Zeitschrift: Bulletin de la Société des Sciences Naturelles de Neuchâtel

Herausgeber: Société des Sciences Naturelles de Neuchâtel

Band: 5 (1858-1861)

Artikel: Influence du ressort de suspension sur la durée des oscillations du pendule

Autor: Isely

DOI: https://doi.org/10.5169/seals-87967

INFLUENCE
DU RESSORT DE SUSPENSION
SUR LA DURÉE
DES OSCILLATIONS DU PENDULE.

Par M. Isely.

(Voir page 504 des séances).

On sait qu'il y a deux espèces de suspension pour le pendule des horloges astronomiques : la suspension à couteau, et la suspension à ressort.

Dans cette dernière, la tige du pendule est accrochée à la partie inférieure de deux lames minces d'acier dont les extrémités supérieures sont fortement serrées entre les mâchoires d'une pince fixe. Le pendule ne peut osciller qu'en faisant fléchir ces lames d'acier qui se courbent ainsi, tantôt d'un côté, tantôt de l'autre. On évite, dans cette suspension, les frottements qui résultent des oscillations du pendule, mais la raideur du ressort influe sur le mouvement.

MM. *Laugier* et *Winnerl* ont reconnu qu'on pouvait profiter de l'action des ressorts de suspension pour faire disparaître les très petites différences qui existent entre les durées des oscillations d'un pendule, lorsque l'amplitude de ses oscillations varie de 0 à 5 degrés. Dans un rapport communiqué à l'Académie des sciences, le 14 juillet 1845, ils ont fait connaître les résultats de leurs expériences exécutées avec tout le soin possible.

Ils ont fait osciller un pendule, long d'à-peu-près 1 mètre, avec des amplitudes de 1°, 3°, 5°, (l'amplitude étant le double de la demi-oscillation.) Ce pendule a porté successivement des lentilles de 4 kilog., 6 kilog. et 8 kilogrammes.

Ils ont trouvé les résultats suivants :

1° En suspendant le pendule avec deux ressorts, écartés de 2 à 3 pouces, larges chacun de 5 millimètres, épais de $^{24}/_{100}$ de millimètre et longs de 1 millimètre, les oscillations de 3° et 5° d'amplitude ont été plus rapides que celles d'un degré, mais la différence devenait d'autant plus faible que la lentille était plus pesante.

2° En suspendant le même pendule avec deux ressorts exactement pareils aux précédents, pris dans le même morceau d'acier, mais ayant une longueur de 3 millimètres, les oscillations ont été sensiblement isochrones, dans les diverses amplitudes.

Disons que ces messieurs ont compté le temps que duraient deux mille oscillations du pendule.

Cette étude, entièrement expérimentale, est accompagnée de quelques réflexions théoriques pour expliquer l'influence que peut exercer le ressort de suspension. Voici ce que le rapport dit (voyez Moinet, traité d'horlogerie, IIme partie, chap. VIII, page 495).

« Si l'on réfléchit à la manière dont s'exécute le mou-
» vement du pendule, on voit que deux effets distincts
» concourent à son isochronisme : le premier tient à la fle-
» xion du ressort qui, à chaque instant, diminue d'autant
» plus la longueur du pendule qu'il s'écarte davantage de
» la verticale ; le second, qui paraît être le plus considé-
» rable, est causé par la résistance du ressort ; il ajoute
» à l'intensité de la pesanteur un terme variable avec
» l'amplitude et augmentant sans cesse avec elle. Ce terme
» diminue toujours la durée des oscillations et a d'autant
» plus d'influence que l'amplitude est plus considérable ;

» on conçoit, d'après cela, qu'en choisissant convenable-
» ment le ressort de suspension, ce double effet, dû à sa
» flexion et à sa résistance, puisse en chaque point de l'arc
» décrit par le centre de gravité du pendule, être égal à
» la différence qui ordinairement se manifeste entre les
» durées des oscillations suivant l'amplitude; en d'autres
» termes, on conçoit que ce double effet puisse varier de
» manière à rendre le pendule isochrone, si la force du
» ressort est très faible relativement au poids de la len-
» tille, les oscillations auront une durée moindre dans les
» petits arcs que dans les grands, comme il arrive ordi-
» nairement ; mais si on augmente la force du ressort,
» il peut se faire que la durée des oscillations diminue
» lorsque l'oscillation augmente dans de certaines limi-
» tes, de sorte que l'on aura, pour ainsi dire, dépassé
» l'isochronisme. Nos expériences, disent-ils, ont confirmé
» la justesse de ces considérations, car elles ont réalisé
» les différents cas qui viennent d'être énumérés. »

Ces considérations générales sur la théorie de résistance du ressort, variable suivant sa flexion, mais dont la loi n'est pas indiquée, ne me semblant pas suffisamment nettes, j'ai essayé, dans l'analyse suivante, de rechercher si le calcul ne pourrait pas mieux préciser quel est le vrai mode d'agir du ressort lorsqu'on l'applique à la suspension d'un pendule.

On peut regarder une lame élastique comme composée d'une infinité de fibres élémentaires parallèles. Quand cette lame est courbée, toutes ses fibres subissent le même effet. Celles qui sont situées du côté de la convexité s'allongent, tandis que celles qui sont placées du côté de la concavité se raccourcissent. Entre les fibres qui se dilatent et celles qui se contractent, il y en a nécessairement dont la largeur ne varie pas ; on les appelle *fibres neutres*, quand la lame a une section rectangulaire, les fibres neutres sont situées au milieu de l'épaisseur.

