes sont résumés dans le tableau 2, avec à leurs limites les méthodes parfaitement «élastiques» ou «plastiques». La classification est basée sur la satisfaction explicite (+) des conditions *d'équilibre limite, de compatibilité et d'utilisation normale* (conditions de service), par chaque type de méthode.

Tableau 2: Méthodes de calcul des structures en béton armé

Méthodes	Critères de calcul		
	Equilibre limite	Compatibilité	Conditions de service
Elastique	+	−	+
Historique	+	+	+
Compatibilité	+	+	−
Equilibre	+	−	+
Plastique	+	−	−

L'objet de la présente étude est d'examiner la pratique actuelle des normes officielles au sujet du comportement inélastique des structures ainsi que les perspectives ouvertes par le développement des méthodes inélastiques, à savoir les méthodes de «compatibilité» et d'«équilibre».

Les méthodes «historiques» qui, dans l'approche manuelle [17], [18] ou par ordinateur [19], [20] consistent en une chaîne d'analyses élastiques, présentent un

intérêt spécial dans la recherche, mais ne seront pas envisagées ici; on estime qu'elles ne pourront être appliquées en pratique qu'après des simplifications considérables qui restent à développer.

Nous allons examiner les diverses déviations des méthodes élastiques permises par les normes en vigueur les plus connues. Ensuite, nous passerons en revue les principes des normes et recommandations possibles, basés sur les méthodes de «compatibilité» et d'«équilibre». Quelques exemples numériques seront présentés afin d'illustrer et de comparer les solutions basées sur les normes en vigueur ainsi que sur les recommandations possibles, déduites des méthodes inélastiques.

On trouvera dans l'annexe de cette étude les clauses concernant la redistribution plastique en diverses normes.

Méthode élastique

Dans notre contexte, la méthode «élastique» consiste à déterminer les sollicitations des structures fléchies en partant des hypothèses des théories élastiques et à dimensionner les sections en acceptant l'inélasticité du béton armé, selon, par exemple, la théorie des «états limites» (deuxième ligne du tableau 1).

Moments élastiques

Les méthodes d'analyse élastique fournissent les enveloppes des moments sous charges de service, sous la forme:

$$M = aG1 + bP1 \tag{1}$$

où a et b sont des constantes qui définissent les valeurs extrêmes des moments dans la section considérée, dus respectivement aux charges permanentes (G) et aux surcharges (P). Ces constantes dépendent de la géométrie, des conditions d'appuis et des types de charges de la structure. Les valeurs 1 sont définies par la géométrie de la structure.

Par exemple, pour une poutre continue à cinq portées égales, sous charge uniformément distribuée et aux appuis simples aux extrémités, les valeurs a et b résultant des théories élastiques et plastiques sont indiquées dans la fig. 1. Dans la même figure sont données les valeurs approximatives selon les différentes normes nationales (les valeurs b sont placées entre parenthèses sauf dans les cas où les recommandations prévoient $a = b$).

On peut remarquer que, dans la mesure où les coefficients a et b adoptés dans ces normes ne correspondent pas aux valeurs élastiques, celles-ci supposent implicitement une certaine redistribution plastique des moments dans les poutres continues en béton armé.

Cependant, le choix des coefficients a et b n'est pas seul à déterminer la nature d'une solution «élastique» ou «presque élastique». En effet, le critère de dimensionne-

ment consiste à assurer que les moments résistants M_u sont au moins égaux aux moments élastiques développés sous les combinaisons les plus défavorables des charges ultimes F_u:

$$M_u > M(F_u) \tag{2}$$

A la limite, l'équation (2) produit une solution si F_u est défini, c'est-à-dire lorsque la relation entre les moments aux états limites d'utilisation et aux états limites ultimes est précisée conformément aux critères de sécurité adoptés.

Critères de sécurité

En général, la sollicitation correspondant à l'état limite ultime S_u est définie en diverses normes comme une fonction linéaire des sollicitations dues aux charges appliquées S_k, soit:

$$S_u = \Sigma_k \gamma_k S_k \tag{3}$$

où γ_k est le facteur de pondération (ou de sécurité), correspondant à la Kième charge ou sollicitation considérée. Dans les normes, on recommande un certain nombre de combinaisons de sollicitations de type (3), les valeurs de γ_k adoptées pour chaque cas se trouvant dans une certaine relation à la probabilité de la combinaison respective et ses conséquences sur la sécurité de la structure.

Par exemple, en nous référant à la combinaison fondamentale des charges permanentes et imposées, les facteurs de pondération respectifs sont:

$\gamma_g = 1.4$ et $\gamma_p = 1.7$ dans les normes américaines [10];
$\gamma_g = 1.1$ et $\gamma_p = 1.4$ dans les normes soviétiques [11];
$\gamma_g = 1.5$ et $\gamma_p = 1.5$ dans les recommandations CEB [12];
$\gamma_g = 1.4$ et $\gamma_p = 1.6$ dans le code de pratique britannique [14].

Un concept souvent utile est le facteur de sécurité d'ensemble (ou facteur moyen de charge) γ_0, qui est une extension directe de la définition de la sécurité dans les méthodes des «contraintes admissibles», à savoir le rapport des charges ultimes S_u et en service S:

$$\gamma_0 = \Sigma_k \gamma_k S_k / \Sigma_k S_k = S_u/S \tag{4}$$

Dimensionnement des sections

Pour le cas typique de dimensionnement d'une section fléchie, le critère de base (2) peut être exprimé en fonction de (1) et (3) ou (4), et en affectant la résistance théorique de la section d'un facteur de minoration Φ comme suit:

$$\Phi M_u \geqslant a\gamma_g G1 + b\gamma_p P1 \tag{5}$$

Le facteur Φ tient compte de la variabilité des propriétés des matériaux et des conditions de service sous divers types de contraintes. Pour les éléments fléchis,

dont la rupture a lieu en traction $\Phi = 0{,}9$, selon les normes américaines [10] et russes [11], $\Phi = 1/1.15$ selon les recommandations CEB [12] et $\Phi = 1$ dans d'autres normes officielles.

Il est bien évident que pour une structure donnée, les résultats des calculs peuvent, en suivant les normes des différents pays, être comparés seulement en considérant tous les aspects concernant:

1. la théorie de résistance adoptée pour l'état limite ultime (évaluation de M_u);
2. la théorie statique pour l'analyse des sollicitations dues aux charges permanentes et aux surcharges (évaluation de a et de b);
3. la prise en compte de la dispersion des propriétés des matériaux (choix de Φ);
4. la manière d'envisager la sécurité (choix des facteurs γ_k).

Redistribution des moments

L'exemple de la poutre continue à portées égales de la fig. 1 indique que les normes permettent une déviation limitée par rapport à la théorie conventionnelle élastique, en raison des effets structuraux de l'inélasticité du béton armé.

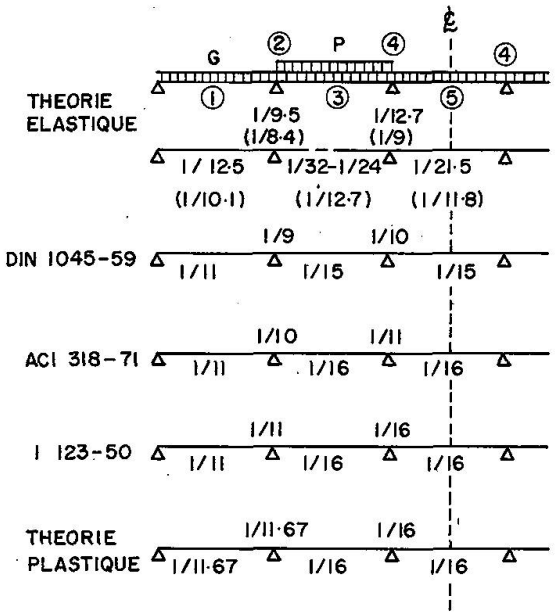


Fig. 1. Coefficients des moments élastiques $[(M/G + P)L^2]$ selon différentes normes.

D'une manière plus générale, les normes permettent aussi des redistributions des moments élastiques dans les structures ayant des cas de charges, de géométries et de conditions d'appui quelconques. Ces provisions sont reproduites pour la convenance du lecteur dans la première annexe à cette présentation.

On remarque les tendances suivantes:

1. Le degré maximal admissible de *redistribution arbitraire* des moments élastiques varie de 15% dans les recommandations CEB [12] et de 20% dans le code américain [10], jusqu'à 30% dans les standards russes [21] et britanniques [14], ou même jusqu'à 67% dans le standard danois [16].

2. Pour chaque condition de charge, la redistribution des moments, dans les limites mentionnées ci-dessus, est permise, si les conditions d'équilibre restent assurées partout dans la structure, c'est-à-dire si les réductions convenables des moments imposés en certaines sections sont compensées par des augmentations suffisantes dans le reste de la structure.
3. Dans certaines normes, la redistribution des moments n'est permise que sous limitation des quantités maximales d'armatures (nettes en traction) des sections critiques: $\bar{\omega} - \bar{\omega}' \leqslant 0{,}3$ en I 123-50 [21]; $\bar{\omega} - \bar{\omega}' \leqslant 0{,}5\bar{\omega}_b$ en ACI 318-71 [10], où $\bar{\omega}_b$ est le pourcentage mécanique d'armature compensée (correspondant à la rupture simultanée en traction et compression). Les normes britanniques [14] prévoient la limitation équivalente de la hauteur relative de l'axe neutre, soit: $0{,}3 \leqslant \alpha \leqslant 0{,}6$ lorsque la redistribution admise varie de 30% à 0%.

Les provisions principales sur les redistributions admissibles des moments sont résumées clairement dans les diagrammes de la fig. 2 dont les zones hachurées définissent les *domaines des redistributions admissibles* pour les normes américaines, russes et britanniques par rapport à ceux des règles CEB.

