Solutions singulières des équations de premier ordre à deux variables

mission de santé qui aille de l'avant, puisqu'elle est une commission instituée par l'Etat.

M. *Isely* fait le dépôt de la communication suivante, qu'il a présentée dans la séance du 21 novembre dernier.

SOLUTIONS SINGULIÈRES
DES ÉQUATIONS DE PREMIER ORDRE A DEUX VARIABLES

PAR M. ISELY, PROF.

L'intégrale générale d'une équation différentielle de premier ordre à deux variables, contient toujours une constante arbitraire.

Ainsi, l'intégrale générale de l'équation différentielle

$$ydy + xdx = dx\sqrt{x^2 + y^2 - a^2}, \text{ est}$$
$$y^2 = 2\,cx + c^2 + a^2$$

et on voit qu'elle contient la constante arbitraire c.

En donnant à cette arbitraire des valeurs particulières, on obtient des intégrales particulières.

On nomme *solution singulière* une relation entre les variables, qui vérifie l'équation proposée, mais qui ne contient aucune constante arbitraire et qui ne peut être déduite de l'intégrale générale en donnant à la constante une valeur particulière.

Ainsi l'équation différentielle proposée est satisfaite par la relation : $x^2 + y^2 - a^2 = 0$, qu'on ne peut pas obtenir en donnant une valeur particulière à la constante c de l'intégrale générale.

L'intégrale générale est ici l'équation d'une parabole variable avec c, tandis que la solution singulière est l'équation d'un cercle de rayon a.

On démontre dans les traités de calcul intégral, de quelle manière la solution singulière se déduit de l'intégrale générale. On élimine la constante entre l'intégrale générale et sa dérivée par rapport à la constante, égalée à zéro, ou bien, entre cette même intégrale et sa dérivée par rapport à y, égalée à l'infini.

Dans l'exemple proposé, où l'intégrale générale est :

$$F = y^2 - 2\,cx - c^2 - a^2 = 0, \text{ on a}$$

$$\frac{dF}{dc} = -\,2\,x - 2\,c = 0$$

$$\frac{dF}{dy} = 2\,y = \infty$$

Cette dernière ne conduit qu'à la valeur illusoire $y = \infty$ tandis que la première donne $x = -\,c$; cette valeur substituée dans F, donne la solution singulière :

$$x^2 + y^2 - a^2 = 0.$$

La solution singulière est l'enveloppe des lignes représentées par l'intégrale générale.

Tel est le principal de la théorie que l'on donne à ce sujet dans le calcul intégral.

Lagrange publia déjà, en 1774, une théorie des solutions singulières, qui étaient regardées avant lui comme formant un paradoxe dans le calcul intégral. Il montra comment on peut les déduire de l'intégrale générale.

Euler ayant rencontré souvent des solutions singulières donna, le premier, un procédé pour s'assurer si une équation primitive qui vérifie une équation différentielle, est comprise dans son intégrale complète.

Laplace découvrit leur véritable caractère; puis Legendre et Poisson firent voir que l'équation différentielle peut être préparée de manière que la solution singulière en devienne un facteur.

C'est après toutes ces recherches et bien d'autres, que j'ai trouvé un procédé rapide et simple pour les déduire de l'équation différentielle, sans passer par l'intégrale générale. J'y suis arrivé en discutant géométriquement une de ces équations, entre autres celle que j'ai citée au commencement de cette étude.

Reprenons l'équation différentielle :

$$ydy + xdx = dx\sqrt{x^2 + y^2 - a^2}$$

Elle est la traduction analytique de cette question :

Construire une courbe telle que, si on mène en un de ses points une normale, et un rayon vecteur depuis l'origine, l'abscisse comprise entre l'origine et l'intersection avec la normale, soit égale à la cathète d'un triangle rectangle dont l'hypothénuse est le rayon vecteur et l'autre cathète soit une droite donnée a.

L'intégrale générale :

$$y^2 = 2cx + c^2 + a^2$$

est l'équation d'une parabole dont le foyer est distant de l'origine de $\frac{a^2}{2c}$. La constante c est le demi-paramètre.