Toutes les fibres du ressort étant ainsi déformées, réagissent pour reprendre leur longueur primitive et tendent par conséquent à redresser le ressort. — On admet, comme résultat de l'expérience, que la force avec laquelle une tige dilatée ou contractée réagit pour revenir à sa première longueur, est donnée par la formule suivante :

$$F = E s \frac{i}{l} \tag{1}$$

à condition que la limite d'élasticité ne soit pas dépassée :

l désigne la longueur primitive
i l'allongement ou la contraction
s la section du fil ou de la fibre
E est une constante qui dépend uniquement de la nature du corps. On l'appelle *coëfficient d'élasticité.* Pour le bon acier trempé, fondu, très-fin et recuit, E est à-peu-près égal à 30,000.

On peut définir la constante E en disant que c'est l'effort exprimé en kilogrammes, avec lequel il faudrait tirer un fil ayant un millimètre carré de section pour l'allonger d'une quantité égale à sa longueur, en supposant que son élasticité se conserve intacte pendant toute la durée de cette traction.

Si l'on calcule, au moyen de la formule (1), la somme des actions de toutes les fibres élémentaires renfermées dans la lame élastique, on trouve la valeur du couple qui tend à redresser cette lame en un point quelconque en faisant tourner la partie libre autour d'un axe transversal perpendiculaire au milieu de son épaisseur. Ce couple est exprimé par la formule suivante :

$$\frac{E \times {}^2/_3\, b\, a^3}{r} \tag{2}$$

dans laquelle b désigne la largeur de la lame
a sa demi épaisseur,
r le rayon de courbure de la fibre neutre au point considéré.

La quantité exprimée par cette formule (2) se nomme le *moment d'élasticité.*

Pour abréger nous représenterons $2/3\, b\, a^3$ par e.

Supposons maintenant une lame encastrée par une de ses extrémités (fig. 1) de sorte que l'extrémité O de la fibre neutre soit fixe et que la tangente à cette fibre en O ne puisse pas changer de direction ; supposons que cette lame soit sollicitée à l'autre extrémité par une force P perpendiculaire à la direction primitive O X ; on devra exprimer que le moment de la force P par rapport au point p ou la fibre neutre perce le plan mn d'une section transversale, est égal au *moment d'élasticité de cette section.*

Si x et y sont les cordonnées du point p et h l'abscisse extrême H, point d'application de la force P, on aura :

$$\frac{\mathrm{E}e}{r} = \mathrm{P}\,(h - x) \qquad (3)$$

$$\text{Or } r = \frac{\left\{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right\}^{3/2}}{\frac{d^2y}{dx^2}} \qquad (4)$$

ce qui donne

$$\frac{\mathrm{E}e}{\mathrm{P}\,(h - x)} = \frac{\left\{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right\}^{3/2}}{\frac{d^2y}{dx^2}} \qquad (5)$$

Il s'agit donc de trouver l'équation de la courbe de la fibre neutre par l'expression de son rayon de courbure.

Si l'on suppose d'abord que le ressort subisse une flexion très faible, on pourra négliger le carré de $\left(\frac{dy}{dx}\right)$ à côté de l'unité, et l'équation (5) deviendra après transformation :

$$\mathrm{E}e.\, \frac{d^2y}{dx^2} = \mathrm{P}\,(h - x) \qquad (6)$$

Une première intégration donne :

$$\text{Ee.}\frac{dy}{dx} = \text{P}\left(hx - \frac{1}{2}x^2\right. \qquad (7)$$

La constante est nulle parce que $\frac{dy}{dx} = o$ lorsque $x = o$; si $x = h$, on a :

$$\text{Ee.}\ \frac{dy}{dx_h} = \frac{1}{2}\ \text{Ph}^2 \text{ ou}$$

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)_h = \frac{\text{P}}{2\text{Ee}}\ h^2 \qquad (8)$$

Cette valeur de $\left(\frac{dy}{dy}\right)^h$ donne l'inclinaison de la tangente au point extrême de la lame.

En intégrant l'équation (7) une seconde fois, on arrive à ;

$$y = \frac{\text{P}}{\text{Ee}}\left\{\frac{1}{2}hx^2 - \frac{1}{6}\ x^3\right\} \qquad (9)$$

pour l'équation de la courbe.

Lorsque $x = h$, c.-à-d., à l'extrémité du ressort, $y = f$; en désignant par f l'écartement extrême du ressort, ou ce qu'on appelle la *flèche,* savoir K H, alors

$$f = \frac{\text{Ph}^3}{3\text{Ee}} \qquad (10)$$

on en tire $\text{P} = \frac{3\text{Ee}}{h^3}\ f$ (11)

c.-à-d., que la force nécessaire pour *fléchir un ressort droit d'une petite quantité, est proportionnelle à la flèche, en raison inverse du cube de sa longueur, en raison directe de sa largeur et du cube de son épaisseur.*

L'équation (10) donne encore :

$$\frac{\text{P}}{\text{Ee}} = \frac{3f}{h^3} \qquad (12)$$

ce qui change l'équation (9) en

$$y = \frac{3f}{h^3}\left(\frac{1}{2}hx^2 - \frac{1}{6}x^3\right) \qquad (13)$$

c'est l'équation de la courbe renfermant pour données les coordonnées extrêmes h et f du point K.

L'équation (8) devient aussi :

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)_h = \frac{3f}{2h} \qquad (14)$$

pour l'inclinaison de la tangente sur l'axe des abscisses, au point K.

L'équation de cette tangente K I, est :

$$y - f = \frac{3f}{2h}(x - h) \qquad (15)$$

quand on fait $y = o$, pour connaître le point I où elle coupe l'axe des abscisses, on trouve :

$$x \text{ ou OI} = \frac{1}{3} h \qquad (16)$$

$$h - x \text{ ou HI} = {}^2/_3\, h$$

c'est-à-dire, que la tangente *à l'extrémité de la fibre neutre va couper la ligne des x*, O H, *toujours au tiers de l'abscisse de l'extrémité;* ou, *au tiers de la longueur du ressort;* car, celui-ci, étant très-peu fléchi, on peut, sans erreur appréciable, prendre sa longueur pour l'abscisse O H.