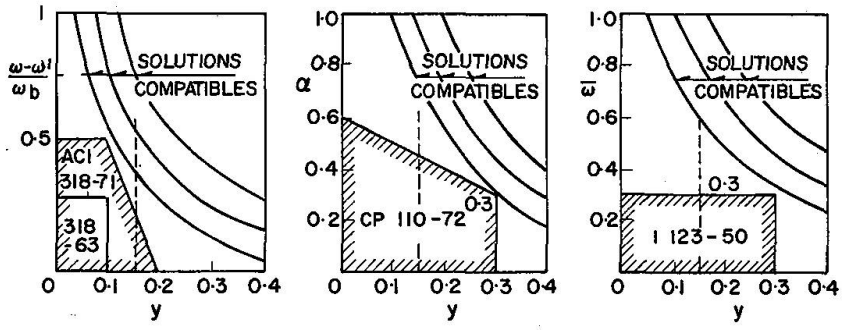


Fig. 2. Domaines des redistributions admissibles des moments élastiques extrêmes, selon différentes normes.

Evaluations des normes actuelles

Les normes actuelles, basées sur les concepts élastiques, ont constitué des outils satisfaisants dans la pratique des projets en béton armé.

Certaines normes reconnaissent la présence des phénomènes inélastiques et permettent, d'une manière assez simpliste, d'en tirer avantage. Néanmoins, leur application donne lieu à un nombre de contradictions internes et de problèmes de principe qui restent à résoudre:

1. Les sollicitations à l'état limite ultime S_u, calculées par une analyse élastique sous les charges ultimes (c'est-à-dire avec les facteurs de pondération respectifs) correspondent à un état limite fictif, puisque au-delà d'une valeur relativement faible des charges le comportement du béton armé cesse d'être élastique.
2. Le procédé consistant à égaliser la résistance à la rupture des sections avec les sollicitations élastiques correspondantes sous charges ultimes conduit en général à des solutions du côté de la sécurité. Néanmoins, le traitement élastique des structures, tout en acceptant la plasticité de ses sections, reste une approche strictement conventionnelle dont on peut mettre en doute la rationalité.

3. Les recommandations officielles sur la redistribution arbitraire des moments élastiques (sous certaines conditions) posent comme principe que, sauf accident, la structure possède une ductilité suffisante pour permettre l'adaptation plastique par rapport aux états de sollicitations désirées. Malheureusement, les limitations imposées (armature en traction ou hauteur de l'axe neutre) visent à la satisfaction de la compatibilité, en ignorant totalement les conditions de service, ainsi que l'influence d'autres facteurs affectant la redistribution plastique, notamment le rapport des charges permanentes et utiles, la géométrie de l'ossature, les conditions d'appui, la distribution des résistances (ou des rigidités en flexion) etc.
4. Certaines normes qui permettent la redistribution arbitraire (ou les moments du type $c(G+P)1$, en fig. 1) peuvent conduire à des solutions où des zones plastiques se développent sous conditions de service, si on impose des redistributions poussées lorsque les charges permanentes sont dominantes ($G/P \rightarrow 0$). Ceci est encore plus grave lorsque la redistribution permise va jusqu'à 67% des moments élastiques [16]. Une application irréfléchie de cette clause doit conduire inévitablement à des flèches et fissures exagérées, ainsi qu'à des contraintes au-delà de la limite élastique.

Nous allons maintenant démontrer que le respect d'une marge de sécurité spécifique vis-à-vis de l'état limite d'utilisation impose des limites précises à la redistribution inélastique admissible.

Pour simplifier la discussion, supposons qu'on fasse un projet selon les normes américaines, donc avec $\gamma_g = 1.4$ et $\gamma_p = 1.7$. Choisissons également la valeur $\gamma_1 = 1.2$ pour le facteur vis-à-vis de l'écoulement initial d'une section critique (rotule plastique). Il n'est pas difficile alors de montrer [22] que le rapport x_j entre les moments de calcul M_{pj} d'une section j (qui est à déterminer par le processus de dimensionnement) et son moment élastique maximal sous les charges limites M_j est à peu près égal au rapport du facteur de sécurité vis-à-vis de l'écoulement de la section j, γ_{1j}, au facteur de sécurité l'ensemble de la structure γ_0, soit:

$$x_j = M_{pj}/\overline{M}_j \doteq \gamma_{1j}/\gamma_0 \tag{6}$$

Pour assurer des conditions normales d'utilisation dans le contexte des hypothèses admises, il suffit que la condition $\gamma_{1j} \geqslant \gamma_1$ soit satisfaite, ou:

$$x_j \geqslant x_{\min} = \gamma_1/\gamma_0 \tag{7}$$

En notant $y = 1 - x$, la valeur $100y$ représente le pourcentage du moment élastique extrême redistribué et $y_{\max}$, qui est la valeur de la redistribution admissible devient, en tenant compte de (4):

$$y_{\max} = 1 - \gamma_1/\gamma_0 \tag{8}$$

$$\text{mais } \gamma_0 = (\gamma_g G + \gamma_p P)/(G + P) \tag{9}$$

et après substitution et transformation simples, l'équation (8) devient:

$$y_{\max} = 1 - \gamma_1 [(G/P) + 1]/[\gamma_g (G/P) + \gamma_p] \tag{10}$$

L'équation (10) montre que la redistribution maximale des moments élastiques dépend des facteurs de pondération admis γ_1, γ_g et γ_p, ainsi que du rapport G/P

des charges permanentes et surcharges appliquées. Pour les valeurs adoptées, les variations de γ_1, γ_0, et $y_{max} = 1 - \gamma_1/\gamma_0$ sont illustrées en fonction du rapport G/P dans la fig. 3.

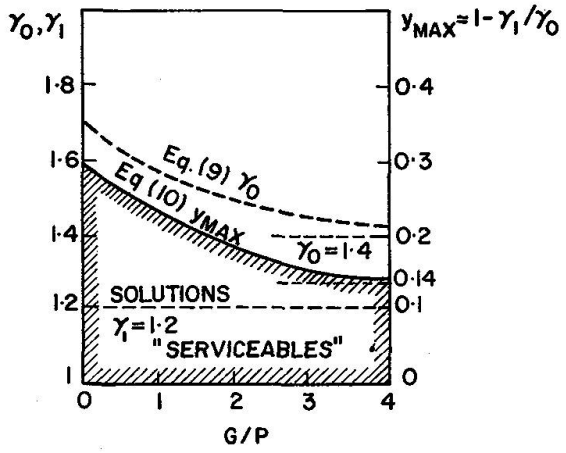


Fig. 3. Domaines des «solutions serviçables» et limites des redistributions maximales des moments élastiques en fonction du rapport G/P.

Il est visible que la redistribution maximale permise pour les facteurs de pondération varie de $1 - \gamma_1/\gamma_p = 29\%$ pour le cas $G=0$ à $1 - \gamma_1/\gamma_g = 14\%$ pour le cas $P=0$.

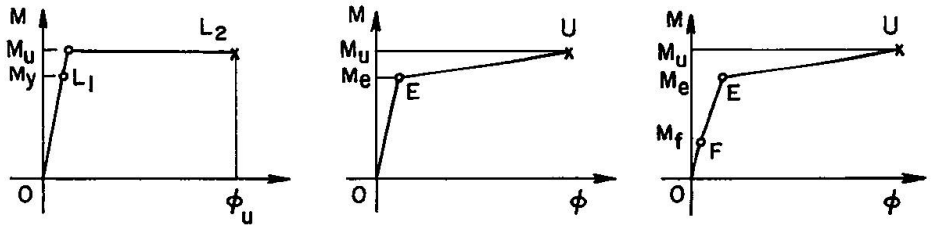
Ceci montre que pour des structures dont la surcharge est négligeable ($P=0$) et possédant des sections faiblement armées, on peut arriver aisément à l'état limite d'utilisation, si on admet les redistributions maximales des moments élastiques permises par les normes américaines (20%) ou britanniques (30%), tandis que l'adaptation réelle sous conditions normales de service ne permettra pas une réduction des enveloppes élastiques de plus de 14%.

Méthodes de «compatibilité»

Les méthodes de «compatibilité» ont un caractère commun: elles satisfont les conditions d'équilibre limite (sous les charges ultimes) et de compatibilité des rotations (des sections critiques). Ces méthodes ont pour but de vérifier la capacité de déformation de la structure correspondant à son état limite ultime sous les combinaisons les plus défavorables des surcharges. Par ailleurs, elles diffèrent dans les détails d'application sur deux hypothèses fondamentales, notamment le modèle mathématique du béton armé et la définition de l'état ultime.

A.L.L. Baker [7], [23], [24] adopte pour le diagramme moments-courbures l'idéalisation bilinéaire de la fig. 4a, avec les points L_1 et L_2 correspondant respectivement au début de l'écoulement de l'armature en traction et à la ruine de la zone comprimée du béton. Selon cette conception, l'état limite ultime d'une structure est atteint lorsqu'elle est rendue isostatique par la formation progressive d'un nombre suffisant de rotules plastiques, c'est-à-dire lorsque le comportement de n sections critiques (n étant le degré d'hyperstatisme) est défini par les valeurs des courbures se situant entre les limites L_1 et L_2 des diagrammes correspondants.

SAWYER [25], [26] adopte le modèle bilinéaire de la fig. 4b, avec les points E et U correspondant respectivement à la limite élastique et à l'état limite ultime de la section. Dans sa méthode, SAWYER considère que la capacité de résistance de la structure est épuisée dès que l'état limite ultime est atteint dans la section la plus sollicitée.



a) A.L.L. Baker [24]. *b)* Sawyer [25]. *c)* Macchi [27].

Fig. 4. Modèles du matériel élastique dans les méthodes de «compatibilité».

MACCHI [5], [27] adopte le modèle trilinéaire de la fig. 4c pour le diagramme moments-rotations des sections critiques. Les points E et U correspondent aux mêmes états que ceux de la fig. 4b, le point F correspond à l'état limite de fissuration.

En général, la forme des équations de compatibilité, pour les sections j, est celle indiquée dans les recommandations CEB [12]:

$$\int \frac{M_j M_0}{E' I'} ds + \sum X_k \int \frac{M_i M_k}{E' I'} ds + M_j \theta'_j + \sum M_j \Psi_n = 0 \tag{11}$$

Les trois premiers termes de cette équation expriment les rotations des sections des appuis j, dues respectivement à l'action des charges appliquées, aux effets des inconnues hyperstatiques X_k et à l'inélasticité de la section considérée. Le dernier terme exprime l'influence de l'action inélastique des zones situées entre les sections critiques d'appui.