Supposons maintenant qu'on demande de faire passer par un point du plan, dont les coordonnées sont α et β, une parabole qui satisfasse à la question. Il faudra déterminer c au moyen de la condition

$$\beta^2 = 2c.\alpha + c^2 + a^2$$

$$\text{d'où } c = -\alpha \pm \sqrt{\beta^2 + \alpha^2 - a^2}.$$

Ces deux valeurs de c montrent que par chaque point du plan on peut faire passer deux paraboles qui conviennent au problème, tant que $\beta^2 + \alpha^2 > a^2$.

Par exemple, si on suppose :

$$a = 5, \quad \alpha = 5, \quad \beta = 8$$

$$\text{on a} \quad c = 3 \quad \text{et} \quad c = -13$$

$$y^2 = 6x + 34\,; \quad y^2 = -26x + 194.$$

Chacune de ces courbes a sa tangente distincte de celle de l'autre au point α, β et c'est pourquoi la dérivée $\dfrac{dy}{dx}$ est au second degré dans l'équation différentielle. Les deux valeurs de $\dfrac{dy}{dx}$ se rapportent aux deux tangentes que l'on peut tracer par chaque point, à chacune des courbes qui peuvent y passer.

Mais si $\alpha^2 + \beta^2 = a^2$, c'est-à-dire si le point où la courbe doit passer, est situé sur le cercle de rayon a, tracé autour de l'origine, alors les deux valeurs de c deviennent égales; les deux paraboles coïncident ainsi que leurs tangentes.

Donc, pour tous les points de la circonférence

$$x^2 + y^2 = a^2$$

les deux valeurs de la dérivée $\dfrac{dy}{dx}$ deviennent égales.

La solution singulière

$$x^2 + y^2 - a^2 = 0$$

est donc le lieu géométrique des points où les deux paraboles, ainsi que leurs tangentes, deviennent coïncidentes, et on l'obtiendra en écrivant la condition connue qui exprime que l'équation du second degré par rapport à $\dfrac{dy}{dx}$, a ses deux racines égales.

En posant $\frac{dy}{dx} = p$ et en mettant l'équation proposée sous la forme

$$p . y + x = \sqrt{x^2 + y^2 - a^2}$$

$$\text{ou} \quad p^2 y^2 + 2p . xy + (a^2 - y^2) = 0$$

puis en exprimant que les deux valeurs de p sont égales, on trouve $y^2 (a^2 - y^2) = x^2 y^2$

$$\text{et} \quad y^2 + x^2 - a^2 = 0$$

Il est facile de voir que par tous les points situés à l'intérieur du cercle $x^2 + y^2 - a^2 = 0$, on ne peut faire passer aucune courbe qui satisfasse à la question, c'est-à-dire que le lieu géométrique représenté par la solution singulière sépare la région des solutions réelles de la région des solutions imaginaires.

En appelant toujours p la dérivée $\frac{dy}{dx}$ on peut appliquer le procédé que je viens d'indiquer, c'est-à-dire exprimer que les deux valeurs de p qu'on peut tirer de l'équation, sont égales, — et on trouve immédiatement les solutions singulières de toutes les équations différentielles qui suivent, sans avoir besoin de recourir à l'intégrale générale qui est indiquée au-dessous.

J'ai recueilli tous les exemples que j'ai trouvés dans les traités à ma disposition :