Appliquons maintenant ces propriétés statiques pour étudier l'action que le ressort peut exercer sur le mouvement d'un pendule, *dont l'amplitude des oscillations reste petite, et par conséquent dont le ressort de suspension est très-peu fléchi.* Soit (fig. 2) O le point d'attache fixe du ressort et K son extrémité liée à la verge du pendule. Cette verge reste constamment tangente, par sa ligne moyenne, à l'extrémité de la courbe que prend le ressort à chaque instant de sa flexion. La ligne moyenne de la verge va donc toujours couper, par son prolongement, la verticale (prise pour axe du x), au même point I, pendant toute la période de l'oscillation; et

$$\mathrm{OI} = {}^1/_3\, l$$
$$\mathrm{IH} = {}^2/_3\, l$$

en désignant par l la longueur du ressort, et remplaçant partout h ou l'abscisse extrême par l; parce qu'on peut, *sans erreur appréciable*, regarder h comme étant égal à l.

Le mouvement du pendule s'exécutera donc pendant toute la durée de l'oscillation autour du point I; et en désignant l'angle KIH par θ, on le considérera comme l'angle d'écart du pendule à un instant quelconque t.

Le pendule est sollicité par deux forces:

1° Le poids de la lentille et du pendule $\mathrm{L} = mg$ (m est la masse du pendule; $g = 9{,}8088$).

La composante normale de cette force sur le pendule est

$$mg \times \sin\theta$$

et son moment par rapport au point I est:

$$mgv \sin\theta \tag{17}$$

v désigne la longueur du pendule.

2° La force P avec laquelle il faudrait agir sur l'extrémité du ressort en K, suivant la direction KH pour écarter cette extrémité de la verticale de la distance $f = \mathrm{KH}$.

Cette forme P a pour valeur, d'après l'équation (11)

$$\mathrm{P} = \frac{3\mathrm{Ee}}{l^3} f$$

$$\text{Or} \quad \mathrm{KH} \text{ ou } f = \mathrm{IH} \times \operatorname{tang}\theta$$
$$\text{ou } f = {}^2/_3\, l \times \operatorname{tang}\theta \tag{18}$$

$$\text{Donc} \qquad \mathrm{P} = \frac{2\mathrm{Ee}}{l^2} \operatorname{tang}\theta \tag{19}$$

Son moment relativement au point I, autour duquel oscille le pendule, est $P \times IH$ ou

$$\frac{4\,Ee}{3\,l} \text{ tang } \theta \tag{20}$$

c'est-à-dire que *le moment du ressort ou la valeur de son action* sur le pendule est en raison directe de la *tangente de l'angle d'écart* et *en raison inverse de sa longueur*.

L'équation différentielle du mouvement d'un solide qui tourne autour d'un point fixe, est:

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} = -\frac{\text{somme des moments des forces}}{\text{moment d'inertie}} \tag{21}$$

La somme des moments des forces est ici:

$$mgv \sin\theta + \frac{4\,Ee}{3\,l} \text{ tang } \theta$$

Le moment d'inertie est $m\,(v^2 + u^2)$ en supposant que v soit la distance du centre de gravité du pendule au point I et u, le rayon de giration.

On a donc, en introduisant ces quantités dans l'équation (21)

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} = -\frac{mgv \sin\theta + \dfrac{4\,Ee}{3\,l} \text{ tang } \theta}{m\,(v^2 + u^2} \tag{22}$$

Si on divise les deux termes du second membre par mgv; qu'on remplace $v + \frac{u^2}{v}$ simplement par v en supposant que v soit la longueur du pendule simple qui oscille comme le pendule composé, et qu'on fasse

$$\frac{4\,Ee}{3\,lvmg} = K \tag{23}$$

On aura:

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} = -\frac{g}{v}\left\{\sin\theta + K \text{ tang } \theta\right\} \tag{24}$$

On intègre cette équation en la multipliant par $2\,d\,\theta$, et on a :

$$\frac{d\theta^2}{dt^2} = \frac{g}{v}\left\{2\cos\theta + 2\,K\log\cos\theta\right\} + c \qquad (25)$$

Si on désigne par α l'angle de la demi-oscillation, on remarque que lorsque $\theta = \alpha$, $\frac{d\theta}{dt}$ ou la vitesse $= 0$, d'où

$$c = -\frac{g}{v}\left\{2\cos\alpha + 2\,K\log\cos\alpha\right\} \qquad (26)$$

et

$$\frac{d\theta_2}{dt^2} = \frac{g}{v}\left\{(2\cos\theta - 2\cos\alpha) + 2\,K\log\frac{\cos\theta}{\cos\alpha}\right\} \qquad (27)$$

on en tire

$$dt = -\sqrt{\frac{v}{g}}\,\frac{d\theta}{\sqrt{(2\cos\theta - 2\cos\alpha) + 2\,k\log\frac{\cos\theta}{\cos\alpha}}} \qquad (28)$$

On prend ici le signe — parce que t augmente lorsque θ diminue.

Or (29)

$$\mathrm{Log}\,\frac{\cos\theta}{\cos\alpha} = 2\left\{\frac{\cos\theta - \cos\alpha}{\cos\theta + \cos\alpha} + \frac{1}{3}\left(\frac{\cos\theta - \cos\alpha}{\cos\theta + \cos\alpha}\right)^3 + \text{etc.}\right\}$$

mais

$$\cos\theta = 1 - \frac{\theta^2}{2} + \frac{\theta^4}{24} - \text{etc.} \qquad (30)$$

$$\cos\alpha = 1 - \frac{\alpha^2}{2} + \frac{\alpha^4}{24} - \text{etc.} \qquad (31)$$

et

$$\cos\theta - \cos\alpha = \frac{\alpha^2 - \theta^2}{2} - \frac{\alpha^4 - \theta^4}{24} + \text{etc.} \qquad (32)$$