Si on adopte les hypothèses de A.L.L. BAKER et si on choisit comme inconnues hyperstatiques un nombre de n moments aux nœuds de l'ossature, X_k deviennent des moments plastiques connus: M_{pk}, et en négligeant les effets de l'inélasticité entre les sections critiques ($\Psi = 0$, l'équation (11) peut être simplifiée sous la forme:

$$\int \frac{M_j M_0}{EI} ds + \sum M_{pk} \int \frac{M_j M_k}{EI} ds + \cdot \theta_j = 0 \tag{12}$$

Les exemples de calcul publiés dans la littérature paraissent démontrer que les techniques respectives des méthodes de «compatibilité» sont assez élaborées [24], [25], [27]. Quelques résultats numériques des études comparatives avec les méthodes d'«équilibre» sur un nombre de structures typiques seront présentés plus loin [28], [29].

Une des difficultés des méthodes de «compatibilité» dérive de leur nature itérative. Les solutions peuvent être obtenues seulement à la suite d'un processus plus ou moins complexe d'approximations successives. Ces difficultés sont éliminées, du moins pour la méthode des «rotations imposées» de MACCHI, moyennant les techniques de la programmation quadratique, comme cela a été démontré dans les études de MAIER et de ses collaborateurs [30], [31].

Du point de vue pratique, les méthodes «de compatibilité» ont abouti à peu de recommandations en général [6], [12], [24], [26] et à aucune encore officiellement adoptée dans les normes en vigueur.

Les ingénieurs européens, moins familiers avec les publications américaines, pourraient être intéressés par le projet de recommandations sur le calcul à limite élaboré par le Comité 428 de l'ACI et de l'ASCE [32].

En bref, le modèle de recommandations du Comité 428 permet l'utilisation libérale de toute distribution des moments inélastiques des poutres et portiques qui est basée sur des hypothèses logiques et qui satisfait les conditions suivantes:

a) les moments et les forces axiales ultimes sont calculés selon les normes en vigueur;
b) la rigidité élastique peut être calculée pour la section effective du béton ou la section fissurée transformée, en admettant des valeurs à $\pm 25\%$ près de celles des normes;
c) le moment à la limite élastique est fixé à au moins 80% de la valeur du moment ultime;
d) les courbures inélastiques ϕ_m peuvent être évaluées par tout diagramme se situant entre des segments *EBU* et *EU* de la fig. 5;
e) les longueurs des zones inélastiques sont limitées en fonction de la géométrie et des charges des éléments fléchies ainsi que des propriétés mécaniques des matériaux.

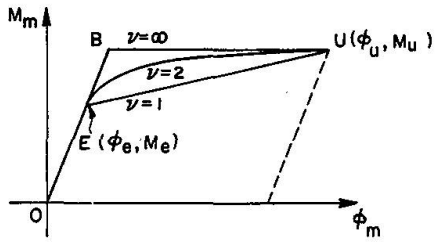


Fig. 5. Modèles de comportement inélastique des sections fléchies en béton armé [32].

Méthodes d'«équilibre»

Les méthodes d'«équilibre» constituent une classe de procédures basées sur la satisfaction exacte des critères d'équilibre limite et de serviçabilité [33], [34] et seulement sur une vérification du critère de compatibilité [35]. Les méthodes d'«équilibre» sont donc des méthodes qui assurent des marges de sécurité convenables vis-à-vis de deux états limites, à savoir γ_1 contre la ruine locale d'une section (supposée constituer l'état limite d'utilisation et avoir lieu au moment de l'écoulement de l'armature) et γ_0 contre la ruine plastique de l'ensemble de la structure (supposée avoir lieu à la formation d'un mécanisme à un degré de liberté).

Une caractéristique intéressante des méthodes d'«équilibre» est qu'elles permettent par extension d'obtenir des techniques d'optimisation mathématique formelle par l'addition des fonctions objectives convenables des variables au problème de dimensionnement.

En bref, les aspects principaux de ces méthodes sont les suivants:

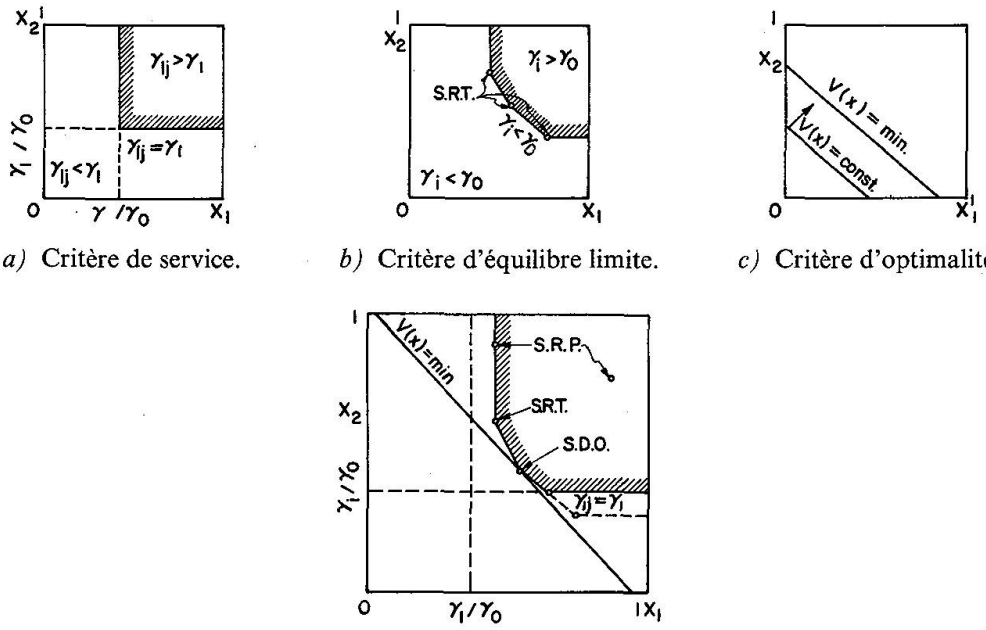
1. Les moments de calcul M_{pj} sont définis comme des pourcentages x_j des moments correspondants de l'enveloppe élastique $\overline{M}_j$ sous les charges ultimes.

2. Les pourcentages x_j sont les variables des problèmes et représentent les indices de plasticité des sections j, qui synthétise l'essence même des méthodes: l'adoption des marges de sécurité γ_{1j} et γ_0 vis-à-vis des deux états limites considérés.
3. Choix des critères satisfaisants pour l'état limite ultime, c'est-à-dire contre tout mode possible de ruine plastique.
4. Choix des critères satisfaisants pour l'état limite d'utilisation, c'est-à-dire prévoir des marges de sécurité à plastification suffisante, lorsque chaque section critique est soumise à la plus défavorable combinaison des surcharges.

La combinaison des critères alternatifs vis-à-vis des deux états limites considérés permet une gamme assez large de solutions à sécurité spécifiées γ_1 et γ_0 [33], [36], [37]. A la limite de ce spectre, on a les solutions parfaitement élastiques (aux réserves de sécurité ainsi que les quantités de matériaux les plus importants) et les solutions optimales (aux réserves de sécurité minimales spécifiées et des économies maximales des matériaux).

Sans entrer dans les détails des techniques de calcul qui ont été résumées récemment en deux textes français [38], [39], la nature des diverses solutions possibles peut être évaluée par rapport aux diagrammes de la fig. 6 qui présentent la solution graphique d'un problème à seulement deux variables. Dans le plan, ou plus généralement l'espace de dimensionnement, un point (x_1, x_2) définit une solution au problème satisfaisant les critères ci-dessous, fig. 6a, b, c, qui sont des fonctions linéaires des variables:

a) service (S): $\gamma_{1j}(x_j) \geqslant \gamma_1$ ou $x_j = \gamma_{1j}/\gamma_0 \geqslant \gamma_1/\gamma_0$ (13)
b) équilibre limite $(E.L.)$: $\gamma_i(x_j) \geqslant \gamma_0$ (14)
c) optimalité (O): $V(x_j) = \min.$ (15)



a) Critère de service. *b)* Critère d'équilibre limite. *c)* Critère d'optimalité.

d) Solutions SRT, SRP, SDO.

Fig. 6. Solutions typiques des méthodes d'«équilibre».

La fig. 6d représente des solutions possibles, c'est-à-dire satisfaisant simultanément aux deux premiers critères ci-dessus, ou optimales, c'est-à-dire qui satisfont tous les trois critères. Les solutions possibles correspondent à des points se trouvant

à l'intérieur ou à la frontière du domaine admissible; les points représentant des coins du polygone «admissible» correspondent à des *solutions à redistribution totale* (SRT), pour lesquelles tout mode de ruine i se produit sous le facteur de charge spécifié ($\gamma_i = \gamma_0$); les autres points correspondent à des *solutions à redistribution partielle* (SRP), pour lesquelles les modes de ruine i se produisent à des facteurs de charges en général supérieurs aux valeurs spécifiées ($\gamma_i > \gamma_0$).

Si une solution possible satisfait aussi à la condition d'optimalité, le point correspondant est représenté par le lieu où une droite parallèle au critère d'optimalité est tangente au polygone des solutions possibles: c'est une *solution de dimensionnement optimal* (SDO), fig. 6d. On voit bien que SDO est toujours une SRT.

Par ailleurs, il n'est pas difficile de remarquer qu'en général le rendement économique mesuré en volume d'armature nécessaire des SRT est seulement de quelques % inférieurs des SDO [36], [37]. C'est une conclusion importante du point de vue pratique, puisqu'elle suggère qu'en tendant à maximiser la redistribution permissible des moments élastiques (afin d'aboutir à une SRT) on est très près des solutions optimales mathématiques.

Ceci nous a permis de préparer un projet de recommandations pratiques en partant des principes des méthodes d'«équilibre» [40].