1° $$y\,dy - dx\sqrt{a^2 - y^2} = 0$$

$$y . p - \sqrt{a^2 - y^2} = 0$$

$$y^2 . p^2 + (y^2 - a^2) = 0$$

Solution singulière $\quad y^2 - a^2 = 0$

Intégrale générale $(x - c)^2 + y^2 = a^2$

2°
$$y\,dx - x\,dy = a\,dx\sqrt{1 + \frac{dy^2}{dx^2}}$$

$$y - xp = a\sqrt{1 + p^2}$$

$$p^2(x^2 - a^2) - 2\,pxy + (y^2 - a^2) = 0$$

Solution singulière $x^2 + y^2 = a^2$

Intégrale générale $y = cx + a\sqrt{1 + c^2}$

3°
$$y\,dx - x\,dy = dx\sqrt{b^2 + a^2\frac{dy^2}{dx^2}}$$

$$p^2(x^2 - a^2) - 2\,p.\,xy + (y^2 - b^2) = 0$$

Solution singulière $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$

Intégrale générale $y = cx + \sqrt{a^2c^2 + b^2}$

4°
$$y + (y - x)\frac{dy}{dx} + (a - x)\frac{dy^2}{dx^2} = 0$$

$$(a - x)\,p^2 + (y - x)\,p + y = 0$$

Solution singulière $(x + y)^2 - 4\,ay = 0$

Intégrale générale $y + (y - x)\,c + (a - x)\,c^2 = 0$

5°
$$y\frac{dy^2}{dx^2} + 2\,x\frac{dy}{dx} - y = 0$$

$$yp^2 + 2\,xp - y = 0$$

Solution singulière $x^2 + y^2 = 0$

Intégrale générale $y^2 = 2\,cx + c^2$

6° $$y^2 - 2\,xy.\,p + (1 + x^2)\,p^2 = 1$$

Solution singulière $y^2 = 1 + x^2$

Intégrale générale $y^2 - 2\,cxy + (1 + x^2)\,c^2 = 1$

7° $$\frac{dy^2}{dx^2} + \left(\frac{1}{2}x^3 + x\right)\frac{dy}{dx} - \left[\frac{1}{16}x^4 + y\left(1 + x^2\right)\right] = 0$$

$$p^2 + \left(\frac{1}{2}x^3 + x\right)p - \left[\frac{1}{16}x^4 + y\left(1 + x^2\right)\right] = 0$$

Solution singulière $16\,y + 4\,x^2 + x^4 = 0$

Intégrale générale:

$$\sqrt{16y + 4x^2 + x^4} = x\sqrt{1 + x} + \log\left(x + \sqrt{1 + x^2}\right) + c$$

8° $$4\,x^2\,dx + 4\,axdy = dx\sqrt{2\,x^2 + 4\,ay - a^2}$$

$$4\,x^2 + 4\,ax.\,p = \sqrt{2\,x^2 + 4\,ay - a^2}$$

$$16\,a^2x^2.\,p^2 + 32\,ax^3.\,p + (16\,x^4 - 2\,x^2 - 4\,ay + a^2) = 0$$

Solution singulière $2\,x^2 + 4\,ay - a^2 = 0$

Intégr. gén. $\sqrt{4\,ay + 2\,x^2 - a^2} = \text{log. nép. } c\sqrt{x}$

Dans l'exemple 6°, la condition pour que les valeurs de p données par l'équation deviennent égales, est

$$x^2\,y^2 = (y^2 - 1)\,(1 + x^2)$$

Cette équation donne

$$y^2 = 1 + x^2$$

qui est la solution singulière.

Pour l'obtenir au moyen de l'intégrale générale, il faudrait différentier celle-ci par rapport à c, ce qui donnerait :

$$-xy + c(1 + x^2) = 0$$

d'où
$$c = \frac{xy}{1 + x^2}$$

On substitue cette valeur de c dans l'intégrale, et on trouve après les réductions convenables :

$$y^2 = 1 + x^2$$

La discussion géométrique que j'ai développée en commençant pourrait s'appliquer de même aux autres exemples, entre autres au n° 3. Celui-ci peut être exprimé ainsi : Tracer une droite telle que le produit des perpendiculaires abaissées sur cette droite, de deux points fixes F et F', soit constant et égal à b^2.

L'intégrale générale est l'équation de la droite variable de position suivant l'arbitraire c; celle-ci étant susceptible de deux valeurs, il y a toujours deux solutions pour chaque point du plan, sauf pour les points qui sont situés sur le lieu géométrique indiqué par la solution singulière. Ce lieu géométrique est une ellipse à laquelle toutes les droites cherchées sont tangentes. C'est en effet une propriété connue de l'ellipse que le produit des perpendiculaires abaissées des foyers sur une tangente quelconque est toujours égal au carré du demi-petit axe.

M. *de Rougemont* montre à la Société des rameaux de deux plantes curieuses qui se trouvent, l'une dans le jardin du Cercle du Musée, l'autre à Voëns. La première plante que M. de Rougemont observe depuis quelques années, est un buisson maintenant en fleurs,