De sorte que pour ne pas introduire des puissances de l'arc supérieures à la 4me, je néglige dans la série (29) tous les termes à partir du second et je fais:

$$\log \frac{\cos\theta}{\cos\alpha} = 2\left\{\frac{\cos\theta - \cos\alpha}{\cos\theta + \cos\alpha}\right\} \tag{33}$$

La formule (28) devient alors

$$dt = -\sqrt{\frac{v}{g}} \frac{d\theta}{\sqrt{(2\cos\theta - 2\cos\alpha\left\{1 + \frac{2K}{\cos\theta + \cos\alpha}\right\}}} \tag{34}$$

Si on remplace ($2\cos\theta - 2\cos\alpha$), ($\cos\theta + \cos\alpha$) par leurs valeurs tirées des séries (30) et (31), en conservant les termes jusqu'à la 4me puissance de l'arc inclusivement, puis qu'on effectue quelques transformations, on trouve facilement les équations suivantes:

$$dt = -\sqrt{\frac{v}{g}} \frac{d\theta}{\sqrt{\alpha^2 - \theta^2}\sqrt{\left\{1 - \frac{1}{12}(\alpha^2 + \theta^2)\right\}\left\{(1+K) + \frac{K}{4}(\alpha^2 + \theta^2)\right\}}}$$

$$dt = -\sqrt{\frac{v}{g}} \frac{d\theta}{\sqrt{\alpha^2 - \theta^2}\sqrt{(1+k) - \frac{1-2K}{12}(\alpha^2 + \theta^2)}}$$

$$\left\{dt = -\sqrt{\frac{v}{g(1+K)}} \frac{dt}{\sqrt{\alpha^2 - \theta^2}\sqrt{1 - K'(\alpha^2 + \theta^2)}}\right\} \tag{37}$$

en faisant pour abréger

$$\frac{1 - 2K}{12(1+K)} = K' \tag{38}$$

Puis

$$dt = -\sqrt{\frac{v}{g(1+K)}}\left\{\frac{d\theta}{\sqrt{\alpha^2 - \theta^2}} + \frac{K'}{2} \times \frac{(\alpha^2 + \theta^2)\, d\theta}{\sqrt{\alpha^2 - \theta^2}}\right\} \tag{39}$$

L'intégration de cette dernière donne (40)

$$t = \sqrt{\frac{v}{g(1+k)}} \left\{ \left(1 + \frac{3\,K'}{4}\alpha^2\right) \left\{ \text{arc cos} = \frac{\theta}{\alpha} \right\} + \frac{K'\theta}{4} \sqrt{\alpha^2 - \theta^2} \right\} + C$$

Cette intégrale doit être prise depuis $\theta = \alpha$ à $\theta = -\alpha$, et elle donne pour la durée complète d'une oscillation du pendule, dont l'amplitude totale est 2α

$$T = \pi \sqrt{\frac{v}{g(1+K)}} \left\{ 1 + \frac{3\,K'}{4} \alpha^2 \right\} \tag{41}$$

Pour vérifier la justesse de cette intégrale, je remarque: 1° que lorsque le ressort est supprimé, on a

$$K = o$$

et si $\alpha = o$ ou est infiniment petit,

$$T = \pi \sqrt{\frac{v}{g}}$$

ce qui est la formule donnée par tous les ouvrages de mécanique pour calculer la durée des oscillations infiniment petites.

2° Lorsque $K = o$, mais que α au lieu d'être infiniment petit, est simplement petit, on a

$$T = \pi \sqrt{\frac{v}{g}} \left(1 + \frac{\alpha^2}{16} \right)$$

Cette formule est celle que Poisson donne dans son ouvrage de mécanique, (Ier vol., p. 345), pour calculer la durée des oscillations lorsqu'elles sont petites, mais non infiniment petites.

Revenons à la formule (41). Elle contient la solution du problème de l'isochronisme par le ressort. En effet, le facteur $\left\{ 1 + \frac{3\,K'\,\alpha^2}{4} \right\}$ qui varie avec l'amplitude de l'oscillation, deviendra la constante 1, lorsque

$$K' = 0$$

ou $$\frac{1 - 2\,K}{12\,(1 + K)} = 0$$

Cette quantité devient égale à 0, lorsque

$$1 - 2\,K = 0 \tag{42}$$

ou $$2\,K = 1$$

ou $$\frac{8\,Ee}{3\,lv\,mg} = 1, \text{ ou } 8\,Ee = 3\,l\,v\,m\,g \tag{43}$$

Si K' était négatif ou $2\,K > 1$ ou $\frac{8\,Ee}{3\,lv\,gm} > 1$, le facteur $\left(1 + \frac{3\,K'}{4}\,\alpha^2\right)$ deviendrait $\left(1 - \frac{3\,K'}{4}\,\alpha^2\right)$ et la *durée des oscillations diminuerait avec leur amplitude.*

Lors même que K' ne serait pas *o*, la différence entre la durée des oscillations, suivant l'amplitude, serait d'autant plus diminuée que K' serait plus petit ou que $\frac{8\,Ee}{3\,lv\,mg}$ approcherait plus de l'unité.

Ainsi le résultat de l'analyse précédente est qu'en *supposant les oscillations petites* et par conséquent le ressort très-peu fléchi [1] ce qui permet de supprimer $\left(\frac{dy}{dx}\right)^2$ à côté de l'unité, dans l'expression du rayon de courbure, le *ressort peut amener l'isochronisme, c'est-à-dire faire disparaître les petites inégalités qui se manifestent dans la durée des oscillations d'un pendule.*

La condition d'isochronisme étant donnée par la relation (43)

$$\frac{8\,Ee}{3\,lv\,mg} = 1$$

on voit que l'influence utile du ressort pour amener l'isochronisme est :

1° En raison directe de l'élasticité du ressort exprimée par E.

[1] L'angle que fait le ressort avec la verticale, n'est à peu près que les 2/3 de l'angle d'écart.