En résumé, l'application des recommandations est limitée aux poutres et dalles continues, ainsi qu'aux portiques aux nœuds non déplaçables si les surcharges ont des valeurs entre ¼ et 4 des charges permanentes, les portées ne varient pas plus que de 50%, les aciers n'ont pas une résistance supérieure à 60 Ksi, le pourcentage mécanique ne dépasse pas 0.3 et enfin, si les armatures sont correctement détaillées et ancrées.

Le projet de recommandations énonce explicitement les critères fondamentaux vis-à-vis des états limites d'utilisation et ultimes, ainsi que la compatibilité des rotations sous charges ultimes.

Les moments de calcul recommandés ont la forme $M_{pj} = x_j \overline{M}_j$ et la considération de tout mode de ruine possible conduit aux inégalités linéaires dans les variables x_j.

Pour les solutions à redistribution totale, SRT[1], les valeurs des x_j doivent être choisies de manière à satisfaire identiquement toutes les équations d'équilibre limite. Dans ce but, des critères de service convenable peuvent être adoptés, par exemple l'égalité des valeurs x_j, ou $\overline{M}_j$ sur les sections d'appui ou de quelques portées, etc.

Pour les solutions à redistribution partielle, SRP[2] les valeurs de x_j recommandées pour les sections de portée sont de 0.85 à 0.90, correspondant à des redistributions de 10-15% par rapport au calcul élastique. Les pourcentages de redistributions permises aux sections d'appui seront déterminés de telle sorte que l'équilibre statique soit respecté partout.

Pour le dimensionnement à limite des portiques, on recommande que les valeurs de x_j pour les sections des poteaux, des appuis et des portées ne soient pas inférieures respectivement à 0.9, 0.85 et $1.2/\gamma_0$.

[1] En anglais, FRD, pour *Full Redistribution Design.*
[2] En anglais, LRD, pour *Limited Redistribution Design.*

Le calcul approché de la compatibilité n'est requis que pour les sections d'appui dont le x_j est inférieure à 0.85. Dans ce cas la satisfaction de la condition suivante doit être vérifiée:

$$x_j \geqslant x_0 = [1 + (\Phi_u/\Phi_e - 1)/12]^{-1} \tag{16}$$

où x_0 est la valeur minimale de x_j pour laquelle la compatibilité des rotations est satisfaite; Φ_u et Φ_e sont les courbures ultimes et à la limite élastique de la section j.

Exemples d'application

Afin d'évaluer comparativement les solutions obtenues par les différentes méthodes de calcul inélastique ou les normes en vigueur, nous présentons trois applications et les indices correspondants.

Application N° 1: Poutre continue [41]

Soit une poutre continue à cinq travées et appuis extrêmes libres, sous charge uniformément distribuée à dimensionner, selon les principes de l'élasticité et avec les coefficients permis par les normes des divers pays. On utilise une théorie à rupture pour le calcul des sections et on adopte: $G/P = 1/2$, $\gamma_1 = 1.1$, $\gamma_g = 1.4$ et $\gamma_p = 1.7$.

Les moments de l'enveloppe élastique sont donnés par l'équation (1) et ceux des normes par la relation $M_j = c_j(G + P)L^2$ avec les coefficients a_j, b_j, c_j, de la fig. 1.

Si on calcule pour toutes les solutions les valeurs des indices $x_j = M_{pj}/\gamma_0 M_j$, des sections $j = 1.1...5$, $u_i = \gamma_i/\gamma_0$ des mécanismes des portées $i = 1, 2, 3$ et $v_k = V_k/V_e = \Sigma_j M_{pj}/1_j/\Sigma_j M_{uj} 1_j = \Sigma_j x' 1_j/\Sigma_j x' 1_j$ (où $x'_j = M_{uj}/\gamma_0 M_j$ et 1_j sont les longueurs relatives des armatures construites, supposées $1_1/L = 1_5/L = 2/3$ et $1_2/L = 1_4/L = 1/2$), on obtient les résultats du tableau 3.

Tableau 3: Comparaison des solutions par différentes normes

Solution	Service					Equilibre limite			Rendement
	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	u_1	u_2	u_3	v_k
Théorie élastique	1.01	1.00	1.02	1.01	1.02	1.26	1.44	1.40	1.00
DIN 1045-59	0.98	0.98	1.00	1.00	0.93	1.24	1.37	1.33	0.98
ACI 318-71	0.98	0.88	0.94	0.91	0.87	1.09	1.26	1.23	0.90
I 123-50	0.98	0.80	0.94	0.63	0.87	1.06	1.11	1.00	0.84
Théorie plastique	0.93	0.75	0.94	0.69	0.87	1.00	1.09	1.00	0.82

Le tableau 3 confirme que les théories les plus conservatives (aux x_j plus larges) ont les plus grandes réserves de résistance vis-à-vis de la ruine plastique (u_i) mais sont aussi les moins économiques (valeurs de v_k plus près de l'unité). Les coefficients permis par les diverses normes conduisent à des solutions plus économiques que la théorie ($v_k < 1$), en déviant de celle-ci dans une certaine mesure.

Nour remarquons que la théorie plastique conduit à des ruines plastiques des portées marginales et centrales pour précisément les facteurs de surcharge spécifiée ($u1 = u3 = 1$) et à une économie de l'armature en traction de 18% par rapport au calcul élastique ($v_k = 0.82$). Nous remarquons également que toutes les normes conduisent à des solutions qui varient entre les solutions parfaitement élastiques et plastiques.

Application N° 2: dalle continue [41]

Soit une dalle armée dans une seule direction, continue sur cinq travées et aux appuis extrêmes libres, sous charges uniformément distribuées à dimensionner selon le principe de redistribution arbitraire des moments élastiques, permissible selon les normes des divers pays. Supposons $G/P = 1/2$, $\gamma_g = 1.4$, $\gamma_p = 1.7$, $\overline{\omega} < 1\%$ et $\overline{\omega} < 9{,}5\%$.

Pour toutes les solutions, nous adoptons les mêmes concepts sur les redistributions favorables des moments élastiques, à savoir:

a) la redistribution maximale permise est effectuée sur les sections d'appui afin de réduire la congestion d'armature des sections critiques;

b) la redistribution des moments dans les sections de portée est effectuée seulement si une augmentation correspondante des moments d'appui n'est pas nécessaire, afin d'obtenir une économie maximale par rapport à la méthode élastique.

Les résultats obtenus sont résumés au tableau 4 où on a noté par (3) et (5) les zones négatives respectivement des sections 3 et 5 fig. 1.

Tableau 4: Redistribution arbitraire des moments élastiques

Norme	Redistribution maximale $100(1-x)\%$	x min.	Mpj/PL^2							
			$j=(1)$	(2)	(3)	$(3)^-$	(4)	(5)	$(5)^-$	
			$\frac{l_j}{L}=\frac{2}{3}$	1/2	2/3	1/2	1/3	1/3	1/3	
Théorie élastique . .	0	1.00	0.225	0.280	0.157	0.056	0.243	0.177	0.036	1.000
ACI 318-63	10	0.90	0.225	0.252	0.141	0.056	0.218	0.177	0.036	0.940
CEB 70.	15	0.85	0.225	0.238	0.144	0.056	0.206	0.177	0.036	0.920
ACI 318-71	18	0.82	0.225	0.230	0.149	0.056	0.199	0.177	0.036	0.915
I 123-50										
KCP 110-70. . . .	30	0.70	0.225	0.213	0.156	0.056	0.170	0.177	0.036	0.890

Nous remarquons que, cf. au critère *b* ci-dessus, les moments élastiques des sections (1) (3) – (5) et (7) – n'ont pas été redistribués. La dernière colonne indique l'indice de rendement, $v_k = V_k/V_e$, des solutions par rapport au dimensionnement élastique, pour lequel $v = 1$.

On voit bien que les redistributions arbitraires permises par les normes conduisent à des économies relatives d'armature jusqu'à 11%, en proportion aux taux maximaux des redistributions admissibles.

Application N° 3: Poutres et portiques [28], [29]

Soit les six structures de la fig. 7, avec les géométries, les sections de béton, les charges et les surcharges indiquées, à dimensionner et à comparer les solutions obtenues par les approches suivantes:

a) méthode élastique (avec les actions calculées à rupture);
b) méthode de «compatibilité» (de SAWYER [25] et de BAKER [23];
c) méthode d'«équilibre» (SRP et SRT [33], [34]);
d) méthode optimale (SDO [36]).

Sans insister sur les détails de calcul et les hypothèses communes du processus de dimensionnement développés en [28] et [29], nous reproduisons dans les tableaux 5, 6 et 7 les moments plastiques M_{pj} et les indices de plasticité x_j des sections j pour les six exemples.

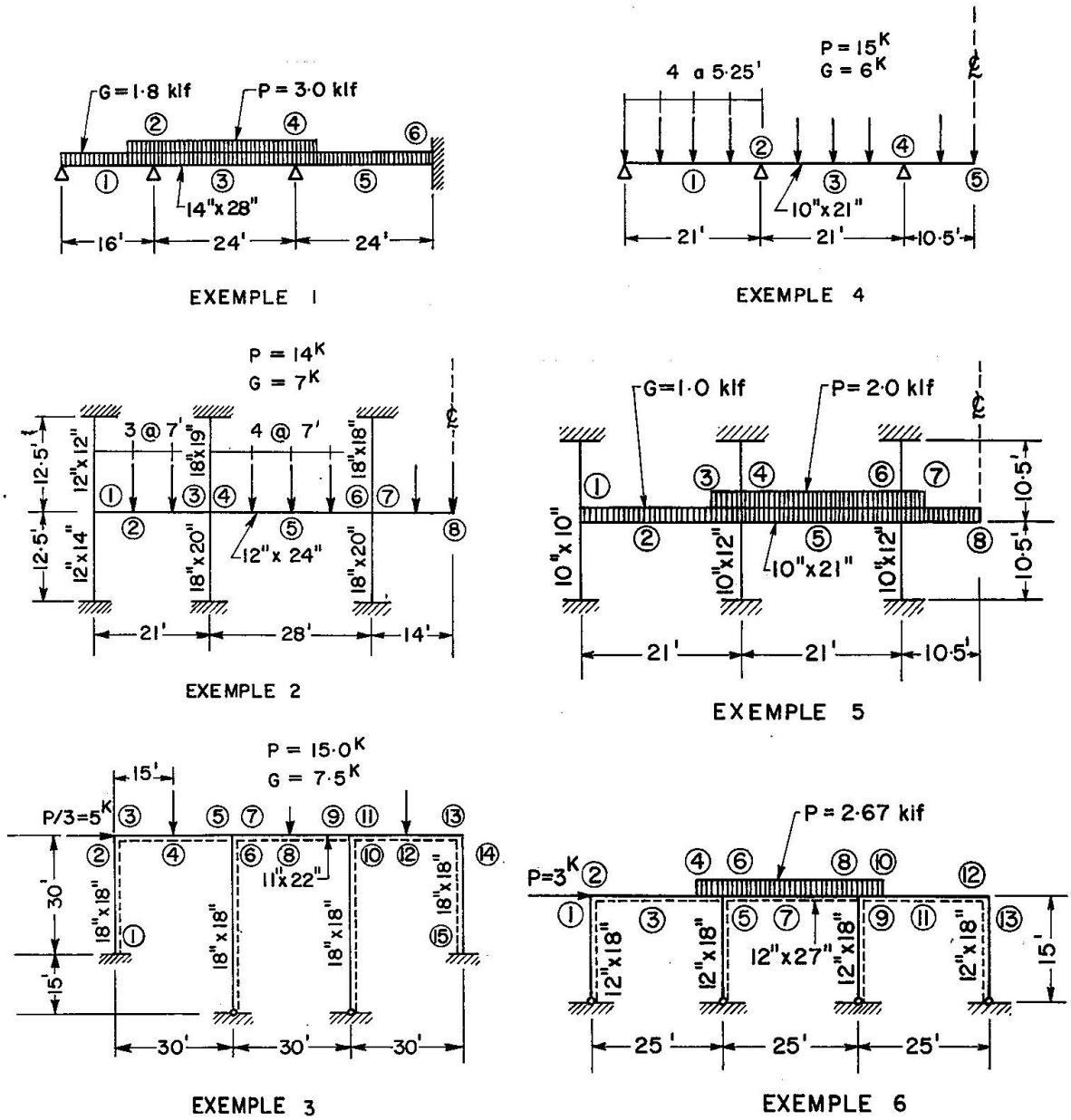


Fig. 7. Géométries et conditions de chargement pour les exemples d'application des méthodes inélastiques.

Tableau 5: Solutions de dimensionnement pour les exemples 1 et 4

Exemple	Section (j)	Th. élast.		Sawyer		Baker		S.R.P.		S.R.T.		S.D.O.	
		M_{pj}	x_j	M_{pj}	x_j	M_{pj}	x_j	M_{pj}	x_j	M_{pj}	x_j	M_{pj}	x_j
1	1	189.4	1.000	175.0	0.923	143.0	0.755	170.5	0.900	135.0	0.712	135.0	0.712
	2	368.7	1.000	335.0	0.910	270.0	0.732	310.0	0.840	289.0	0.785	271.3	0.736
	3	284.3	1.000	247.0	0.870	297.0	1.045	256.0	0.900	271.0	0.950	234.3	0.824
	4	426.4	1.000	385.0	0.905	331.0	0.777	358.0	0.840	334.0	0.785	426.4	1.000
	5	233.1	1.000	235.0	1.008	265.0	1.138	210.0	0.900	233.0	1.000	166.0	0.712
	6	465.5	1.000	385.0	0.826	331.0	0.710	392.0	0.840	366.0	0.785	408.1	0.877
4	1	284.0	1.000	—	—	275.5	0.970	255.5	0.900	260.5	0.916	253.0	0.889
	2	330.0	1.000	—	—	244.5	0.700	244.5	0.740	235.0	0.712	251.0	0.760
	3	215.0	1.000	—	—	193.3	0.782	193.3	0.900	157.0	0.732	150.3	0.700
	4	291.0	1.000	—	—	205.0	0.704	215.5	0.740	207.0	0.712	203.0	0.700
	5	240.5	1.000	—	—	181.5	0.756	216.5	0.900	171.0	0.712	172.3	0.726

Tableau 6: Solutions de dimensionnement pour les exemples 2 et 5

Exemple	Section (j)	Th. élast.		Baker		S.R.P.		S.R.T.		S.D.O.	
		M_{pj}	x_j	M_{pj}	x_j	M_{pj}	x_j	M_{pj}	x_j	M_{pj}	x_j
2	1	51.4	1.000	48.0	0.940	47.0	0.915	46.0	0.890	51.4	1.000
	2	153.9	1.000	155.0	1.010	141.0	0.915	143.0	0.930	153.9	1.000
	3	256.9	1.000	210.0	0.820	235.0	0.915	229.9	0.890	185.6	0.723
	4	317.1	1.000	275.0	0.870	290.9	0.915	282.0	0.890	317.1	1.000
	5	220.6	1.000	236.0	1.070	202.0	0.915	208.0	0.940	170.5	0.773
	6	340.7	1.000	275.0	0.810	312.0	0.915	303.0	0.890	340.7	1.000
	7	340.6	1.000	275.0	0.810	312.0	0.915	303.0	0.890	340.6	1.000
	8	219.5	1.000	236.0	1.070	202.0	0.915	197.0	0.890	159.6	0.727
5	1	70.6	1.000	70.0	0.992	63.3	0.897	56.7	0.803	70.6	1.000
	2	157.6	1.000	169.2	1.074	141.4	0.897	155.8	0.988	125.1	0.794
	3	241.2	1.000	170.0	0.706	216.2	0.897	194.0	0.803	241.2	1.000
	4	230.7	1.000	170.0	0.737	207.0	0.897	185.3	0.803	230.7	1.000
	5	126.2	1.000	124.6	0.986	113.2	0.897	102.8	0.814	89.1	0.706
	6	213.1	1.000	155.0	0.727	191.2	0.897	171.4	0.803	153.9	0.722
	7	216.0	1.000	155.0	0.717	193.9	0.897	173.7	0.803	183.1	0.866
	8	133.5	1.000	132.5	0.993	119.8	0.897	107.5	0.803	94.3	0.706

Tableau 7 : Solutions de dimensionnement pour les exemples 3 et 6

Exemple	Section (j)	Th. élastique				Sawyer				Baker				S.R.T.				S.D.O.			
		M_{pj}^+	x_j^+	M_{pj}^-	x_j^-	M_{pj}^+	x_j^+	M_{pj}^-	x_j^-	M_{pj}^+	x_j^+	M_{pj}^-	x_j^-	M_{pj}^+	x_j^+	M_{pj}^-	x_j^-	M_{pj}^+	x_j^+	M_{pj}^-	x_j^-
3	1	138.0	1.200	138.0	1.970	120	1.043	120	1.715	110.0	0.955	110.0	1.572	107.0	0.930	107.0	1.530	97.2	0.847	97.2	1.392
	2	138.0	3.450	138.0	1.000	120	3.000	120	0.870	110.0	2.750	110.0	0.797	107.0	2.680	107.0	0.776	97.2	2.436	97.2	0.706
	3	40.0	1.000	138.0	1.000	40	1.000	120	0.870	40.0	1.000	110.0	0.797	40.0	1.000	107.0	0.776	28.3	0.706	97.2	0.706
	4	198.0	1.000	28.0	1.000	180	0.910	28	1.000	167.0	0.843	28.0	1.000	164.0	0.828	28.0	1.000	164.0	0.828	19.8	0.706
	5	38.0	1.000	203.0	1.000	38	1.000	180	0.887	38.0	1.000	160.0	0.788	38.0	1.000	155.0	0.763	26.8	0.706	172.0	0.847
	6	59.0	1.000	59.0	1.135	66	1.118	66	1.270	50.0	0.847	50.0	0.961	42.0	0.712	42.0	0.807	41.7	0.706	41.7	0.801
	7	38.0	2.235	203.0	1.182	38	2.235	180	1.045	38.0	2.235	160.0	0.929	38.0	2.235	155.0	0.901	26.8	1.578	172.0	1.000
	8	168.0	1.000	32.0	1.000	140	0.833	32	1.000	140.0	0.833	32.0	1.000	148.0	0.882	32.0	1.000	118.5	0.706	22.6	0.706
6	1	42.9	1.000	106.6	1.000	—	—	—	—	25.8	0.600	83.3	0.782	25.8	0.600	95.8	0.900	25.8	0.600	93.2	0.875
	2	42.9	1.000	106.6	1.000	—	—	—	—	25.8	0.600	83.3	0.782	25.8	0.600	95.8	0.900	25.8	0.600	93.2	0.875
	3	268.8	1.000	56.2	1.000	—	—	—	—	260.0	0.966	33.8	0.600	228.5	0.850	33.8	0.600	177.5	0.660	33.8	0.600
	4	41.0	1.000	387.0	1.000	—	—	—	—	24.6	0.600	260.0	0.672	24.6	0.600	282.5	0.729	24.6	0.600	387.0	1.000
	5	109.3	1.000	61.2	1.000	—	—	—	—	66.0	0.603	36.8	0.600	74.0	0.677	36.8	0.600	65.6	0.600	36.8	0.600
	6	55.1	1.000	353.0	1.000	—	—	—	—	33.1	0.600	260.0	0.736	33.1	0.600	212.0	0.600	33.1	0.600	353.0	1.000
	7	221.5	1.000	111.6	1.000	—	—	—	—	180.0	0.812	66.8	0.600	180.5	0.815	66.8	0.600	142.0	0.642	66.9	0.600
	8	45.6	1.000	362.5	1.000	—	—	—	—	27.4	0.600	260.0	0.717	27.4	0.600	264.5	0.729	27.4	0.600	362.5	1.000
	9	85.7	1.000	84.8	1.000	—	—	—	—	57.5	0.600	50.9	0.600	51.5	0.600	50.9	0.600	51.5	0.600	50.9	0.600
	10	56.0	1.000	372.0	1.000	—	—	—	—	33.6	0.600	260.0	0.698	33.7	0.600	267.5	0.718	33.6	0.600	272.0	1.000
	10	266.1	1.000	58.9	1.000	—	—	—	—	260.0	0.976	35.4	0.600	226.5	0.850	35.4	0.600	168.0	0.631	35.4	0.600
	12	22.4	1.000	127.1	1.000	—	—	—	—	13.5	0.600	83.3	0.656	13.5	0.600	114.5	0.900	13.5	0.600	127.1	1.000
	13	22.4	1.000	127.1	1.000	—	—	—	—	13.5	0.600	83.3	0.656	13.5	0.600	114.5	0.900	13.5	0.600	127.1	1.000

Une évaluation des solutions obtenues peut être effectuée sur la sécurité à ruine plastique et sur les volumes d'armature de flexion nécessaire.