2° En raison directe de $e = 2/3\ b\ a^3$, c.-à-d. de la largeur et du cube de l'épaisseur du ressort.

3° En raison inverse *a*) de la longueur du ressort
b) de la longueur du pendule
c) du poids mg du pendule.

Toutes les quantités contenues dans la relation (43) peuvent se déterminer exactement, sauf E qui varie avec la nature des aciers. Il varie entre 21,000 et 30,000 ; en prenant une valeur moyenne 25,000, on pourra choisir pour données le poids du pendule, sa longueur, la longueur du ressort ainsi que sa largeur et déterminer son épaisseur $2\,a$ au moyen de l'équation

$$8\,\mathrm{E}. \times {}^2/_3\, b\, a^3 = 3\, lv\, mg$$

où toutes les quantités seront connues, sauf a.

En un mot cette équation peut servir à calculer la valeur d'une des quantités qui y sont contenues, lorsqu'on connaît toutes les autres.

Le résultat de l'analyse expliquerait donc fort bien les résultats des expériences de MM. *Laugier et Winnerl.*

Leur ressort de 1 millimètre rendait la quantité

$$2\,\mathrm{K} = \frac{8\,\mathrm{E}e}{3\, lv\, mg}$$

trop forte et l'isochronisme était dépassé, mais la différence diminuait avec le poids de la lentille qui est un facteur du dénominatenr.

Le ressort de 3 millimètres, en diminuant la quantité *K* remplissait sensiblement les conditions de l'isochronisme.

La quantité *K* affecte la durée de l'oscillation en faisant varier le facteur

$$\sqrt{\frac{v}{g\,(1 + \mathrm{K})}}$$

Plus K sera grand, plus aussi $\sqrt{\dfrac{r}{g(1+K)}}$ sera diminué et par conséquent

$$T = \pi \sqrt{\frac{v}{g(1+K)}}$$

sera plus *faible pour la même longueur du pendule.*

Ce qui signifie que le ressort augmente la rapidité des oscillations du pendule, d'autant plus que la quantité K est plus grande. — Cette conclusion est tellement conforme avec les expériences de Laugier et Winnerl, que je ne puis m'empêcher de transcrire ici leur tableau pour que chacun puisse juger soi-même.

Expériences faites avec le ressort de 1 millimètre.

	2000 oscillations ont duré :		
	Amplitude de 1°	*Amplitude de* 3°	*Amplitude de* 5°
I Lentille du poids de 2 kilog.	1977'',00	1975'',60	1974'',37
II » » » 4 kilog.	2010''.55	2009'',84	2008'',93
III » » » 6 kilog.	2020'',31	2019'',80	2019'',34
IV » » » 8 kilog.	2027'',04	2026'',68	2026'',38

Expériences faites avec le ressort de 3 millimètres.

	2000 oscillations ont duré :		
	Amplitude de 1°	*Amplitude de* 3°	*Amplitude de* 5°
II Lentille du poids de 4 kilog.	2024'',96	2024'',89	2024'',99
III » » » 6 kilog.	2030'',28	2030'',33	2030'',37
IV » » » 8 kilog.	2034'',81	2034'',81	2034'',98

On voit clairement dans ce tableau que l'augmentation de longueur du ressort, et l'augmentation de poids de la lentille en diminuant

$$K = \frac{4\,E\,e}{3\,l\,v\,m\,g}$$

ont fait croître

$$T = \pi \sqrt{\frac{v}{g(1+K)}}$$

La suspension à ressort exige donc que l'*on fasse le pendule à secondes* plus long que pour la suspension à couteau, d'autant plus que l'influence du ressort devient plus énergique, pour établir l'isochronisme.

Sans avoir besoin du secours de toute l'analyse précédente, on peut très bien s'expliquer l'influence du ressort pour amener l'isochronisme, rien qu'à l'examen de la fig. 2. L'action du ressort s'exerce en K suivant la direction K ; si on la décompose en deux composantes dont l'une N soit normale à I K, on trouve qu'elle vaut :

$$N = P \times \cos \theta = \frac{2\,E\,e}{l^2} \operatorname{tang} \theta \times \cos \theta$$

en vertu de (19), ou

$$\frac{2\,E\,e}{l^2} \sin.\ \theta$$

c.-à-d. que *la force avec laquelle le ressort agit normalement sur le pendule* a la même forme que l'action de la pesanteur ou qu'elle *est proportionelle au sinus de l'angle d'écart.* Mais son bras de levier I K augmente depuis le commencement de l'oscillation à la fin. La valeur de I K est

$\frac{I\,H}{\cos \theta}$ ou sans erreur appréciable $\frac{{}^2/_3\, l}{\cos \theta}$ et varie donc de

${}^2/_3\, l$ à $\frac{{}^2/_3\, l}{\cos \alpha}$

c'est cette augmentation du bras de levier *sur lequelle agit la composante normale du ressort qui produit son effet utile pour amener l'isochronisme.*

La force normale du ressort s'ajoute à l'intensité de la pesanteur, et produit ainsi une plus grande rapidité des oscillations, grandes et petites.

Ainsi ce n'est pas le raccourcissement du ressort qui, en diminuant la longueur du pendule, amène l'isochronisme; au contraire, le pendule devient plus long puisque I S' est rigoureusement plus grand que I S; mais c'est parce que la force croissante du ressort agit sur un bras de levier de plus en plus long à mesure que l'amplitude augmente. L'allongement total du pendule en passant de la position I S à la position I S' est du reste tellement faible que cette variation ne peut influer en rien sur la quantité

$$\sqrt{\frac{v}{g\,(1 + \mathrm{K})}}$$

puisqu'il affecte le numérateur v dont la valeur est 1,000 fois celle du ressort de 1 millimètre ; quelle influence pourrait produire une variation d'une fraction très petite de millimètres sur une longueur de 1 mètre placée sous un radical ?