Pour un facteur minimal de charge à plastification $\gamma_1 = 1.2$ et pour les facteurs moyens de charge, γ_0 correspondant pour chaque exemple aux rapports G/P de la fig. 7, on obtient les valeurs minimales admissibles $xj \geqslant \gamma_1/\gamma_0$ du tableau 9.

Tableau 8: Valeurs minimales de $x_j(\geqslant \gamma_1/\gamma_0)$ admissibles

Exemple	1	2	3	4	5	6
γ_0	1.685	1.700	1.700	1.714	1.700	2.000
min. x_j	0.712	0.706	0.706[1]	0.700	0.706	0.600

[1] Pour la méthode de Sawyer min $x_j = 0.825$ et 0.818 à cause de la valeur $\gamma_1 = 1.39$ qu'il recommande.

Les mécanismes de ruine plastique des six structures sont identifiés en fig. 8. Les solutions des tableaux 5 à 7 sont utilisées pour déterminer les facteurs de surcharge à ruine γ_i pour chaque mode possible i. Ces valeurs permettent de calculer l'indice de sécurité à la ruine $u_i = \gamma_i/\gamma_0$ du tableau 10 avec les facteurs γ_0 du tableau 8.

Tableau 9: Sécurité à la ruine: indices u_i

Exemple	Mécanisme (i)	Théorie élastique	Sawyer	Baker	S.R.P.	S.R.T.	S.D.O.
1	1	1.381	1.269	1.029	1.205	1.000	1.000
	2	1.170	1.042	1.025	1.000	1.000	1.000
	3	1.164	1.063	1.022	1.000	1.000	1.000
2	1	1.095	—	1.028	1.000	1.000	1.000
	2	1.100	—	1.022	1.008	1.000	1.000
	3	1.122	—	1.022	1.028	1.000	1.000
3	1	1.285	1.150	1.052	1.028	—	1.075
	2	1.292	1.116	1.045	1.055	—	1.000
	3	1.975	1.810	1.618	1.542	—	1.396
	4	1.170	1.130	1.030	1.000	—	1.020
	5	1.160	1.100	1.012	1.000	—	1.000
	6	1.170	1.118	1.025	1.000	—	1.000
4	1	1.189	—	1.035	1.000	1.000	1.000
	2	1.389	—	1.022	1.121	1.000	1.000
	3	1.405	—	1.023	1.143	1.000	1.000
5	1	1.116	—	1.029	1.000	1.000	1.000
	2	1.240	—	1.021	1.112	1.000	1.000
	3	1.247	—	1.023	1.118	1.000	1.000
6	1	1.235	—	1.034	1.000	—	1.000
	2	1.387	—	1.054	1.003	—	1.000
	3	1.235	—	1.034	1.000	—	1.000
	4	4.060	—	2.520	2.950	—	3.000
	5	1.241	—	1.018	1.000	—	1.000
	6	1.258	—	1.004	1.000	—	1.050
	7	1.273	—	1.056	1.002	—	1.019
	8	1.325	—	1.020	1.031	—	1.110

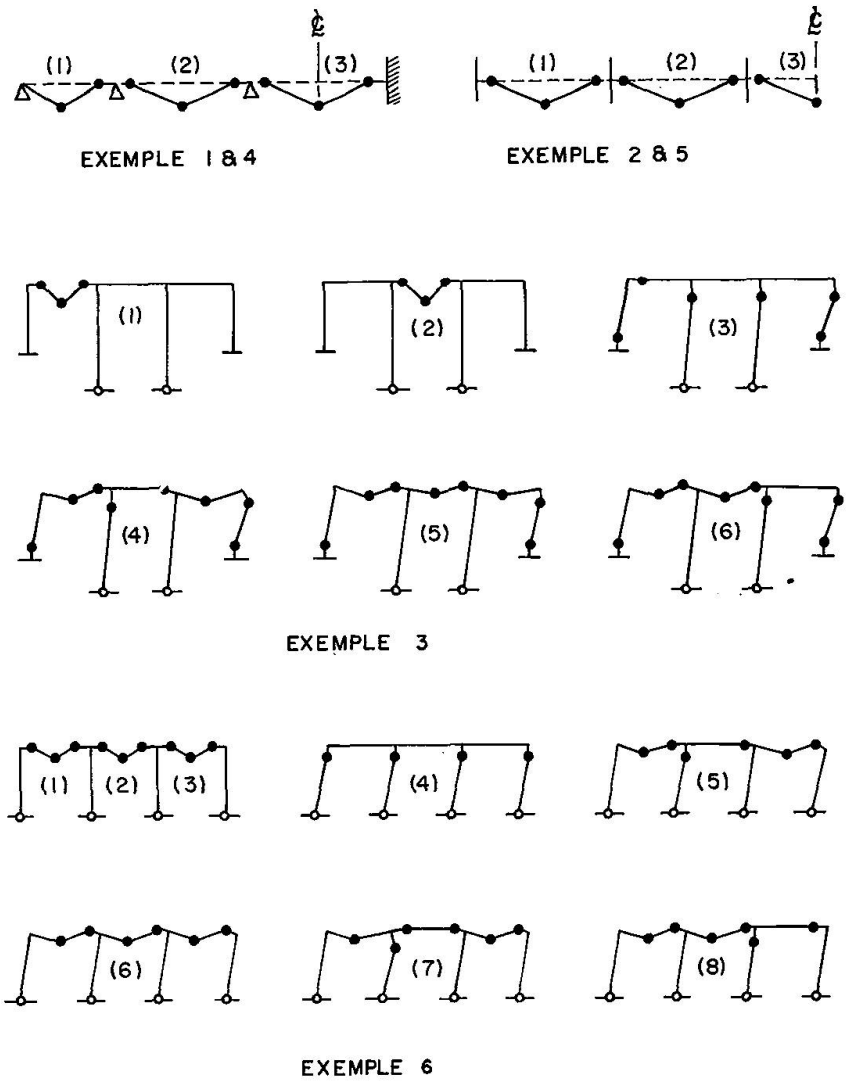


Fig. 8. Mécanismes de ruine plastique des structures de la fig. 7.

Le tableau 9 montre que les méthodes considérées dans la première ligne conduisent à des solutions dont les réserves de sécurité — par rapport aux spécifications des normes – diminuent vers la partie droite du tableau. A l'extrémité gauche, le calcul élastique assure au moins 10% de plus que le minimum de sécurité requis, tandis qu'à l'extrémité droite les solutions de redistribution totale (et optimales) conduisent à des modes de ruine plastiques aux charges ultimes spécifiées ($u_i = 1$).

La comparaison des quantités d'armatures nécessaires pour diverses méthodes a été effectuée en supposant que les sections de béton sont identiques pour toutes les solutions, que l'armature en flexion est proportionnelle au moment plastique de la section, et qu'elle est détaillée (pour toutes les solutions); cf. aux schémas typiques de la fig. 9.

Les valeurs des indices de rendement $v_k = V_k/V_e$ ainsi obtenues sont indiquées dans le tableau 10.

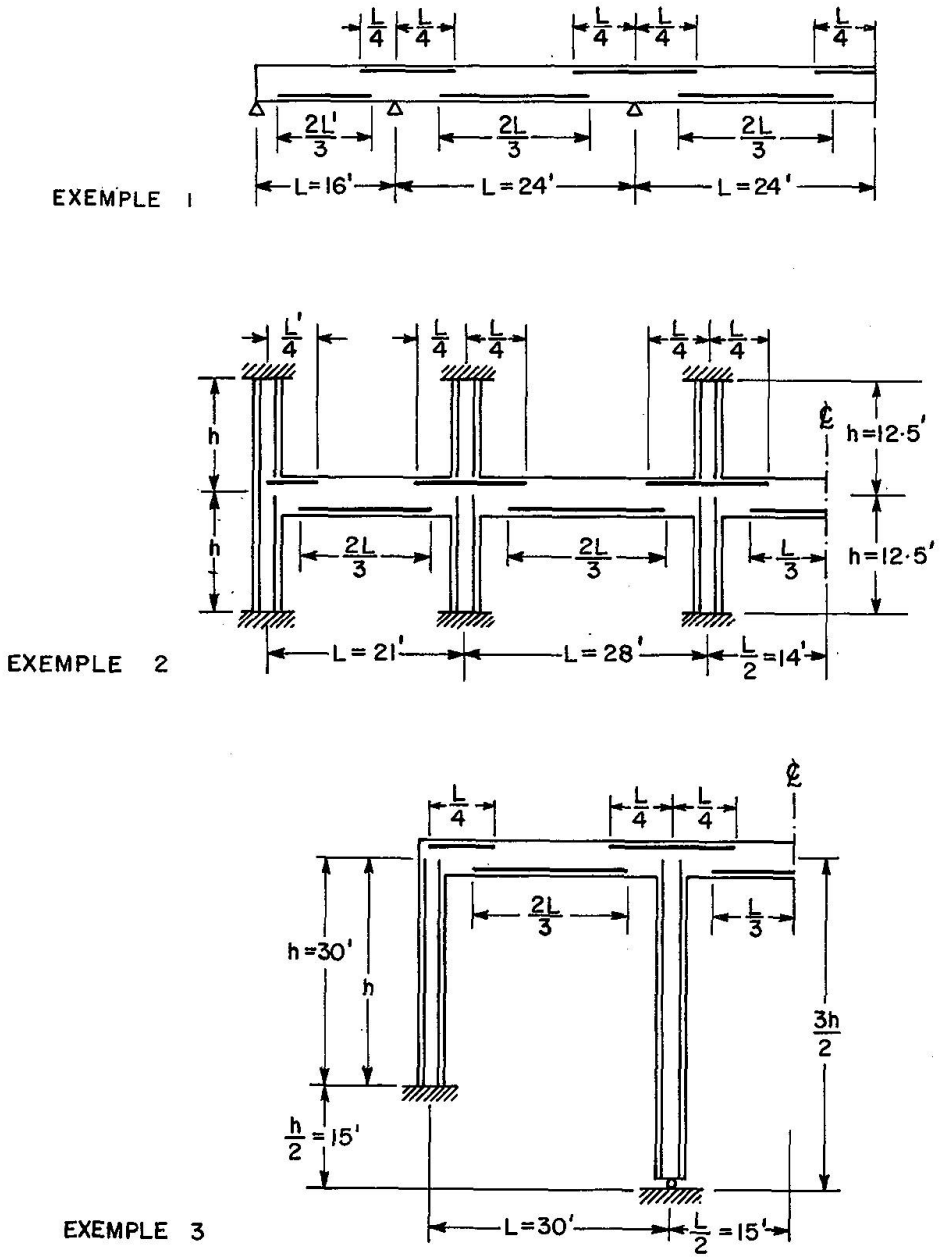


Fig. 9. Détails d'armature des structures de la fig. 7.