Les considérations théoriques de MM. *Laugier et Winnerl*, manquent donc de justesse et ne pénètrent pas du tout à la vraie cause de l'influence du ressort. — Leurs expériences ont été faites avec beaucoup de soin et sont telles qu'on pouvait en attendre d'artistes de précision si éminents ; mais l'explication a été conçue après la connaissance des faits et les expériences n'ont pas confirmé sa justesse ; c'est bien plutôt l'explication qui a été imaginée en vue des résultats de l'expérimentation.

Voyons maintenant si, en reprenant l'équation (5), et en essayant d'en tirer l'équation de la courbe du ressort, sans négliger le carré de $\left(\frac{dy}{dx}\right)$ à côté de l'unité, nous arriverons aux mêmes résultats. Nous ne serons plus alors obligés de supposer l'amplitude des oscillations aussi petite que dans l'analyse précédente.

Si l'on fait pour simplifier

$$\frac{\text{E e}}{\text{P}} = c \tag{44}$$

on aura

$$c = (h - x) \frac{\left(1 + \frac{dy}{dx}^2\right)^{3/2}}{\frac{d^2y}{dx^2}} \tag{45}$$

ou en faisant

$$\frac{dy}{dx} = p\,;\ \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{dp}{dx}$$

$$(h - x)\,dx = \frac{c\,dp}{(1 + p^2)^{3/2}} \tag{46}$$

en intégrant, on trouve

$$\left(hx - \frac{1}{2}x^2\right) = \frac{cp}{\sqrt{1 + p^2}} = \frac{c\frac{dy}{dx}}{\sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}} \tag{47}$$

la constante est ici nulle;
on en tire :

$$p \text{ ou } \frac{dy}{dx} = \frac{\left(hx - \frac{1}{2}x^2\right)}{\sqrt{c^2 - \left(hx - \frac{1}{2}x^2\right)^2}} \tag{48}$$

A l'extrémité du ressort, on a $x = h$, et $\frac{dy}{dy} = \text{tang}\,\theta$, en désignant toujours par θ l'angle que la tangente à l'extrémité du ressort fait avec l'axe des abscisses.

L'équation (47) donne alors:

$$\frac{1}{2}h^2 = \frac{c\,\text{tang}\,\theta}{\sqrt{1 + \text{tang}^2\,\theta}} = c\,\sin.\,\theta \tag{49}$$

d'où

$$c = \frac{h^2}{2 \sin. \theta} = \frac{\mathrm{E\,e}}{\mathrm{P}} \tag{50}$$

On en conclut que

$$\mathrm{P} = \frac{2\ \mathrm{E\,e} \sin. \theta}{h^2} \tag{51}$$

La valeur p ou $\frac{dy}{dn}$ (48) conduit à la série suivante:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{(hx - \frac{1}{2} x^2)}{c} + \frac{(hx - \frac{1}{2} x^2)^3}{2c^3} + \frac{3(hx - \frac{1}{2} x^2)^5}{8c^5} + \text{etc.} \tag{52}$$

Le terme général de cette série est

$$\frac{1.\ 3.\ 5.\ 7\ \ldots\ (2n-3)\ (hx - \frac{1}{2} x^2)^{2n-1}}{2^{n-1}.\ 1.\ 2.\ 3.\ \ldots\ (n-1).\ c^{2n-1}}$$

Le rapport d'un terme au précédent est

$$\frac{2n-1}{2n}\ \frac{(hx - \frac{1}{2} x^2)^2}{c^2}$$

et on voit que ce rapport tend vers

$$\frac{(hx - \frac{1}{2} x^2)^2}{c^2}$$

Mais $(hx - \frac{1}{2} x^2)^2$ varie de 0 à $(\frac{1}{2} h^2)^2$ tandis que c^2 qui contient E^2 est grand; on a, du reste, puisque

$$c = \frac{h^2}{2 \sin. \theta}; \quad c^2 = \frac{h^4}{4 \sin.^2 \theta}$$

et

$$\frac{(hx - \frac{1}{2} x^2)^2}{c^2} = \frac{4\ (hx - \frac{1}{2} x^2)^2}{h^4} \sin.^2 \theta$$

c'est-à-dire que ce rapport varie de o à sin. $^2\theta$. — La plus grande valeur du rapport d'un terme au suivant ne peut donc pas dépasser sin. $^2\theta$, qui est toujours très-petit, parce que l'angle θ ne s'élève jamais qu'à 2 ou 3°.

La série (52) est donc très-convergente et puisque le 3me terme contient déjà la 5me puissance du sinus θ, on peut se contenter des deux premiers et prendre :

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1\left(hx - \frac{1}{2}x^2\right)}{C} + \frac{\left(hx - \frac{1}{2}x^2\right)^3}{2c^3} \qquad (53)$$

Cette équation donne par l'intégration :

$$y = \frac{3hx^2 - x^3}{6c} + \frac{70h^3x^4 - 84h^2x^5 + 35hx^6 - 5x^7}{560c^3} \qquad (54)$$

Si l'on fait $x = h$ et $y = f$ pour connaître les coordonnées de l'extrémité k du ressort, lorsque l'écart est θ, on a :

$$f = \frac{h^3}{3c} + \frac{h^7}{35c^3} \qquad (55)$$

Au moyen de la valeur $c = \frac{h^2}{2\,\text{sin.}\,\theta}$, on a

$$f = \frac{2\,\text{sin.}\,\theta}{3}h + \frac{8\,\text{sin.}^3\theta}{35}h \qquad (56)$$

Les termes suivants négligés contiendraient les 5me, 7me puissances du sinus.

Puisque f ou KH est connu au moyen de θ, on en tire

$$\text{IH} = \frac{\text{KH}}{\text{tang}\,\theta} = \frac{f}{\text{tang}\,\theta} \text{ ou}$$

$$\text{IH} = \frac{2\cos\theta}{3}h + \frac{8\,\text{sin.}^2\theta\cos\theta}{35}h \qquad (57)$$

Mais lorsque le pendule est dans la position I S', telle que sa verge K S' prolongée fait l'angle θ avec la verticale, et coupe, par son prolongement, celle-ci en I, le moment de l'action du ressort par rapport au point I qui est le centre de rotation, devient:

$$P \times IH \text{ ou}$$

$$\frac{2\,E\,e\,\sin.\,\theta}{h^2} \times \left\{ {}^2/_3\, h \cos\theta + {}^8/_{35}\, h \sin.^2\theta \cos\theta \right\} \qquad (58)$$

ou

$$\frac{4\,E\,e\,\sin.\,\theta\cos\theta}{3\,h} \left\{ 1 + {}^{12}/_{35} \sin.\,\theta \right\} \qquad (59)$$

Il s'agit maintenant de trouver la relation de h ou de l'abscisse extrême, avec la longueur l du ressort.

Il faut, pour cela, exprimer la longueur de la courbe en fonction de ses coordonnées. En désignant par s l'axe de courbe, on sait que

$$d\,s = d\,x \sqrt{1 + \frac{d\,y^2}{d\,x^2}}$$

En remplaçant $\frac{d\,y}{d\,x}$ par sa valeur connue dans l'équation (48), on trouve:

$$d\,s = \frac{d\,x}{\sqrt{1 - \frac{(h x - \frac{1}{2} x^2)^2}{c^2}}} \qquad (60)$$

Développons en série, nous aurons:

$$d\,s = d\,x \left\{ 1 + \frac{(h\,x - \frac{1}{2} x)^2}{2\,c^2} + \frac{3}{8} \frac{(h\,x - \frac{1}{2} x^2)^4}{c^4} + \ldots \right\} \qquad (61)$$

Cette série est semblable à la (52); en l'intégrant, on obtient pour les deux premiers termes:

$$s = x + \frac{20\,h^2\,x^3 + 3\,x^5 - 15\,h\,x^4}{120\,c^2} + \text{etc.} \qquad (62)$$

Lorsque $x = h$, $s = l$; donc

$$l = h + \frac{h^5}{15\,c^2} \quad (63) \quad \left(\text{le terme suivant serait } \frac{h^9}{105\,c^4}\right)$$

ou

$$l = h\left(1 + \frac{4}{15}\sin.^2\theta\right) \tag{64}$$

d'où

$$h = \frac{l}{1 + {}^4/_{15}\sin.^2\theta} \tag{65}$$

Si nous substituons cette valeur de h dans l'expression du moment du ressort (59), celui-ci ne contiendra plus que la variable θ.

On a alors: Moment de l'action du ressort =

$$\frac{4\,\mathrm{E}e\sin.\theta\cos\theta}{3\,l}\left(1 + {}^{12}/_{35}\sin.^2\theta\right)\left(1 + {}^4/_{15}\sin.^2\theta\right) \tag{66}$$

ou

$$\frac{4\,\mathrm{E}e\sin.\theta\cos\theta}{3\,l}\left\{1 + {}^{64}/_{105}\sin.^2\theta\right\} \tag{67}$$

en négligeant les 4$^{\text{mes}}$ puissances du sinus, qui introduiraient dans les intégrations les 6$^{\text{mes}}$ puissances de l'arc.

Mettons cette expression du moment dans l'équation (21), nous trouvons:

$$\frac{d^2\theta}{\theta p\,t^2} = -\frac{mgv\sin.\theta + \frac{4\,\mathrm{E}e}{3\,l}\left\{\sin.\theta\cos\theta + {}^{64}/_{105}\sin.^3\theta\cos\right\}}{m\,(v^2 + u^2)} \tag{68}$$

et, en faisant encore

$$\frac{4\,\mathrm{E}e}{3\,lv\,mg} = \mathrm{K} \tag{69}$$

nous trouvons:

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} = -\frac{g}{v}\left\{\sin.\theta + K\sin.\theta\cos\theta + {}^{64}/_{105}\,K\sin.{}^3\theta\cos\theta\right\} \tag{70}$$

En intégrant, on a

$$\frac{d\theta^2}{dt^2} = \frac{g}{v}\left\{2\cos\theta - \frac{137\,K}{105}\sin.{}^2\theta + \frac{32}{105}\,K\sin.{}^2\theta\cos{}^2\theta\right\} + C \tag{71}$$

A cause que $\frac{d\theta}{dt} = o$ lorsque $\theta = \alpha$ on obtient après les transformations convenables et par l'intégration

$$T = \pi\sqrt{\frac{v}{g(1+K)}}\left\{1 + \frac{3K''}{4}\alpha^2\right\} \tag{72}$$

$$\frac{35 + 12\,K}{420\,(1+K)} = K'' \tag{73}$$

Pour obtenir l'isochronisme, il faudrait encore que la constante K″ fut nulle, mais puisque

$$K'' = \frac{35 + 12\,K}{420\,(1+K)}$$

il est impossible que K″ devienne o, K ne pouvant, par sa nature, devenir négatif, attendu que

$$K = \frac{4\,E\,e}{3\,l\,v\,m\,g}$$

Lorsque $K = o$; $K'' = \frac{1}{12}$; si K était ∞, on aurait $K'' = \frac{1}{35}$.