Tableau 10: Indice de rendement v_k

Exemple	Méthode élastique	Compatibilité		Equilibre		Méthode optimale
		Sawyer	Baker	Red. part.	Red. tot.	
1	1.000	0.907	0.877	0.868	0.850	0.825
2	1.000	—	0.948	0.927	0.922	0.890
3	1.000	0.926	0.934	0.790	—	0.760
4	1.000	—	0.793	0.831	0.768	0.766
5	1.000	—	0.897	0.909	0.866	0.829
6	1.000	—	0.772	0.757	—	0.756

Bien entendu, nous remarquons que, sur l'aspect économique, les diverses méthodes se placent dans le sens inverse aux réserves de sécurité qu'elles produisent: les méthodes optimales et à redistribution totale ont les indices de rendement les plus réduits et donc permettent les plus importantes économies de matériau par rapport à la méthode élastique.

Néanmoins, pour les six exemples de cette application, les méthodes inélastiques permettent des économies d'acier relatives allant de 5.2 à 25%.

Pour tous les exemples et les méthodes considérés (sauf les solutions extrêmes élastique et optimale), l'indice de rendement moyen est $v = 0.852$, ce qui suggère une économie de 15% vis-à-vis de la méthode élastique conventionnelle.

Il ne paraît pas trop optimiste à suggérer que des réductions de l'ordre de 15 à 20% des quantités d'acier soient parfaitement réalisables par l'utilisation des solutions à redistribution partielle ou totale, en préférence aux solutions élastiques présentes.

Conclusions

1. De nombreuses normes structurales existantes permettent la prise en compte des phénomènes inélastiques en béton armé, moyennant une redistribution plus ou moins arbitraire des sollicitations élastiques.

2. Le taux de redistribution autorisé par diverses normes varie de 0 à 66% des valeurs élastiques et ne peut pas être justifié par une base rationnelle. A la limite, il peut violer sévèrement les critères de serviçabilité.

3. Quelques normes (comme celles de l'URSS, des Etats-Unis et de la Grande-Bretagne) font dépendre les redistributions admissibles à la seule satisfaction de la compatibilité des rotations inélastiques, exprimée par une limitation de la fragilité des sections critiques (pourcentage d'armature en traction ou hauteur de l'axe neutre).

4. Parmi les méthodes plus exactes de calcul non élastique, les méthodes de «compatibilité», qui vérifient l'admissibilité des déplacements plastiques, sont assez complexes dans leurs applications et demandent une étude spéciale des conditions de service.

5. Les méthodes d'«équilibre» permettent un dimensionnement direct et paraissent plus aptes pour la pratique, ce qui est dû au fait qu'elles opèrent sur des sollicitations et tiennent compte implicitement de la satisfaction des critères de service.

6. L'utilisation des fonctions objectives convenables permet d'optimiser les solutions, de manière qu'elles préservent les marges de sécurité choisies, tant vis-à-vis de la ruine totale de la structure que de l'effondrement local de ses sections critiques.

7. Des études parallèles de dimensionnement des poutres et portiques par les méthodes d'équilibre et d'optimisation mathématique démontrent que des solutions quasi optimales peuvent être obtenues en maximisant l'adaptation plastique compatible avec les données du problème.

8. Il est déjà possible d'énoncer des recommandations simples et pratiques pour le calcul non élastique des poutres, dalles à armature unidirectionnelle et portiques en béton armé, en partant des concepts des méthodes d'équilibre. L'introduction et l'application graduelle de ces méthodes dans la pratique des

projets rétablira leur prestige, car elles présenteront un réel profit sur le plan économique et, d'autre part, elles établiront les limitations inhérentes à l'utilisation des phénomènes inélastiques en béton armé.

Annexe

RÈGLES POUR LA REDISTRIBUTION DES MOMENTS PRÉSENTÉES DANS DIFFÉRENTES NORMES

Recommandations C.E.B. – R.33.11 [12]

Dans les ossatures en béton armé (et seulement dans ce cas), on peut admettre, sans contrôle de la compatibilité de la déformation, une redistribution des moments calculés élastiquement: les moments maximaux de certaines sections peuvent être affectés d'une réduction maximale de 15%, à condition de prendre en compte l'augmentation des moments dans les autres parties de l'ossature, qui est nécessaire pour assurer l'équilibre.

ACI 318-71 – Cl. 8.6 [10]

Sauf dans le cas où l'on emploie des valeurs approchées des moments fléchissants, les moments négatifs calculés par la théorie élastique sur les appuis des éléments fléchis continus (sans précontrainte) pour toute combinaison de charges peuvent être augmentés ou réduits sans dépasser $20\,[1-(\omega-\omega')/\omega_b]\%$.

Ces moments négatifs modifiés doivent être utilisés pour le calcul des moments dans les sections de portée. La redistribution ne sera effectuée qu'à condition que la section dont le moment est réduit est détaillée, de telle sorte que w ou $w-w'$ ne dépasse pas $0{,}5\ w_b$, soit:

$$\omega_b = \frac{0{,}85\ \beta_1 f_c'}{f_y} \cdot \frac{87000}{87000+f_y}$$

(et $\beta_1 = 0{,}85$ est une constante variant avec la qualité du béton, f_c' est la résistance cylindrique du béton et f_y la limite d'écoulement de l'acier en traction exprimées en psi).

I 123–50 [21]

Cl. 24

Pour l'analyse plastique des poutres continues principales à portées égales ou inégales et des portiques, il est nécessaire d'effectuer d'abord une analyse élastique conventionnelle.

Cl. 25

La redistribution des moments doit être limité à un maximum de 30% par rapport à l'analyse élastique conventionnelle.

Cl. 26

La redistribution des efforts doit être effectuée pour chaque cas de combinaison défavorable de surcharges.

BSI CP 110 Cl. 3.2.2.3 [14]

La redistribution des moments obtenue par une analyse élastique rigoureuse ou par les méthodes simplifiées indiquées en 3.2.2.1. et 3.2.2.2. peut être effectuée sous les conditions suivantes:

1. L'équilibre entre les sollicitations internes et les charges appliquées doit être maintenu sous chaque combinaison des charges ultimes.
2. Les moments de résistance limite des sections ne doivent pas être inférieurs à 70% des moments correspondants obtenus à partir de l'enveloppe des moments élastiques pour les combinaisons les plus défavorables des charges limites.
3. Le moment élastique en toute section d'un élément, dû à une combinaison particulière des charges limites, ne doit pas être réduit de plus de 30% de la valeur du moment maximal de l'enveloppe élastique.
4. Lorsque, comme suite de la redistribution, le moment de résistance limite d'une section est réduit, la hauteur relative de l'axe neutre ($\alpha = c/h$) de la section ne doit pas dépasser la valeur $\alpha_{max} = 0{,}6 - y$, où y est le rapport entre le moment réduit et le moment de l'enveloppe élastique calculée pour les combinaisons les plus défavorables des charges limites.

   Dans les structures à plus de quatre étages, où la stabilité latérale est assurée par l'ossature, la réduction des moments permise par la condition (3) ci-dessus sera limitée à 10%. En général, la condition (4) exclut la possibilité de redistribution et de réduction des moments dans les poteaux, sauf pour le cas où la force axiale est petite.

DS 411-49 Cl. 21 [16]

Les structures hyperstatiques peuvent être projetées sur la base des principes de l'élasticité, de la plasticité ou de l'encastrement partiel. En utilisant la théorie plastique, les moments élastiques peuvent être réduits jusqu'au tiers de leur valeur.

Remerciements

Les résultats présentés dans cette étude font partie d'un programme de recherches sur «le comportement inélastique des structures en béton armé» conduit par l'auteur au Département de génie civil de l'Université de Waterloo, avec l'assistance du Conseil national de la recherche du Canada (subvention A.4789) et de la Direction des Affaires scientifiques de l'OTAN (subvention N° 693).

L'auteur tient à remercier M. le professeur Giulio Maier, qui l'a invité à présenter cette étude dans le cadre du cours de spécialisation sur le Calcul à rupture des structures, qui a eu lieu à Politecnico di Milano, 24-26 juin 1974.

Bibliographie

1. BACH, C., GRAF, O.: Etudes expérimentales sur les Poutres encastrées (en allemand). Deutscher Ausschuss für Eisenbeton, H. 45, W. Ernst & Sohn, Berlin, 1920.
2. KAZINCZY, G.: La Plasticité du béton armé (en allemand). Beton und Eisen, V. 32, H. 5, 1973, pp. 74–80.
3. COHN, M.Z.: Limit Design for Reinforced Concrete Structures; an Annotated Bibliography. ACI Bibliography, No. 8, Detroit, Mich., 1970.
4. BRUMFITT, E.: Bibliography 1968-1972 in Inelasticity and Non-Linearity of Structural Concrete. (M.Z. Cohn Editor), SM Study No. 8, Univ. of Waterloo Press, 1972, pp. 513–522.
5. MACCHI, G.: Limit States Design of Statically Indeterminate Structures Composed of Linear Members. Costruzioni in Cementi Armato, Studi i Rendiconti, V. 6, 1969.
6. CEB COMMISSION XI HYPERSTATIQUE: Rapport sur la Session de Monaco. Bulletin d'Information CEB, N° 34, oct. 1961, pp. 32–73.
7. ICE RESEARCH COMMITTEE: Report on Ultimate Load Design of Concrete Structures. Proc. Inst. of Civ. Eng., V. 21, fev., oct., nov., 1962, V. 22, juin 1963.
8. WINTER, G., COHN M.Z.: Contributions to the International Symposium on Flexural Mechanics of Reinforced Concrete. Miami, Flo., nov. 1964, ACI SP-12, 1965, pp. 581–590, 591–594.
9. LEONHARDT, F., LEVI, F., RÜSCH, H.: Contributions au Bulletin d'Information CEB, N° 55: mai 1966, pp. 60–71, 131–153 et 154–158.
10. ACI 318-71: Building Code Requirements for Reinforced Concrete. ACI Publications, Detroit, 1971.
11. NTU 123-55: Normes techniques pour le dimensionnement des éléments en béton et béton armé (en russe). Grosstrojizdat, Moscou, 1955.
12. C.E.B.: Recommandations internationales pour le calcul et l'exécution des ouvrages en béton. Bulletin d'information CEB, N° 84, mai 1972.
13. CCBA 68: Règles techniques de conception et de calcul des ouvrages et constructions en béton armé. Soc. Dif. Tech. du Bâtiment et des Travaux publics, mai 1968.
14. BSI, CP 110-72: Code of Practice for the Structural Use of Concrete. British Standard Institution, London, 1972.
15. DIN, 1045-1972: Béton et béton armé, calcul et exécution (en allemand). Com. all. pour le béton armé, Berlin, 1972.
16. DS, 411-49: Danish Engineering Norms for Civil Engineers, Concrete and Reinforced Concrete Structures (en danois). Danish Standard Institution, Copenhagen, 1948.
17. HANGAN, M.D.: Le Calcul des structures hyperstatiques dans le domaine plastique. Annales de l'ITBTP, V. 16, N° 183-184, mars-avril 1963, pp. 299–324.
18. BERWANGER, C.: Limit Design by Successive Moment Distribution. Journal ASCE Struct. Div., V. 92, No. ST. 1, fév. 1966, pp. 405–430.
19. FERRY-BORGES, J., ARANTES, E., OLIVEIRA, E.R.: Non-Linear Analysis of Reinforced Concrete Structures. IBSE Publications, V. 23, 1963, pp. 51–70.
20. CRANSTON W.: Computer Method for Inelastic Analysis of Plane Frames. CCA Technical Report, TRA 386, mars 1965.
21. I 123-50: Instructions concernant le calcul des Structures hyperstatiques en béton armé, compte tenu de la redistribution des efforts. N.I.I.Zh.B., Moscou, 1961, traduction française dans le Bulletin d'information CEB, N° 28, Paris, oct. 1960.
22. COHN, M.Z.: Limit Design Solutions for Concrete Structures. Proc. ASCE, Journal Struct. Div. V. 93, No. ST.1, fév. 1967, pp. 37–58.
23. BAKER, A.L.L.: Limit State Design of Reinforced Concrete. Cement and Concrete Association, London, 1971.
24. BAKER, A.L.L.: Calcul des structures hyperstatiques par la méthode simplifiée bilinéaire de la Charge ultime. Annexes aux Recommandations CEB pour le calcul et l'exécution des ouvrages en béton, tome 3, AITEC, Rome 1972, pp. 219–312.
25. SAWYER, H.A.: Design of Concrete Frames by two Failure Stages. Proc. International Symposium on «Flexural Mechanics of Reinforced Concrete», Miami, Flo. nov. 1964, ACI SP. Publications SP-12m 1945, pp. 405–438.
26. SAWYER, H.A.: Comprehensive Design of Reinforced Concrete Frames by Plasticity Factors. Bulletin d'information CEB, No. 53, janvier 1966, pp. 299-316.

27. MACCHI, G.: Calcul des structures hyperstatiques par la méthode des rotations imposées. Annexes aux Recommandations Internationales CEB pour le calcul et l'exécution des ouvrages en béton, tome 3, AITEC, Rome, 1972, pp. 315–368.
28. COHN, M.Z., BURNETT, E.F., GRIERSON, D.E.: Safety, Serviceability and Efficiency of Reinforced Concrete Beams and Frames. Publications IABSE, V. 29-2. 1969, pp. 17–32.
29. COHN, M.Z., BURNETT, E.F., GRIERSON, D.E., DUTT, O., FRANCIS, R., PARAMESWAR, H.C., TALWAR, S.: Application of Limit Design to Reinforced Concrete Building Structures. Proc. ICE (London) 1970, Suppl. XVII, Paper 7335 S. pp. 375–414.
30. DE DONATO, O., MAIER, G.: Mathematical Programming Methods for the Inelastic Analysis of Reinforced Concrete Frames Allowing for Limited Rotation Capacity. Int. Jour. Numerical Methods in Engng., V. 4, 1972, pp. 307–329.
31. MAIER, G., DE DONATO, O., CORRADI, L.: Inelastic Analysis of R.C. Frames by Quadratic Programming in Inelasticity and Non-Linearity in structural Concrete. SM. Study No. 8, Univ. of Waterloo Press, pp. 265–288.
32. ACI-ASCE Joint Committee 428: Progress Report on Code Clauses for Limit Design et Comments on Model Code Clauses, par H.A. Sawyer, ACI Journal, No. 9, sept. 1968, pp. 713–719.
33. COHN, M.Z.: Optimum Limit Design for Reinforced Concrete Continuous Beams. Proc. ICE (London), V. 30, avril 1965, pp. 17–32.
34. COHN, M.Z.: Limit Design of Reinforced Concrete Frames: Journal Struct. Div. ASCE, V. 94, No. ST.10, oct. 1968, pp. 2467–2483.
35. COHN, M.Z.: Rotation Compatibility in the Limit Design of Reinforced Concrete Continuous Beams. Proc. Int. Symposium on «Flexural Mechanics of Reinforced Concrete», Miami, Flo., nov. 1964, ACI Publications SP-12, 1965, pp. 359–382.
36. COHN, M.Z., GRIERSON, D.E.: Optimal Design of Reinforced Concrete Beams and Frames. Final Publication 8th IABSE Congress, N.Y., sept. 1968, pp. 215–226.
37. COHN, M.Z., GRIERSON, D.E.: Further Results on the Equilibrium Method for Limit Design. Proc. ICE (London), V. 6, juin 1970, pp. 143–168.
38. COHN, M.Z.: Dimensionnement à l'état limite des ossatures en Béton armé. Costruzioni in Cemento Armato, Studi i Rendiconti, V. 11, 1974.
39. COHN, M.Z.: Optimisation des structures en béton et optimisation en construction. Colloque au Collège international de la science des constructions, Saint-Rémy-lès-Chevreuse, 6-9 nov. 1973.
40. COHN, M.Z.: Equilibrium (Serviceability) Methods of Limit Design for Concrete Frames. Proc. ICE (London), Paper 7514 S, Supplement XIV, 1972, pp. 263–275.
41. COHN, M.Z.: Analysis and Design of Inelastic Structures. SM Text G1, V. 2, Applications, Univ. of Waterloo Press, 1972.
42. COHN, M.Z. (editor): Inelasticity and Non-Linearity in Structural Concrete. SM Study No. 8, Univ. of Waterloo Press, 1973.

Résumé

L'article passe en revue la pratique actuelle des normes officielles sur le comportement inélastique des poutres et portiques en béton armé et les perspectives d'application des principales méthodes inélastiques, à savoir les méthodes dites de «compatibilité» et d'«équilibre».

Après la présentation de propositions concernant la redistribution arbitraire des moments élastiques selon divers règlements européens et américains, on examine les principes des méthodes de compatibilité et d'équilibre.

Quelques exemples d'application aux poutres, dalles et portiques permettent une comparaison des résultats obtenus selon diverses méthodes du point de vue de la résistance, de la sécurité à la ruine, des conditions de service, ainsi que du rendement de ces solutions par rapport à la méthode élastique traditionnelle.

Zusammenfassung

Der Artikel behandelt der Reihe nach die verschiedenen heute gültigen offiziellen Normen in Bezug auf das nicht elastische Verhalten von Stab- und Rahmentragwerken aus Stahlbeton sowie die verschiedenen Gesichtspunkte einer Anwendung der wesentlichen nicht elastischen Methoden, d.h. der „Verträglichkeitsmethode" und der „ Gleichgewichtsmethode".

Nach einer Übersicht der Normenbestimmungen bzgl. willkürlicher Neuverteilung der elastisch ermittelten Momentenverteilung gemäss verschiedenen europäischen und amerikanischen Regeln werden die Prinzipien der Verträglichkeits- und Gleichgewichtsmethoden untersucht.

Einige Anwendungsbeispiele an Balken, Platten und Rahmentragwerken gestatten einen Vergleich der anhand verschiedener Methoden erhaltenen Ergebnisse für Widerstand, Bruchsicherheit und Gebrauchsbedingungen, sowie der Auswirkung dieser Ergebnisse in Bezug auf die traditionelle elastische Methode.

Summary

The paper reviews the current practice considering the inelastic action in reinforced concrete beams and frames, as allowed by some standard codes of practice. Also, it discusses the prospect of applications of the main inelastic methods, in particular the "compatibility" and "equilibrium" methods.

After the provisions on arbitrary redistribution of elastic moments in various european and american standards are presented, the principles of the compatibility and equilibrium methods are briefly examined.

Some examples of application to beams, one-way slabs and frames allow comparisons of solutions obtained by various methods from the viewpoint of collapse safety, serviceability and efficiency versus the traditional, elastic (ultimate strength) design solutions.