Ainsi, lorsque les amplitudes ne sont plus très-petites pour permettre de supprimer dans l'équation de la courbe du ressort, le terme $\left(\frac{dy}{dn}\right)^2$ à côté de l'unité, et que l'on tire la valeur de la force du ressort, de la forme rigoureusement mathématique de cette courbe, on arrive à cette conclusion que l'*isochronisme est impossible.*

Il n'en résulte pas moins que le ressort exerce son influence pour diminuer le facteur $\left(1 + \frac{3\,K''}{4}\,\alpha^2\right)$ dépendant de la grandeur de l'amplitude. En effet, on voit que la constante K est multipliée au numérateur par 12 et au dénominateur par 420, d'où il suit que l'augmentation de *R* affecte beaucoup plus le dénominateur que le numérateur; le multiplicateur de α^2 est donc d'autant plus faible que K est plus grand. De plus pour une longueur donnée de pendule, on voit que le facteur $\sqrt{\frac{v}{g\,(I+R)}}$ diminuant aussi avec l'accroissement de *R*, cela tend encore à *rendre les oscillations moins inégales en durée.*

Le résultat de la seconde analyse ne dément donc pas complètement celui de la première. Il indique sans doute que l'isochronisme absolu est impossible; mais il indique aussi que le ressort peut diminuer l'inégalité qui existe entre les durées des oscillations de diverses amplitudes; et comme la valeur de la force P tirée de l'équation (47) est rigoureusement juste; que de plus les séries qui ont donné la valeur de la flèche et de l'abscisse *h* ne sont en erreur que depuis les 5mes puissances du sinus, on peut présumer que l'action du ressort sur l'isochronisme doit s'étendre au delà des amplitudes de 3 ou 5°.

Il est bien probable aussi que, lorsque les amplitudes ne dépassent pas 5°, ou varient entre 0 et 5°, l'action du ressort est très-approchée de celle qui a été trouvée dans la 1re analyse, ce qui est prouvé par les expériences de Laugier et Winnerl, dont le pendule a dépassé l'isochronisme avec le ressort de 1 millimètre.

Nous pouvons donc répéter que le ressort a d'autant plus d'influence pour produire l'isochronisme :

1° qu'il est plus élastique, plus large, plus épais et plus court.

2° que le pendule est moins lourd et plus court.

Dans les deux analyses précédentes, j'ai toujours fait abstraction de la traction longitudinale que le ressort éprouve soit par le poids de la lentille, soit par la force centrifuge.

Voyons si cette traction, variable suivant l'angle d'écart, peut exercer une influence sur l'isochronisme.

Lorsque le pendule est écarté de la verticale de l'angle θ, la composante du poids de la lentille qui tire le ressort est $mg \cos \theta$.

La force centrifuge vaut $2\, mg\, (\cos \theta - \cos \alpha)$.

La composante totale qui tire le ressort est donc :

$$mg\, (3 \cos \theta - 2 \cos \alpha)$$

Lorsque le pendule est vertical, cette force vaut $mg\, (3 - 2 \cos \alpha)$.

Or le ressort dont la section est $s = 2\, ba$ éprouve de la part de cette force un allongement i, tel que si l' désigne la longueur de ce ressort avant toute traction, on aura :

$$mg \left\{ 3 \cos . \theta - 2 \cos \alpha \right\} = \mathrm{E}\, s\, \frac{i}{l'}$$

d'où

$$i = \frac{mg\, l'\, (3 \cos \theta - 2 \cos \alpha)}{\mathrm{E}\, s}$$

La longueur totale du ressort après l'allongement sera donc :

$$l = l' \frac{\left[\mathrm{E}\, s + mg\, (3 \cos \theta - 2 \cos \alpha) \right]}{\mathrm{E}\, s}$$

Lorsque le pendule est vertical, on a :

$$l'' = l' \frac{\left[\mathrm{E}\, s + mg\, (3 - 2 \cos \alpha) \right]}{\mathrm{E}\, s}$$

Si le ressort éprouvait, pendant toute la durée de l'oscillation, la même traction, celle-ci n'influerait en rien sur son action. Mais puisque cette traction diminue depuis la position verticale jusqu'à l'angle α où elle vaut mg cos α, il en résulte que le ressort se raccourcit d'une quantité très-faible sans doute qui ne peut exercer aucun effet sur le radical $\sqrt{\frac{v}{g}}$, mais qui introduit une variation plus grande dans l'expression du moment du ressort contenant l au dénominateur. Autrement, le raccourcissement du ressort augmente sa force.

Comparons la longueur l du ressort dans la position θ à cette longueur l'' dans la position verticale. On a

$$\frac{l''}{l} = \frac{\mathrm{E}s + mg\,(3 - 2\cos\alpha)}{\mathrm{E}s + mg\,(3\cos\theta - 2\cos\alpha)}$$

en effectuant la division et remplacant les lignes trigonométriques par les arcs, on a très-approximativement :

$$\frac{l''}{l} = 1 + \frac{3\,mg}{2\,\mathrm{E}s}\,\theta^2$$

d'où

$$l = \frac{l''}{1 + \frac{3\,mg}{2\,\mathrm{E}s}\,\theta^2}$$

Mettons cette valeur au lieu de l dans l'expression du moment du ressort (équation 67) après y avoir remplacé les lignes trigonométriques par les arcs ; puis effectuons les intégrations des équations différentielles, nous arriverons au même résultat final, sauf que la constante K'' devient :

$$\frac{35 + 3\,\mathrm{K}\left(4 - \frac{105\,mg}{\mathrm{E}s}\right)}{420\,(1 + \mathrm{K})}$$

Ce qui montre que le numérateur de K'' est diminué par l'effet de la diminution de traction du ressort lorsque le pendule passe de la position verticale à la position α. Mais cette diminution est très-petite à cause que $\frac{mg}{\mathrm{E}s}$ est toujours petit par suite de la grandeur de E.

Ainsi la variation de traction exercée sur le ressort *favorise l'isochronisme,* mais d'une manière presque insensible parce que $\frac{105\, mg}{Es}$ reste une fraction qui change peu 4 dont il est retranché et que la constante K'' *reste à peu près égale à* $\frac{35+12\,K}{420\,(1+K)}$

Les variations de température, en allongeant et en raccourcissant le ressort, doivent probablement modifier légèrement son action, puisque la longueur l est contenue dans la quantité K.